SHOUT
SHARE
IT

S. 1142

MEMORIE
DI
MATEMATICA
E FISICA
Academia [illegible]
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA
TOMO I.

VERONA
PER DIONIGI RAMANZINI
MDCCLXXXII.

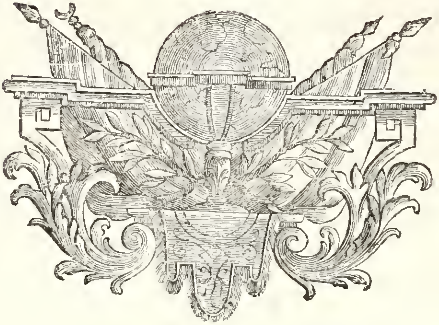
NATURAL HISTORY

Ond' è mai, che la nazione Italiana, feconda in ogni tempo d'ingegni ſingolari, par quaſi inoperoſa a paragone d'altre non poche in Europa, intente a ſegnalarſi tutto giorno, e fare a gara progreſſi luminoſi nelle Scienze? E' egli perchè o non ſia in Italia conceduto libero campo di eſercitarſi agl' intelletti, o perchè manchino i Mecenati, i mezzi, gl' incoraggiamenti? Ma tanto ſon fatti comuni i lumi della buona Filoſofia, e della ſana Morale, che non v' è per così dire regione, in cui non ſia permeſſo a' dì noſtri in materie ſcientifiche il penſare, e lo ſcrivere liberamente. Le Accademie poi, i Licei, le Univerſità, d'uomini provvedute per ogni conto ragguardevoli, paleſano a chiare note l'impegno magnanimo con cui i Principi d' Italia gli ſtudj favoriſcono, e la cultura della nazione. Nè ad altro ſono inteſe le pubbliche Biblioteche , le Specule , le Collezioni di Storia naturale, le Sale di macchine, e ſuppellettili per la Fiſica Sperimentale, i Teatri Anatomici , i Laboratorj di Chimica , ed altri egregj ſtabilimenti , fuorchè al grande oggetto di promuovere l'applicazione de' nazionali , e di porger loro i ſuffragj più prezioſi. O ſarebbe di ciò cagione radicale l'eſſere ſeparati gl'Italiani, e nell'eſercizio diviſi delle proprie forze; tal che non può averſene il frutto, che all'unione di loro verrebbe fatto di mettere indubitatamente? Non è già che non ſia tutt'altra la condizione noſtra d'oggidì da quella de' tempi andati , in cui le civili diſcordie , le invaſioni de' barbari, le ſucceſſive alternazioni di Governi, di Leggi , d'Idiomi tenevano l'Italia in continuo ſconvolgimento , e contrappoſto di umori , e coſtumi; ove gli ſtudj nazionali, ſe ve ne aveva, confondevanſi cogli ſtranieri ; ove il nativo genio era avvilito , oppreſſo il valore, e tolta ogni via di pacifica intelligenza. Ma l'eſſere or pure partita l'Italia in dominj d'indole, e d'inſtituzione non una, fa che ſieno neceſſariamente l'un dall'altro diſgiunti gli uomini illuminati , che natura ha diſtribuito imparzialmente ; difficulta e reſtrigne le relazioni ; ſparge un ſeme impercettibile di mutue geloſie; e arreſta quel reciproco e libero ſcambio di lumi, ch'e' ſarebbero naturalmente in comunione d'intereſſi, e di volere. Quindi è che lo ſplendore di loro, quantunque viviſſimo, riverbera a ſtento, e languidamente ſull'intera nazione. E non è raro il caſo, che in una parte d'Italia s'ignorino perſino le produzioni dell'altra, i progreſſi, le ricchezze letterarie, o non vengano elle in pregio ed onore, ſiccome alle ſtraniere è conceduto. Come può mai in sì fatta oppoſizione di coſe, in tanto abuſo de' mezzi proprj e naturali copioſiſſimi, ampiarſi il fondo delle cognizioni utili, e il luſtro aumentarſi, e la gloria della nazione? Certo è che l'unione de' dotti in Società patrie è l'epoca de' progreſſi, che ſi ſon fatti in Europa nelle Scienze e nelle Arti, e della reputazione altiſſima in cui ſon venute a' dì noſtri moltiſſime regioni. Sbandita la pedanteria, l'illuſione de' ſiſtemi; preſo per iſcopo il vero, l'utile degli obbietti; appianate agli Studioſi le vie onde avanzarſi, ed eccitato coll'emulazione, e coll'eſempio un guſto univerſale per l'applicazione, tutto per mezzo di queſte Unioni concorre ad ingrandir la nazione; e non è meraviglia, che fatte ricche di tante e migliori forze combinate divengano poi elle arbitre dell'opinione, e quaſi ſantuario d'ogni arte, d'ogni dottrina nazionale. Ma ſe dobbiam convenire per una parte, eſſer queſto il mezzo più valido e ſicuro onde conciliare col promovimento delle Scienze il bene delle nazioni; e non poſſiamo diſſimulare dall'altra, che lo ſvantaggio d'Italia è l'aver ella le ſue forze diſunite; come tentarne l'unione? e per qual mezzo libero da contrarietà aſſociare le cognizioni e l'opera di tanti illuſtri Italiani ſeparati, di cui non può a talento variarſi la coſtituzione? Non è invero ardua impreſa in uno Stato anche vaſto, ove la mente di un ſolo o di pochi dirige e regola il deſtino della nazione, il diſporre ed effettuare il trapiantamento, e la concittadinanza eziandio di parecchi uomini, ſotto gli occhi, e gl' influſſi benefici del Governo. Così è che veggiam ſorte felicemente tante inſigni Compagnie, che illuſtrano la Francia, l'Inghilterra, la Pruſſia, la Moſcovia, la Svezia, ed altri floridi Stati di Europa. Ma in Italia, qualunque ſiaſi l' inſtituzione o il ſiſtema che voglia immaginarſi, repugna alla condizione delle coſe, che poſſano in ſimil guiſa avvicinarſi ed unirſi gl' Italiani in un corpo di Scienziati nazionale, animato da un ſolo fiato vivificante. Non reſta pertanto, ponderato il tutto a bilancia, che un ſolo tentativo da farſi, ch'è quello di ricorrere ad un principio motore degli uomini, principio ſempre attivo, e talora operante con entuſiaſmo, l'amor della Patria. Non v'ha certamente riſguardo che poſſa obbiettarſi ad un amichevole accordo, ad un legame innocente tra uomini della ſteſſa nazione, i quali ſenza mancare alle naturali occupazioni o a' doveri del proprio ſtato conſacrar vogliano parte del loro tempo al vantaggio, e al luſtro nazionale. Tutto eſſendo di elezione e di libera volontà, non può avervi altra legge per una Compagnia fondata ſu queſta baſe, fuorchè quella, ch'eſſa vorrà imporſi da sè, e cui l'amor patrio, e il genio naturale per le Scienze potranno rendere tollerabile, ed accetta. E queſta terrà luogo di obbligazione e di vincolo; manterrà in vigore la mutua amica corriſpondenza; animerà la comune applicazione, l'induſtria, e il fervore di tutti. Ecco i fondamenti di una Società, che prende a formarſi in Italia per l'avanzamento delle Scienze; ed ecco in queſto Volume il primo Saggio di ſue produzioni, combinate, come meglio le circoſtanze il permiſero ſul ſuo naſcimento. Da ora innanzi eſciranno regolarmente alla luce le Sociali Memorie, ſiccome ſuol farſi nelle altre Accademie dell' Europa ; e ſaranno elle , a ſcanſamento di competenze , diſpoſte ne' Volumi coll' ordine alfabetico de' Cognomi. Ognuno riſponderà per sè , e delle proprie meditazioni, ed eſperienze; de' proprj calcoli , e riſultamenti , come ſe ne faceſſe ſeparatamente la pubblicazione. E perchè abbia ciaſcheduno un agio convenevole, onde conciliare co' riguardi della propria condizione il buon genio di adoperarſi per l' incremento di queſta Società, è ſtabilito intanto , che reſti libero un anno intero dall' uſcita di un Volume alla ſtampa del ſuſſeguente ; sì che comparirà il ſecondo Tomo nel 1784., il terzo nel 1786., e così ſucceſſivamente. Qualunque volta l' Autore il richiegga , ſarà , sì per ſalvezza e aſſicuramento di proprietà nelle ſcoperte , e sì ancora per qualche motivo di nobile emulazione in uno ſteſſo argomento , ſegnata a piè di pagina la data del ricevimento della Memoria di lui . Se la quantità degli Opuſcoli oltrepaſſaſſe le miſure di un diſcreto Volume , ſarà diviſo il Tomo in due col titolo di Parti. L'edizione potrà farſi in qualunque città d' Italia, ove riſieda uno o più membri della Società per la neceſſaria e fedele conſerva delle Memorie , e pel mantenimento dell' ordine convenuto; e quivi ſarà fatta ſcelta

di

di abili Soggetti per la reviſione, e correzione della Stampa, a' quali potranno indirizzarſi gli Autori per aggiunte, troncamenti, od altre modificazioni, che voleſſero ne' proprj Scritti. Il governo economico è fondato con ſicure e ferme provvidenze, sì che potranno diſtribuirſi coſtantemente a ciaſcun membro della Società un Volume degli Atti in dono, e alcuni eſemplari della riſpettiva Diſſertazione. Le Matematiche, e la Fiſica in generale ſono le Scienze peculiari della Società, la quale perciò in due Claſſi principali ſi dirama. A ſcelta e giudizio di queſte verrà ammeſſo nella Compagnia ogni Italiano, il quale abbia un merito maturo, e per più opere date in luce, ed applaudite riconoſciuto univerſalmente; sì che venendo propoſto alcuno da aggiugnerſi all'una o all'altra Claſſe, non potrà aver luogo l'aſſociazione di lui, ſe l'intera Claſſe non vi acconſenta. Ma ad ogni Socio è conceduta libertà d'inſerire negli Atti una ſcoperta utile, un' importante e nuova produzione anche di perſona non aggregata, purchè voglia, come di coſa propria, riſponderne egli ſteſſo inverſo la Compagnia. E perchè ſuol eſſer dolce a' poſteri, toccante, e di lodevole emulazione la ricordanza di que' pochi uomini, che ſi adoperano a prò di tutti gli altri, ſarà compilato l' elogio d' ogni membro della Compagnia, che Morte andrà togliendole di tanto in tanto; cioè teſſuta la vita del Filoſofo, non quella dell' uomo ſemplicemente. Non è ammeſſo negli Atti della Società altro idioma, fuorchè l' Italiano: idioma proprio a tutto, e fatto ormai per l' Europa agli uomini non inculti familiare. Se una lingua viva ſtende vie più il ſuo impero, quanto più ſale in reputazione chi la parla, e quanto più il pregio delle opere ſcritte s' aumenta; una collezione ſcelta de' progreſſi nelle Scienze di una Nazione merita abbaſtanza di eſſere conoſciuta, perchè la lingua in cui è fatta divenga, quant' altra mai, autorevole e importante. Queſto è il piano ſemplice e concordato della Società Italiana. Parrà talvolta ſterile a primo aſpetto una ſcoperta di Anatomia, un Medico cimento, un' eſperienza di Chimica, una nuova verità di Geometria o di Calcolo. Ma ſe qualche ſoggetto non è immediatamente applicabile, è ſempre vero, che o s' attiene ad altri che il ſono, o vi ci conduce neceſſariamente. E v' ha ancora tal indole di verità, la quale ſenza il concorſo di molte altre non può per sè eſſere applicata immediatamente; ve n' ha che s' applicherebbero, ſe ci foſſe permeſſo di veder tutto, e di concatenare le anella innumerabili di una Scienza; e ve n'ha perfine, che ſtaranno probabilmente ozioſe in perpetuo, quaſi monumenti di luſſo della mente umana. Ma quand' anche ciò foſſe, non è mai inutile un' indagine, che conduce per lo meno a qualche nuova rifleſſione; in cui l'intelletto brama ardentemente d'internarſi; che lo illumina e paſce con viva e dolce ſoddisfazione: avendo egli pure i ſuoi biſogni, i ſuoi piaceri, e non di rado qualche capriccio da appagare. La Società non ſi propone, che l' inveſtigazione del vero in che che ſia, e di far conſerva delle ricerche de' ſuoi, intorno a ciò che è conceduto agli uomini di ſviluppare nelle Scienze con la meditazione, col ragionamento, e con l' oſſervazione. Il connettere tutto inſieme, e il rendere fruttuoſo eziandio quello, che ſembrar può oggidì infeconda ſpeculazione, è opera del tempo, e bene ſpeſſo di accidentali, e non atteſe combinazioni. Queſto è il bene, il vantaggio capitale, che mancava all' Italia, in cui, non il poſſedimento d' uomini illuſtri, e nelle Scienze quant' altri mai perſpicaci e profondiſſimi, ma ben l' unione di loro in un ſol corpo regolato poteva altrui invidiarſi da gran tempo.

Così avverrà, che ſi rivendichino pienamente i dritti di una regione, che fu prima dell' altre ricovero e ſede delle Scienze, e dell' Arti, e donde attinſe da' primi ſecoli l' Europa ſtudj, inſtituzioni, e cultura.



INDICE

DELLE MEMORIE

PRIMA SEZIONE.

INtroduzione a' nuovi principj della Teoria elettrica dedotti dall' Analiſi de' Fenomeni dell' elettriche punte

Del P. CARLO BARLETTI delle Scuole Pie Profeſſore di Fiſica nell' Univerſità di Pavia . . pag. 1

Teoria del nuovo Aſtro oſſervato prima in Inghilterra

Del Sig. Ab. RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH Profeſſore di Ottica al Dipartimento della Marina a Parigi 55

Riſultati di ſperienze ſopra l' elaſticità de' fluidi aeriformi permanenti ſul mercurio

Del Sig. FELICE FONTANA Direttore del Gabinetto Fiſico di S. A. R. il G. Duca di Toſcana . 83

Principj Generali della ſolidità e della fluidità de' Corpi

Del Medeſimo 89

Articolo di Lettera ſcritta dal Medeſimo al Fratello Profeſſore di Matematica nell' Univerſità di Pavia *ſopra la Luce, la Fiamma, il Calore, e il Flogiſto* . 104

Sopra la miſura della luce in generale, e ſopra l' illuminazione de' varj ſegmenti del Diſco ſolare tagliati dall' orizzonte nel tempo del nacere e tramontare del Sole

Del P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie Profeſſore di Matematica nell' Univerſità di Pavia. 111

Sopra la diſceſa de' Gravi per la conveſſità de' Canali Curvilinei

Del Medeſimo 174

Sopra i logaritmi delle quantità negative, e ſopra gl' immaginarj

Del Medeſimo 183

Deſcrizione di una Macchina Meteorologica per mezzo della quale ſi determina di ora in ora la durata e quantità della pioggia

Del Sig. CAVALIERE MARSILIO LANDRIANI 203

Ricerche ed Oſſervazioni ſociali fatte per perfezionare il Barometro

Del Sig. PIETRO MOSCATI Regio Profeſſore, e Sig. CAVALIERE MARSILIO LANDRIANI 225

Nuova Inveſtigazione della Somma Generale delle Serie

Del Sig. ANTON-MARIO LORGNA Direttore delle Scuole Militari di Verona . . . , ... 268

Ricerche intorno al Calcolo Integrale dell' Equazioni Differenziali finite. Memoria I.

Del Medeſimo 373

Sperienze ſopra il Precipitato Porpora ottenuto dal Gaz ricavato dallo Stagno, e dalla ſua Calce

Del Sig. Conte Morozzo 431

Delle Vibrazioni Sonore de' Cilindri

Del Sig. Conte Giordano Riccati . . 444

Oſſervazioni ed eſperimenti ſopra la ſcompoſizione del Sale Ammoniaco per mezzo della Calce terrea

Del Sig, Conte Saluzzo 526

Riſultati di eſperienze ſopra la riproduzione della Teſta nelle Lumache Terreſtri

Del Sig. Ab. Lazaro Spallanzani Regio Profeſſore di Storia naturale nell' Univerſità di Pavia 581

Memoria intorno alla maggior perfezione dell' Argano

Del Sig. Ab. Leonardo Ximenes Matematico di S. A. R. il G. Duca di Toſcana 613

SECONDA SEZIONE.

Lettera del Sig. Felice Fontana Direttore del Reale Muſeo di Fiſica e di Storia Naturale di Firenze

Al Sig. Adolfo Murray Profeſſore di Anatomia a Upſal. Scritta il dì 20. di Ottobre 1781. 648

Dell' irreducibilità della Formula Cardanica a forma finita, algebraica, e libera da aſpetto immaginario

Del Sig. Anton-Mario Lorgna Direttore delle Scuole Militari di Verona 707

Eſpoſizione Anatomica delle parti relative all' Encefalo degli Uccelli

Del Sig. Vincenzo Malacarne Direttore delle Regie Terme Acqueſi, e Chirurgo Maggiore del Real Preſidio di Turino 747

Eſame critico di un Problema di Probabilità del Sig. Daniele Bernoulli, e ſoluzione di un altro Problema analogo al Bernoulliano

Del Sig. Gio: Francesco Malfatti Profeſſore di Matematica nell' Univerſità di Ferrara . . . 768

Nuovo uſo della Chinachina nel Vajuolo

Del Sig. Giovanni Verardo Zeviani. 825

INTRODUZIONE

A nuovi Principj della Teoria Elettrica dedotti dall' analiſi de' fenomeni delle Elettriche punte.

Del P. Carlo Barletti, Delle Scuole Pie,
Profeſſore di Fiſica nell' Univerſità di Pavia.

PARTE PRIMA.

SUppongo notiſſime le prime ſperienze ſulle Elettriche punte, pubblicate da *Franklin*, e da le *Roi*, non meno che le più recenti di *Franklin* medeſimo, di *Wilſon*, di *Naime*, e di *Barbier* de *Tinan*. Come però le prime non ſono che fatti iſolati, incapaci di formare induzione; così le altre ſono unicamente riſtrette all' uſo delle punte ſteſſe nel riparare le fabbriche da' danni del fulmine; e perciò non tendono a perſezionare la teoria delle punte; e per mancanza appunto di quella teoria reſtano in ſeſteſſe meno eſpreſſive. Ho fatto io qualche ſaggio per ripigliare le coſe da capo, e tentarne una teoria, che renda meno incerte e precarie quelle prime, ed inſieme più chiara l' eſpreſſione delle ultime. Eſporrò primieramente alcune ſperienze con tutta la brevità.

Comincio dal miſurare l' azione di una elettrica punta oppoſta alla ſuperficie armata di uno ſtrato reſiſtente; indi al roveſcio diretta dalla ſuperficie ſteſſa da un conduttore elettrico. Mi ſembrò queſta la più ſicura via per ridurre a miſura ed a proporzione ciò che fino qui non ſi maneggiò ſe non a maſſe confuſe.

Nella macchina elettrica a diſco di pulito criſtallo iſolo il cuſcinetto ſtrofinante, ed a queſto uniſco un conduttore fatto a tubo di ottone lungo pollici 18, del diametro di pollici 2, in tutta la ſua lunghezza cilindrico, che termina in cono dalla parte che guarda il cuſcinetto ſtrofinante, ed all' oppoſta eſtremità finiſce in globo più groſſo di un mezzo pollice che non è il diametro del tubo. Alla più eſtrema conveſſità di queſto globo nella direzione ſteſſa dell' aſſe del tubo attacco un filo di ottone groſſo una linea, lungo pollici tre, linee nove, terminato in punta conica acutiſſima.

Lo ſtrato reſiſtente è una laſtra rettangolare di vetro di Germania alta pollici $17\frac{1}{2}$, larga pollici $12\frac{2}{3}$, coperta di foglia di ſtagno egualmente nelle due oppoſte ſuperficie con un labbro da ambe le parti nudo e pulito di pollici $1\frac{1}{2}$, talchè reſta un' armatura diſtante dall' altra pel giro di pollici tre intorno all' orlo del vetro.

Dalla cima di ciaſcuna armatura pende nel mezzo un ſottil filo di lino lungo pollici 11, teſo in fondo con un globetto di midolla di ſambuco groſſo linee tre.

Sta queſto quadro ſoſtenuto verticalmente ſecondo la ſua altezza ſopra due baſi iſolanti, col moto delle quali può a piacimento appreſſarſi, o ſcoſtarſi dalla punta qui ſopra fiſſata nel tubo. Ed appunto reſtando queſta diretta a due terzi di altezza d' un' armatura, ed appoggiando all' armatura oppoſta un groſſo filo di ottone, acciocchè la ſteſſa per tal via comunichi liberamente col ſuolo, e poſſa il quadro coricarſi; io eccito colla rotazione del diſco la reſinoſa elettricità nel tubo, e nelle varie diſtanze di quel quadro dalla punta ſteſſa faccio la ſeguente Serie di ſperienze. Avverto ora per ſempre, che in ciaſcuna variazione delle diſtanze dalla minima fino alla maſſima reſta ſempre eguale l' eccitamento di elettricità nella macchina, ed eguale è il numero de' giri del diſco in ciaſcun atto d' ogni progreſſione delle diſtanze medeſime. Furono que' giri in alcune progreſſioni trenta, in altre seſſanta, ma ſempre in egual numero ad ogni diſtanza della intera progreſſione.

SERIE PRIMA.

1. Ritiro paſſo paſſo il quadro dal contatto colla punta fino alla diſtanza di quattro pollici, e trovo ad ogni paſſo nel quadro piena la forza della carica ſcuotente e fulminante.

2. Seguo gradatamente a ritirare il quadro fino alla diſtanza di pollici ſei, e trovo che ne' frappoſti intervalli comincia a comparire alquanto diminuita la forza della carica.

3. Per diminuirla notabilmente e renderla ſotto la metà della piena ſua forza fa d'uopo ritirare il quadro fino alla diſtanza di pollici otto.

4. Dagli otto fino a' dodici andò ſcemando la forza della carica, la quale però fu tuttavia bene ſcintillante e ſcuotente. Scemò per altro tale forza con progreſſione più aſſai decreſcente al di là degli otto pollici, che non faceva fino agli otto.

5. La provai ancora ſenſibile tanto nella ſcintillazione, come nella ſcoſſa, ritirando il quadro fino ai quattordici pollici lontano dalla punta. In queſte ultime degradazioni per accertarmi più ſicuramente ſcarico il quadro facendone paſſare la ſcoſſa tra l'indice e il pollice della mia mano, co' quali tocco inſieme le oppoſte armature.

6. Al di là de' quattordici pollici più non s'impreſſe nel quadro forza di carica, atta a ſcuotere ſenſibilmente, ma ſoltanto a dare tenue ſcintillazione, e in fine tenui moti nel pendolino anneſſo all'armatura nell' atto che continuava a girare il diſco.

7. I cuſcinetti e il tubo, che porſero perenne vena di elettricità in tutte queſte ſperienze, non erano perfettamente iſolati dai corpi intorno, ſe non alla diſtanza di otto pollici: il che ſi deve tener a mente pel ſucceſſivo confronto.

8. Miſurai la forza della ſcintilla nel tubo, mentre ſi caricò il quadro in tutte le diſtanze precedenti; e trovai, che nelle diſtanze de' primi numeri era tanto languida l'elettricità, che appena poteva trarſi la ſcintilla, accoſtando il dito al tubo ad una linea o due; ed anche alle maggiori diſtanze del quadro, notate negli ultimi numeri, la ſcintilla comparve ſempre dal tubo aſſai fiacca alla diſtanza di tre linee appena.

La punta unita al tubo in queſta prima Serie ſi chiamerà per compendio *punta di elettricità reſinoſa*.

PREPARAZIONE.

Ritengo l'antecedente preparazione, e ſoltanto ſtacco la punta dal globo, e la fiſſo nella medeſima altezza e direzione dell'aſſe del tubo ſull'armatura del quadro. Preſento quella punta al globo, cui ſtava prima unita, e rinnovando ad ogni varietà delle diſtanze i trenta o ſeſſanta giri del diſco, che replico egualmente in ciaſcuna progreſſione, ho la ſeguente Serie di ſperienze.

SERIE SECONDA.

1. Parto al roveſcio dell' antecedente Serie della diſtanza di quattordici pollici, ed arrivo fino alla diſtanza di ſei pollici, prima di trovare nel quadro il minimo cenno di que' moti e di quella luce, che erano ancor tanto notabili nella prima Serie molto al di là de' quattordici.

2. Dopo la diſtanza di ſei pollici comincia qualche volta a comparire alcun tenue moto, e poi alcuna luce, ma ſenza verun indizio di ſcoſſa.

3. Per avere nello ſcaricare il quadro qualche coſtante ſegno di luce ſcintillante dopo i trenta o ſeſſanta giri del diſco, d'uopo è appreſſare la punta al globo fino

ai quattro pollici, nè queſti ancora baſtano per renderne ſenſibile la ſcoſſa.

4. Inoltrata ancor di più la punta ſotto ai tre pollici dal globo, comincia a ſentirſi nel quadro picciola ſcoſſa, come nella Serie antecedente alla diſtanza di quattordici.

5. Per avere un ſenſo di ſcoſſa equivalente a quello, che ſi ebbe nell' antecedente Serie al di là degli otto pollici, fu qui neceſſario inoltrare la punta ai due pollici dal globo.

6. In fine la piena ſcarica fulminante non ſi ottiene mai, ſe non portata la punta a diſtanza non meno di un pollice.

7. L' iſolamento del tubo era in tutta queſta Serie perfetto, come nell' antecedente ad otto pollici.

8. La forza dell' elettricità nel tubo, mentre ſi caricò il quadro, fu tale, che eſſendo la punta alla diſtanza di quattro pollici non mancò di trarſi dal tubo ſcintilla piena viviſſima e frequente, preſentando il dito anche al di là di un pollice. Ed accoſtandoſi la punta ai tre, ai due, e per fino verſo ad un pollice, non fu mai tanto fiacca la ſcintilla, come lo fu nell' antecedente Serie, quando il quadro era lontano dalla punta verſo i quattordici.

La punta unita al quadro in tutta queſta Serie la chiamerò per brevità *punta oppoſta alla reſinoſa elettricità*.

COROLLARI.

1. La punta di elettricità reſinoſa induce la carica nell' oppoſto quadro con forza per lo meno quadrupla della punta oppoſta alla ſteſſa elettricità.

Quella in diſtanza di quattordici pollici imprime nel quadro tanta carica (*Ser.* 1. *n.* 5), come queſta ai tre (*Ser.* 2. *n.* 4); e nuovamente quella agli otto pollici tanta, come queſta ai due (*Ser.* 2. *n.* 5); e in fine quella ai quattro pollici, come queſta ad uno (*Ser.* 1. *n.* 1, e *Ser.* 2. *n.* 6).

2. La punta di elettricità reſinoſa diſperde la ſua ſpecie raccolta, o accorrente di continuo nel ſuo conduttore con forza per lo meno ſettupla della punta oppoſta alla ſteſſa elettricità.

Le ſcintille nel tubo con punta, quando il quadro fu alla diſtanza di quattordici pollici (*Ser.* 1. *n.* 8), reſtarono ſempre minori, che quando la punta del quadro fu vicina al tubo anche più di due pollici (*Ser.* 2. *n.* 8). Ora quelle ſcintille ſono la più eſatta miſura della elettricità reſidua, cioè non diſperſa.

3. La punta di reſinoſa elettricità induce notabile forza di carica nell' oppoſto quadro, benchè queſto ſia rimoſſo fino a' limiti dell' iſolamento.

I limiti dell' iſolamento ſono otto pollici (*Ser.* 1. *n.* 7), e la forza della carica ſi trova ancora in que' limiti poco meno della metà (*Ser.* 1. *n.* 3).

4. E ſegue ad indurre ancora qualche forza nel quadro rimoſſo alla diſtanza di tre quarti al di là di que' limiti.

La forza della carica è ancor ſenſibile oltre ai dodici fino a' quattordici pollici (*Ser.* 1. *n.* 4, 5), cioè ſei pollici al di là de' limiti dell' iſolamento, e queſti ſono appunto tre quarti di otto.

5. La forza della carica, impreſſa dalla punta ſteſſa nel quadro al di là dei limiti dell' iſolamento, non corriſponde alla diminuzione di forza, che ſi oſſerva nella ſcintilla tratta dal tubo.

Nella ſeconda Serie non fu mai la ſcintilla tanto fiacca, anche quando nel quadro s' impreſſe la piena forza della carica, come lo era nella prima Serie, quando la carica fu tenuiſſima alla diſtanza di quattordici pollici (*Ser.* 1. *n.* 5, 8. *Ser.* 2. *n.* 8). Tale ſcintilla è lenta, e ſpicca appena a tre linee dal tubo; quando la ſcintilla piena, tolta la punta, ſpicca frequente a diſtanza di un pollice; e frattanto la carica è tenuiſſima. Dunque l'elettricità del tubo non concorre, che in picciola ſua parte a far queſta carica.

6. Viceverſa la punta oppoſta all' elettricità reſinoſa non induce nel quadro veruna carica, nè ſcema punto la forza della ſcintilla nel tubo, finchè l' armatura ſteſſa, cui ſta unita la punta, non arriva entro i limiti dell' iſolamento.

Finchè la punta non è vicina verſo i quattro pollici al tubo, non compariſce nel quadro menoma carica, e appena qualche tenue luce (*Ser.* 2. *n.* 3). Ora il filo della punta è lungo pollici tre e nove linee, come ſi avvertì da principio. Aggiunti queſti a' quattro pollici, fanno pollici ſette e nove linee, che corriſpondono dentro i limiti dell' iſolamento.

7. Nè comincia la carica a farſi notabile nel quadro, ſe non quando l' armatura ſteſſa è inoltrata verſo un quarto entro i limiti dell' iſolamento.

Inoltrata la punta ſotto i tre pollici, e fino ai due ſi ha nel quadro notabile la ſcoſſa (*Ser.* 2. *n.* 4, 5). Aggiunti queſti alla lunghezza del filo della punta fanno verſo i pollici ſei, che portano l'armatura inoltrata due pollici, cioè verſo un quarto inoltrata entro i limiti dell' iſolamento.

8. E qui la diminuzione di ſcintilla, tratta in quell' atto dal tubo, è corriſpondente al ſucceſſivo aumento della carica impreſſa nel quadro.

Fino ſotto ai quattro pollici, ove niuna fu la carica nel quadro, reſtò piena e frequente la ſcintilla; nè andò queſta ſcemando, ſe non in proporzione che maggiore s' impreſſe nel quadro la carica (*Ser.* 2. *n.* 6, 8).

PREPARAZIONE.

Mi ſervo della ſteſſa macchina, e tubo, e quadro, e punta, ſe non che tolto l' iſolamento de' cuſcinetti, preſento il tubo nel modo ſteſſo di prima, non più ai cuſcinetti, ma al diſco, in diſtanza da quelli d' un ſeſto circa della periferia del diſco. Talchè in vece di reſinoſa elettricità raccolgo nel tubo la vitrea, e ſo con queſta la Serie di ſperienze corriſpondenti alle due premeſſe. Comincio pertanto ad applicare la punta al globo del tubo, e preſento a queſta il quadro ſimilmente, come nella prima Serie, nelle diſtanze ſeguenti con trenta e ſeſſanta giri del diſco in ciaſcuna.

SERIE TERZA.

1. Dal contatto del quadro colla punta, ritirandolo fino verſo la diſtanza di due pollici, s' induce nello ſteſſo piena forza di carica.

2. Ai tre pollici ſi riconoſce già alquanto diminuita: ai quattro è già verſo la metà.

3. Indi va per modo ſcemando, che a' ſei è già molto al di ſotto alla metà della piena ſua forza.

4. Rimoſſo il quadro a piccioli tratti da' ſei fino a' dieci pollici, reſta ad ogni ſucceſſivo tratto diminuita la carica, talchè ai dieci è alquanto minore, che non era nella prima Serie alla diſtanza di dodici.

5. Dai dieci fino ai dodici pollici ſi riduce all' ultimo termine la forza ſcuotente, e non reſtano al di là, che tenui ſcintillazioni, come erano nella prima Serie al di là dei quattordici.

6. Volli qui proſeguire a ritirar tanto il quadro da veder fin dove reſtaſſero ſenſibili quelle ſcintillazioni; e le trovai notabilmente diminuite ai quattordici pollici; indi però continuarono, ma appena notabili fino ai pollici venti; al di là de' quali non comparvero che tenuiſſimi ſegni di luce, nel toccare col pollice e indice inſieme le due oppoſte armature del quadro, fino alla diſtanza di pollici ventitre; oltre i quali non reſtò che fino ai ventiquattro pollici alcun tenue moto nel pendolino

dolino anneſſo all' armatura nell' atto che continuava a girare il diſco.

7. L' iſolamento del tubo in tutta queſta Serie era perfetto ai dieci pollici.

8. Le ſcintille al tubo, benchè ſi caricaſſe il quadro vicino alla punta più d' un pollice e mezzo, non furono mai tanto fiacche, come lo furono nella prima Serie, quando era il quadro al di là de' quattordici.

9. Quando ſi caricò il quadro al di là de' quattro pollici, la ſcintilla ſi ebbe già viva e frequente; e infine ritirato il quadro al di là degli otto pollici poco era lontana dalla prima ſua forza; alla quale giunſe, e reſtò mai ſempre, qualora era il quadro diſtante più di pollici dieci.

Si chiamerà in tutta queſta Serie *la punta di elettricità vitrea*.

PREPARAZIONE.

Rimane la ſteſſa preparazione, ſe non che traſporto la punta del globo, e la fiſſo nella ſteſſa altezza e direzione all' armatura del quadro. Indi come nelle precedenti Serie la preſento al globo ſteſſo nelle ſeguenti diſtanze.

SERIE QUARTA.

1. Comincio dalle maggiori diſtanze, e dopo trenta o ſeſſanta giri del diſco ſcorgo ſoltanto a' dieci pollici i primi moti al pendolino anneſſo all' armatura.

2. Succedono ai moti i primi cenni di luce, mentre tento di ſcaricare il quadro: ed ai nove pollici già è ſenſibile inſieme alla ſcintillazione una lieve forza di ſcuotere.

3. Più innanzi di nove pollici creſce la carica ſcuo-

tente per modo, che a' ſei è già ben vicina alla metà della piena ſua forza.

4. Ai quattro pollici è alquanto maggiore, che non era nella terza Serie alla ſteſſa diſtanza; ed al di là dei tre ſi ha ſempre piena la carica ſcuotente, e fulminante.

5. L' iſolamento fu lo ſteſſo che nell' antecedente Serie.

6. E le ſcintille comparvero dal tubo come nella Serie antecedente (*n.* 9); ſe non che qui in parità di quelle diſtanze furono alquanto più tarde e più deboli.

Dirò in tutta queſta Serie *la punta oppoſta alla vitrea elettricità*.

COROLLARJ.

1. La punta di vitrea elettricità induce la ſua ſpecie nell' oppoſto quadro, finchè queſto è dentro i limiti dell' iſolamento con forza notabilmente minore della punta oppoſta alla ſteſſa elettricità; ma quando il quadro è fuori de' limiti dell' iſolamento, quella imprime nello ſteſſo la ſua ſpecie con forza non meno d' un terzo maggiore di queſta.

Finchè il quadro è dentro i limiti dell' iſolamento, quella induce piena carica ſotto la diſtanza di due pollici (*Ser.* 3. *n.* 1), queſta fa lo ſteſſo alla diſtanza di tre (*Ser.* 4. *n.* 4). In quella ai ſei pollici la carica è molto meno di metà (*Ser.* 3. *n.* 3). In queſta alla ſteſſa diſtanza è già ben vicina alla metà (*Ser.* 4. *n.* 3); ed ai quattro pollici è qui maggiore che in quella (*Ser.* 4. *n.* 4).

Fuori de' limiti poi quella induce carica da far ſenſo di ſcoſſa alla diſtanza di dodici pollici (*Ser.* 3. *n.* 4). Queſta fa lo ſteſſo ſoltanto a' pollici nove (*Ser.* 4. *v.* 2), nella quale diſtanza è il quadro fuori dell' iſolamento per la maggior lunghezza del filo della punta. E perciò col confronto delle ſcoſſe, e delle ſole diſtanze dalle punte ſarebbe quella maggiore d' un terzo eſatto. Ma ſiccome col confronto degli ultimi cenni di luce quella arriva al di là de' ventitre (*Ser. 3. n. 5*), e queſta non ſi eſtende al di là de' dieci (*Ser. 4. n. 1*), a' quali aggiunti pollici tre linee nove della lunghezza della punta, non arrivano a' quattordici; perciò non ho ſtimato di ſcoſtarmi dalla verità eſprimendone la proporzione non meno d'un terzo.

2. La punta di vitrea elettricità diſperde la ſua ſpecie raccolta o accorrente di continuo nel conduttore con forza minore della punta oppoſta alla ſteſſa elettricità.

Le ſcintille, che moſtrano i reſidui dell' elettricità non diſperſa, furono ſempre minori in pari diſtanze colla punta oppoſta alla vitrea elettricità, che colla prima (*Ser. 3. n. 9. Ser. 4. n. 6*). Dunque la punta di vitrea elettricità diſperde meno.

Ma queſta minor diſperſione ſi prova ancor più eſattamente dalla maggior forza, colla quale quella ſpinge nell' oppoſto quadro i ſegni della ſua elettricità. Poichè quella inoltra la carica ſenſibile fino ai dodici pollici (*Ser. 3. n. 4*), e gli ultimi ſegni fino ai ventiquattro pollici (*ivi n. 5*). Queſta nella carica non oltrepaſſa i nove, e negli ultimi ſegni non paſſa i dieci pollici (*Ser. 4. n. 1, 2*). Sommando queſte ragioni ſono come 36 : 19, e perciò quella diſperſione è poco meno di ſubdupla.

3. La punta di vitrea elettricità non induce nell' oppoſto quadro ſe non tenue forza di carica, quando queſto è rimoſſo ai limiti dell' iſolamento.

Riſulta dall' immediato confronto del n. 4 e 7 della terza Serie.

4. E non arriva ad indurne forza ſenſibile al di là d'un quinto de' limiti dell' iſolamento.

Non oltrepaſſa tale forza dodici pollici (*Ser. 3. n. 5*), e l' iſolamento è dieci.

5. La forza della carica impreſſa dalla punta ſteſſa nel quadro, tanto entro, come oltre i limiti dell' iſo-

lamento, ha proporzionale diminuzione di ſcintilla tratta dal tubo nell' atto che ſi fa quella carica.

Colla progreſſione, che ſi allontana il quadro, ſcema la forza della carica impreſſa (*Ser.* 3. *n.* 3, 4, 5); e nella ſteſſa progreſſione creſce la frequenza e la vivacità della ſcintilla (*Ser.* 3. *n.* 9).

6. Viceverſa la punta oppoſta alla vitrea elettricità continua ad indurre nel ſuo quadro qualche forza di carica fino alla diſtanza di nove decime dell' iſolamento del tubo, e quando l'armatura del quadro è poco meno di tre decime fuori de' limiti dell' iſolamento.

Ai nove pollici è ancor ſenſibile nel quadro la forza di ſcuotere (*Ser.* 4. *n.* 2), e l' iſolamento è dieci.

Per dichiarazione dell' ultima parte non ſi ha, che aggiugnere ai nove altri pollici tre e linee nove, che ſono poco meno di tre decime fuori de' limiti dell' iſolamento.

7. E la carica impreſſa arriva alla metà della piena ſua forza, quando la punta è diſtante dal tubo tre quinti dell' iſolamento, e quando l' armatura è ancor di poco inoltrata entro que' limiti.

Si ha la metà della carica a pollici ſei della punta (*Ser.* 4. *n.* 3), che ſono tre quinti dell' iſolamento dieci. Ma l' armatura è più in dietro per tutta la lunghezza della punta, che è pollici tre linee nove. Dunque in tal atto l' armatura è appena inoltrata di tre linee ne' limiti dell' iſolamento.

8. E qui pure nell' atto che ſi fa la carica ſi ſcorge la ſcintilla nel tubo diminuita in proporzione dell' aumento della carica ſteſſa.

Si prova dal numero 4 e 6 della quarta Serie col raziocinio ſimile a quello del Corollario quinto, ſe non che qui a diſtanze eguali a quelle del Corollario quinto la carica è alquanto maggiore, e in proporzione minore la ſcintilla. Fuori poi de' limiti dell' iſolamento, come niuna è la carica, così niuna è la diminuzione della ſcintilla.

INTRODUZIONE

Alla teoria delle punte negli elettrici fenomeni.

NOn altro avendo io riconoſciuto colla privata meditazione de' fenomeni delle elettriche punte deſcritte dai celebri Fiſici, che ſul bel principio accennai, ſe non anguſtie d' inveſtigazione, anche ne' più grandioſi apparati, e figlia di quelle la confuſione e la contraddizione, quanto fatte per eccitare meraviglia e ſorpreſa, altrettanto inette per iſtruire; mi propoſi di riſolvere tutti i poſſibili fenomeni delle punte ciaſcuno ne' ſuoi diſtinti elementi, e di ridurre ciaſcun elemento a miſure e proporzioni, quanto più ſi poteſſero, preciſe. Trovai a queſti oggetti inſufficiente l' uſo degli elettrometri anche più delicati, come altrove dimoſtrerò; e fui per le diſaſtroſe e lunghe vie dell' analiſi condotto in fine a nuove e luminoſe ſperienze, che ho diſtribuite in tre parti. Formano la prima quelle quattro Serie di ſperienze co' Corollarj ſin qui propoſti, e co' ſeguenti Teoremi. Comprende la ſeconda parte altra Serie di ſperienze con punte oppoſte a punte, e ſuperficie a ſuperficie, ne' Corollarj e Teoremi delle quali ſaranno vie più confermate le verità ſtabilite nella prima parte; e compariranno alfine sfatati il pennello, la ſtelletta, e ſimili apparenze di elettrica luce. Abbraccia la terza parte le combinazioni delle punte e delle ſuperficie procedenti dalle oppoſte facce di bocce o quadri caricati di elettricità, le quali ſecondo l' uſo noſtro poſſono maneggiarſi con tale eſpreſſione che fanno dai veri fonti, e naturalmente ſcorrere tutte le novità con ſingolare diligenza deſcritte da *Franklin*, da *Bergman* (*), da *Barbier* de *Tinan*, e da *Naime*.

Ripigliando frattanto il filo della prima parte oſſerverò, che non per altra ragione io arrivai a dedurre chiare e diſtinte proporzioni in una materia, quanto ribadita, altrettanto confuſa, e perciò riputata alieniſſima dalla matematica preciſione, e dal calcolo, ſe non perchè raccolſi in quel quadro verticale l' elettricità del conduttore, e la riduſſi non meno nella ſcintilla, che nella ſcoſſa agli eſtremi e ai termini ſenſibili colle indicate diſtanze. E qui benchè io ſia alieniſſimo dalla novità di nomi, co' quali ſogliono alcuni abbacinare il volgo, e rarefare i più ſemplici principj delle ſcienze, fui non oſtante coſtretto a diſtinguere le precedenti Serie di ſperienze ciaſcuna col proprio nome per non involgere i miei lettori e me ſteſſo in un labirinto di vani paradoſſi, che ſorgono inevitabili qualunque volta ſotto l' ambiguità di nomi celiamo un continuo cambio di mezzo termine, ed in vece di ſeguir fedelmente l' ingenuità de' fenomeni vogliamo a bello ſtudio deviare dalla diſtinzione delle idee e de' vocaboli che le eſprimono.

Sarebbe dopo ciò più la noja che l' utile, ſe voleſſi qui trattenermi nel racconto delle varie combinazioni, e de' replicati tentativi, per mezzo de' quali fui condotto a quelle ſperienze luminoſe. Gioverà piuttoſto avvertire, che avendo provato le Serie ſteſſe con varietà d' apparato, d' iſolamento, e di elettricità, trovai in ogni Serie proporzionali le diſtanze e gli effetti; ed ho preſcelte queſte proporzioni delle diſtanze e degli effetti,

---

(*) Le ſperienze di *Bergman* quanto ſono più belle, tanto meno ſono conoſciute. Le riporterò qui colle ſteſſe ſue parole: *Apices poſitivi ſtant, & negativi quoque; quod ad oculum monſtrari poteſt, phoſphoro illito. Nam vapores alias vage e corpore non electriſato ſurgentes, inſtar caudæ cometæ tam poſitivi quam negativi ad magnam diſtantiam ejectant. Difficulter cum privatione, rarefactione, & adfluxu fluidi electrici conciliari poſſunt phænomena allata.* Nelle Tranſazioni Filoſofiche di Londra Vol. 54 ann. 1764 pag. 87.

come le medie, e più coſtanti, dopo averle ripetute non meno di ſei volte in ciaſcun atto e termine loro.

E ſiccome le prime Serie mi hanno preſentato facili e chiari i Corollarj precedenti; così colla combinazione di queſti fra loro e colle ſteſſe ſperienze mi vedo naſcere inaſpettati Teoremi, che comincierò ad eſporre coll' ordine più naturale.

TEOREMA I.

La punta di reſinoſa elettricità induce nell' oppoſto quadro la ſua carica con forza per lo meno quadrupla, che non la punta di vitrea elettricità.

Nella reſinoſa la carica ancor piena è alla diſtanza di quattro pollici, che ſono pur quattro entro l' iſolamento, nè arriva ſotto alla metà, che agli otto, limite dell' iſolamento (*Ser.* 1. *n.* 3, 8); e l' ultimo termine della carica è ai quattordici pollici, che ſono tre quarti fuori del limite dell' iſolamento (*Ser.* 2. *Cor.* 4).

Nella vitrea non è piena la carica, che ſotto ai due pollici, che ſono piedi otto dentro l' iſolamento (*Ser.* 3. *n.* 1, 2, 7); a' ſei pollici è gia molto meno di metà, benchè ſia ancor quattro entro l' iſolamento (*ivi n.* 3); e l' ultimo termine è ai dodici pollici (*ivi n.* 4), che ſono un quinto fuori del limite dell' iſolamento, nel qual limite, come colla reſinoſa era la carica poco meno di metà, così qui non è, ſe non proſſima all' ultimo decadimento (*ivi n.* 4).

Calcoliamo queſte proporzioni, che ſono
nella piena carica in diſtanza di pollici -- 4 : 2
entro l' iſolamento ſono pollici - - - - - 4 : 8
Ma ſiccome l' iſolamento fu aumento
maggiore di forza, così dovrà inver-

terſi (*) la ſeconda ragione, e ſaranno
perciò comparandole, come - - - - - - 32 : 8
Similmente verſo la metà della carica
ſono le diſtanze pollici - - - - - - - - 8 : 6
Entro l' iſolamento pollici - - - - - - - - 0 : 4
Invertendo i termini dell' iſolamento ſono come - - - - - - - - - - - - - - - 32 : 6
L' ultimo termine della ſcoſſa ſono pollici quattordici ai dodici, che ſono
come pollici - - - - - - - - - - - - - - - - 7 : 6
Fuori dell' iſolamento ſono $\frac{3}{5} : \frac{1}{5} = \frac{15}{4}$
come - - - - - - - - - - - - - - - - - - - 15 : 4
E perciò compongono la ragione, come 105 : 24

Ai confini dell' iſolamento, ove non rimane che la ſemplice ragione della forza di carica, è queſta nella prima poco meno di metà, nella ſeconda è proſſima all' ultimo decadimento.

Ora tanto in queſta ultima ſemplice, come nelle antecedenti proporzioni, preſe ſolitarie, o ſommate (**), è in alcuna fino a quintupla, non è mai in veruna meno di quadrupla quella forza, come abbiamo propoſto.

TEOREMA

(*) Eſſendo che l'iſolamento maggiore corriſponde alla minor diſtanza del quadro dalla punta: e quella fa creſcere, come la maggior diſtanza fa ſcemare la carica impreſſa nel quadro; perciò nel miſurare la forza, che la imprime, aſſumo la funzione dell' iſolamento in ragione ſemplice inverſa dentro i limiti, e diretta fuori di que' limiti, benchè ſia forſe in ragione maggiore, che non ſono quelle ſemplici miſure. Per un Matematico che bramaſſe d' inveſtigare la funzione degl' iſolamenti vi ſono dati ſufficienti nelle Serie di ſperienze.

(**) Come ſi tratta di gradi, o varietà corriſpondenti di effetti ſimili, le ragioni devono comporſi ſommando: quando poi ſi conſiderano diverſi elementi, che concorrono a compire un effetto ſolo, come le diſtanze, e gl'iſolamenti in ciaſcun termine della forza della carica, devono comporſi moltiplicando.

TEOREMA II.

La punta di reſinoſa elettricità unita ad un conduttore diſperde l'elettricità raccolta o accorrente di continuo nello ſteſſo con forza per lo meno decupla della punta di vitrea elettricità.

L'elettricità non eſtinta, nè diſperſa dalla punta, che parte da un conduttore, ſi riconoſce colla frequenza e colla vivacità delle ſcintille che a quello ſi traggono.

Ora quando al conduttore non fu unita la punta, le ſcintille di reſinoſa elettricità comparvero più rapide e vivaci, che quelle della vitrea.

Colla punta unita al conduttore nell'una e nell'altra ſpecie di elettricità fu tanto notabile la differenza, che poſto nella vitrea il quadro vicino alla punta più d'un pollice e mezzo e fin verſo ad un pollice, ſi ebbero ancora dal tubo conduttore aſſai meno fiacche le ſcintille, che non lo furono colla reſinoſa poſto il quadro al di là dei quattordici pollici (*Ser. 3. n. 8*).

Se ſi voleſſe anche qui comporre la ragione delle diſtanze con quella degl'iſolamenti, riſulterebbe di lunga mano maggiore la vera ſuperiorità di forza diſperdente della reſinoſa in confronto della vitrea elettricità. Ma laſcieremo a que' pochi, che ſanno riconoſcere ne' ſiſici fenomeni la preciſione matematica, il piacere di rintracciarla, e di convincerſene da per ſe ſteſſi; e dall'immediata ragione dell'indebolimento di ſcintille, e dalle diſtanze di quattordici pollici a meno di uno e mezzo, concluderemo frattanto eſſere nella reſinoſa elettricità la diſperſione per lo meno decupla, che nella vitrea, come abbiamo propoſto.

TEOREMA III.

La punta di reſinoſa elettricità ſpinge la ſua ſpecie raccolta e accorrente da un conduttore iſolato contro uno ſtrato reſiſtente oppoſto 1. fuori de' limiti dell' iſolamento con forza preſſochè quadrupla, che non la punta di vitrea elettricità. 2. dentro i limiti dell' iſolamento con forza non meno di dupla della punta di vitrea elettricità.

1. Quella ne' limiti dell' iſolamento induce nel quadro forza di carica tanto notabile, che è verſo la metà (*Ser.* 2. *Cor.* 3), e ſegue ad indurla ſenſibile anche a tre quarti al di là di que' limiti (*ivi Cor.* 4).

Queſta non induce che tenue forza, quando il quadro è verſo i limiti dell' iſolamento (*Ser.* 4. *Cor.* 3), e non arriva ad indurne ſe non l' ultimo grado ſenſibile al di là d' un quinto di que' limiti (*ivi Cor.* 4).

Ora paragonandoſi la metà della carica con picciolisſima forza della ſteſſa può prenderſi con ſicurezza non meno di quadrupla di queſta; e così ne' limiti dell' iſolamento ſarà la forza impreſſa in ragione di 4 : 1.

Al di là de' limiti l' ultima carica ſenſibile è nella prima oltre i tre quarti, nella ſeconda ad un quinto appena. Ridotta la ragione di $\frac{3}{4} : \frac{1}{5}$ riſulta ſimilmente per lo meno come 15 : 4, cioè preſſochè quadrupla, come ſi è propoſto.

2. Dentro i limiti dell' iſolamento quella fa piena carica ſino ai quattro pollici (*Ser.* 1. *n.* 1), la quale ſoltanto a' ſei è alquanto ſcemata (*ivi n.* 2), agli otto, ch' è l' ultimo confine dell' iſolamento, è appena ſotto la metà (*ivi n.* 3).

Queſta ai due pollici è appena carica piena (*Ser.* 3. *n.* 1), ai tre già ſcema, ed ai quattro è già verſo la metà (*ivi n.* 2), a' ſei è di molto ſotto la metà (*ivi* *n.* 3), ai dieci, ch'è l'ultimo confine dell'iſolamento, è vicina all'ultimo grado ſenſibile (*ivi n.* 4).

Raccogliendo queſte proporzioni di ſemplici diſtanze, ſono

Piena carica come - - - - - - - - - - - - -	4 : 2
Prima diminuzione di carica come - - - -	6 : 3
Verſo la metà per lo meno come - - - -	8 : 4

le quali ſono tutte di ragion dupla.

OSSERVAZIONE.

Abbiamo anche in queſto Teorema calcolate le ſemplici ragioni delle diſtanze, tanto dentro, come fuori de' limiti dell'iſolamento; e non la ragione compoſta, come nel primo Teorema. Se ci piaccia di calcolarla, riſulterà in queſto, come in quello, non ſolo più di quadrupla, ma ancora più di ſeſtupla. Eccone il calcolo

Piena carica - - -	4 : 2	Prima diminuzione di carica -	6 : 3	Verſo la metà -	8 : 4
Entro l'iſolamento - -	4 : 8	- - - - - - - -	2 : 7	- - - -	0 : 6
moltiplicate	32 : 8	- - - - - - - -	42 : 6	- - - -	48 : 4
invertendo	42 : 6				
la ſeconda	48 : 4				
Sommate - -	122 : 18				

COROLLARIO.

Sarebbe la ragione poco meno di ſettupla

Volli ridurre gl'iſolamenti a miſura comune per via delle frazioni ſeguenti

Piena carica $\frac{1}{2}:\frac{4}{5}$. Prima diminuzione $\frac{1}{4}:\frac{7}{10}$. Metà dì carica 0: e perciò ſi traſcura queſt'ultima ragione, e ſi compongono colle diſtanze le due prime ſoltanto.

Ridotte adunque le ſteſſe frazioni ſono

Piena carica -	5 : 8	Prima diminuzione -	10 : 28
Diſtanze corriſpondenti ---	4 : 2	-------------	6 : 3
Invertendo gl' iſolamenti	32 : 10	-------------	168 : 30
	168 : 30		
I prodotti ſommati ſono	200 : 40		

COROLLARIO.

Sarebbe la ragione quintupla.

TEOREMA IV.

L' armatura oppoſta alla punta di reſinoſa elettricità continua a raccogliere (*) nel quadro 1. al di là de' limiti dell' iſolamento la carica in proporzione tanto maggiore dell' armatura oppoſta alla punta di vitrea elettricità come 15 : 4. e 2. dentro i limiti dell' iſolamento quella raccoglie la forza della carica con proporzione tanto maggiore dell' armatura oppoſta alla vitrea elettricità, quanto lo è la piena forza della carica a poco più della metà, o come la metà di carica al grado proſſimo all' ultimo della forza di ſcuotere.

1. L' ultimo grado ſenſibile di ſcoſſa in quella è ai tre quarti fuori de' limiti dell' iſolamento (*Ser.* 2. *Cor.* 3), in queſta non oltrepaſſa un quinto fuori dell' iſolamento

---

(*) Queſto termine di *raccogliere* non ſi prenda in equivoco, quaſichè foſſe l' elettricità emanante, o ſparſa dal conduttore; ma s' intenda di raccogliere l' elettricità, che intorno all' eſtenſione dell' armatura ſteſſa viene ſmoſſa, o ſciolta da quella del conduttore per azione della punta, e per la via del continuo mezzo frappoſto.

(*Ser.* 4. *Cor.* 4); onde ridotte queſte ragioni ſono, ſecondo che ſi è propoſto nella prima parte, come 15 : 4.

2. Nell' armatura oppoſta alla punta di reſinoſa elettricità, entro i limiti dell' iſolamento vi è piena carica ai quattro pollici, ch' è la metà dell' iſolamento (*Ser.* 1. *n.* 1), ed è ancor vicina la metà ai pollici otto (*Ser.* 1. *n.* 3), ch' è l' ultimo confine dell' iſolamento.

Nell' armatura oppoſta alla punta di vitrea elettricità la carica è verſo la metà tra i pollici quattro e i ſei (*Ser.* 3. *n.* 2, 3), e così può prenderſi più della metà ai cinque pollici, che ſono la metà del ſuo iſolamento. Ai dieci pollici, che è il confine di queſto iſolamento, la carica è proſſima all' ultimo grado (*Ser.* 3. *n.* 4).

Ritenendoſi adunque i termini comuni delle diſtanze di metà, e de' limiti degl' iſolamenti riſulta in ambedue la proporzione propoſta nella ſeconda parte (*).

TEOREMA V.

Viceverſa la punta oppoſta alla reſinoſa elettricità, conſiderate le ſole diſtanze, induce la carica nel quadro, da cui parte, con forza per lo meno ſubtripla della punta oppoſta alla vitrea elettricità.

Alla diſtanza d' un pollice dal conduttore quella fa piena la carica (*Ser.* 2. *n.* 6), nè reſta vicina alla metà di carica oltre alla diſtanza di due pollici (*ivi n.* 5), nè principia la carica ſenſibile prima di tre (*ivi n.* 3).

Queſta comincia la carica ben ſenſibile ai nove pollici (*Ser.* 4. *n.* 2), ai ſei è vicina alla metà (*ivi n.* 3), ai tre è piena la carica (*ivi n.* 4).

(*) Ho ſtimato di ſervirmi di queſte proporzioni di fenomeni, che eſprimono una funzione da inveſtigarſi; dell' andamento però della quale abbiamo idea molto ſenſibile, e reale, benchè non determinata in numeri.

Abbiamo dunque le diſtanze per la prima
carica - - - - - - - - - - - - - - - - - - = 1 : 3
per la metà di carica - - - - - - - - - - = 2 : 6
per principio ſenſibile - - - - - - - - - - = 3 : 9

Le quali o ſommate, o preſe diſtintamente, anche ſenza comporle coll' altra funzione degl' iſolamenti, che le renderebbero aſſai minori, danno la propoſta ragione per lo meno ſubtripla.

OSSERVAZIONE.

Se ſi vuole introdurre la funzione degl' iſolamenti, eccone il calcolo:

Piena carica -	1 : 3	Metà	2 : 6	Principio ſenſ.	3 : 9
Diſtanze corriſpond. entro l'iſolamento -	7 : 7		6 : 4		5 : 1
Moltiplicate	7 : 21		8 : 36		3 : 45
invertendo	8 : 36				
queſt' ultima	3 : 45				
Sommate	18 : 102				

COROLLARIO.

Sarebbe la ragione anche meno di ſubquintupla.

Provai anche la riduzione degl' iſolamenti a comune miſura, come nel ſeguente calcolo

Piena carica - - -	1: 3	Metà	2: 6	Princ. ſenſ.	3: 9
Frazioni corriſpondenti - - - - -	7: 7		3: 2		5: 1
	8: 10		4: 5		8: 10
Ridotte - - - - - -	70: 56		15: 8		50: 8
Moltiplicate colla	56:210		16:90		24:450
prima ragione in-	16: 90				
vertendo i termini	24:450				
di queſta, e in	——				
fine ſommate ſono	96:750				

COROLLARIO.

Sarebbe la ragione anche meno di ſubſettupla.

TEOREMA VI.

La punta, oppoſta alla reſinoſa elettricità, ſcema l'elettricità del conduttore, a cui ſi preſenta con forza minore di ſubdupla della punta oppoſta alla vitrea.

Colla punta oppoſta alla reſinoſa elettricità continuò la ſcintilla dal conduttore in tutta la ſua forza, finchè quella punta non ſi accoſtò più di quattro pollici; e ſeguitò aſſai viva ai tre, e perfino al di là dei due pollici (*Ser.* 2. *n.* 8).

Colla oppoſta alla vitrea non fu mai piena la ſcintilla, che ritirata la punta al di là dei dieci pollici; agli otto era bene inferiore alla piena ſua forza; ai quattro ancor più tarda e debole (*Ser.* 3. *n.* 9. *Ser.* 4. *n.* 8).

Sono dunque per lo meno le diſtanze di

piena ſcintilla - - - - - - - - - - - come	4 : 10
di prima diminuzione - - - - - - - - - -	3 : 8
di maggior diminuzione - - - - - - - - -	2 : 4
	9 : 24

Le quali o ſommate, o diſtinte dimoſtrano molto minore di ſubdupla la propoſta ragione.

TEOREMA VII.

La punta oppoſta alla reſinoſa elettricità 1. fuori de' limiti dell'iſolamento non induce alcun cenno di elettricità nell'armatura, o conduttore, da cui parte, mentre la punta oppoſta alla vitrea ne induce i primi ſegni; 2. e dentro que' limiti non ha forza d'indurre la carica ſe non tanto minore della punta oppoſta alla vitrea, quanto lo è il primo grado di carica ſenſibile alla piena forza della carica.

Quella fino ai quattro pollici non dà ſegni coſtanti nel ſuo quadro (*Ser.* 2. *n.* 3); comincia picciolisſima carica ai tre (*ivi n.* 4); ai due è meno di metà (*ivi n.* 5); e la prima carica è meno d' un pollice (*ivi n.* 6).

Queſta ai limiti comincia moti (*Ser.* 4. *n.* 1); ai nove pollici già è ſenſibile carica (*ivi n.* 2); a' ſei ben vicina alla metà (*ivi n.* 3.); ai quattro è di molto ſopra la metà (*ivi n.* 4); al di là dei tre è di piena forza (*ivi n.* 5).

Riduciamo in una tavola queſte ragioni:

Dalla punta oppoſta alla reſinoſa elettricità alla punta oppoſta alla vitrea

diſtanze pollici	10	- - - - - - - - o	ai primi ſegni
	9	- - - - - - - - o	carica ſenſibile
	6	- - - - - - - - o	carica verſo la metà
	4	primi ſegni :	carica ſopra la metà
	3.	carica ſenſibile :	piena carica
	2.	carica meno di metà	carica ridondante
	1.	piena carica	

Dalla ſemplice eſpoſizione di queſte ragioni è manifeſta la prima parte; e alla diſtanza di pollici tre ſi riconoſce in termini la proporzione fiſſata nella ſeconda parte (*).

TEOREMA VIII.

L' armatura, da cui parte la punta oppoſta alla reſinoſa elettricità nello sforzo, o capacità di ricevere ſegni, o carica elettrica, ſta all' armatura, da cui parte la punta oppoſta

---

(*) E qui pure eſprimiamo ſenza numeri queſte ragioni, perchè comprendono quella ragione compoſta, che laſciamo da inveſtigare ai Matematici; la quale frattanto porge a noi idea ben reale della vera efficacia delle ſpecie di elettricità.

oppoſta alla vitrea ſuori de' limiti dell'iſolamento, 1. come zero alla metà della carica. 2. e dentro que' limiti quella ſta a queſta, come ſono i primi ſegni di elettricità a più di metà della carica, ovvero come lo è meno di metà alla carica piena.

Abbiamo nel Teorema quinto fiſſate le proporzioni delle punte oppoſte alla reſinoſa elettricità, ed alla vitrea colla ſemplice conſiderazione delle diſtanze loro dal conduttore: e nel precedente Teorema ſettimo abbiamo conſiderate le diſtanze ſteſſe in riguardo ai limiti dell'iſolamento. Non ci reſta qui che di paragonare le diſtanze dal conduttore delle armature, dalle quali partono quelle punte tanto fuori, come entro i limiti dell'iſolamento. Per queſto fine a ciaſcuna delle diſtanze della tavola precedente aggiugneremo pollici tre e linee nove, che ſono la lunghezza del filo della punta ſteſſa fiſſato ſu quelle armature.

Armatura oppoſta alla reſinoſa ſta all'armatura oppoſta alla vitrea elettricità

Diſt. pollici	13.	lin. 9	0.	primi ſegni
	12.	9	0.	carica ſenſibile
	9.	9	0.	verſo la metà di carica
	7.	9	primi ſegni	molto ſopra la metà
	6.	9	carica ſenſibile	piena carica
Segg. diſt.pol.	5.	lin. 9	carica meno di metà	carica ridondante
	4.	9	carica piena	

E richiamando in mente, che l'iſolamento nella reſinoſa è di pollici otto, e nella vitrea di dieci, dedurremo dalla precedente le ſeguenti proporzioni.

1. Quella oltre i limiti dell'iſolamento, e ne' limiti non dà ſegni, nè carica, queſta dà i primi ſegni quando è ancor fuori dell'iſolamento pollici tre linee nove; preſenta la prima carica ſenſibile ancor fuori di que' limiti pollici due linee nove; e porta la carica verſo la

metà quando è ancor fuori di que' limiti linee tre: onde riſulta la proporzione fiſſata nella prima parte, come zero alla metà della carica.

2. L'armatura oppoſta alla reſinoſa ſta all'armatura oppoſta alla vitrea elettricità entro i limiti dell'iſolamento

Diſtanze lin. 3.	primi ſegni di elettricità	carica molto ſopra la metà
lin. 15.	prima carica ſenſibile	
27.	carica ancor meno di metà:	piena carica
39.	piena carica - - - - - - :	carica ridond.^{te}

Onde alle diſtanze di linee tre, e di linee quindici entro i limiti dell'iſolamento abbiamo la proporzione in primo luogo fiſſata nella ſeconda parte; ed abbiamo l'altra in termini alla diſtanza di linee ventiſette.

OSSERVAZIONE.

Con queſti primi Teoremi la cauſa d'ogni elettrica teoria, fin qui agitata fra le ipoteſi e le ſcolaſtiche forme, io la produco al tribunale de' Matematici, che ſono in fine i veri giudici dell'evidenza; e conſegnandola nelle mani loro io ne rimetto a' medeſimi la cognizione e la ſentenza. Prima dunque di paſſar oltre a ſvolgere i diſtinti elementi delle elettriche punte, i quali non poſſono far meno di non guidarci a' veri fonti della teoria, da cui derivano, gioverà raccogliere in una tavola, e rappreſentare in un colpo d'occhio le diſtinte proporzioni di queſti fondamentali Teoremi, per dedurne con maggior ſicurezza, e comprenderne con più facilità le conſeguenze.

COROLLARIO.

La punta di reſinoſa elettricità ſta alla punta di elettricità vitrea,

1. Nella forza d'imprimere la carica in ragione per lo meno quadrupla.

2. Nel diſperdere l'elettricità raccolta in ragione decupla.

3. Fuori de' limiti dell'iſolamento per imprimere carica ha forza quadrupla, entro que' limiti non meno di dupla.

4. L'armatura oppoſta alla punta di reſinoſa elettricità ſta all'armatura oppoſta alla punta di elettricità vitrea nel raccogliere la carica,

fuori de' limiti dell'iſolamento, come 15 : 4.

entro que' limiti, come la piena carica alla ſua metà, ovvero come la metà di carica al grado proſſimo all' ultima ſcoſſa ſenſibile.

5. La punta oppoſta alla reſinoſa elettricità ſta alla punta oppoſta alla vitrea nella forza d'indurre carica in ragione ſubtripla.

6. Per diſperdere, o ſcemare l'elettricità del conduttore in ragione ſubdupla.

7. Per indurre elettricità fino ai limiti dell'iſolamento, ſiccome zero a' primi ſegni.

Entro que' limiti, come il primo grado di carica alla carica piena.

8. L'armatura, da cui parte la punta oppoſta alla vitrea nel raccogliere la carica fuori de' limiti dell'iſolamento, come zero alla metà della carica.

Entro que' limiti, come meno di metà alla carica piena.

TEOREMA IX.

L'iſolamento, o mezzo reſiſtente influiſce ne' fenomeni delle elettriche punte, 1. Come recipiente, e quaſi vaſo contenente l'una ſempre a fronte dell'altra le due ſpecie d'elettricità. 2. Come oſtacolo frappoſto da ſuperarſi dalle medeſime nel compiere la loro unione. 3. Ma qualſivoglia conſiderazione del mezzo è per ſe ſola inſufficiente per adeguare la ſpiegazione di que' fenomeni.

1. L'iſolamento, e mezzo reſiſtente altro non è, che l'oſtacolo frappoſto a qualſivoglia ſpecie di elettricità raccolta o accorrente, che tende a riunirſi coll'oppoſta ſpecie ſmoſſa attraverſo del mezzo ſteſſo, o raccolta nelle ſuperficie conduttrici eſteſe in tutto o in parte dagli eſteriori limiti del mezzo, o ſtrato iſolante.

(*a*) Dopo le luminoſe oſſervazioni del celebre *Epino* non è più permeſſo di chiamare effuſione di elettricità la sfera di elettrica azione attraverſo i mezzi reſiſtenti. Le piane, o cilindriche, o sferoidali ſuperficie d'un conduttore elettrico ſono come l'armatura interiore d'una boccia Leidenſe; l'aria ambiente co' corpi iſolanti, che ſoſtengono quel conduttore, ſono come la ſoſtanza del vetro della boccia ſteſſa; e i corpi non iſolanti intorno all'eſteriore limite dell'aria ambiente ſono come l'eſteriore armatura della boccia.

(*b*) A norma di queſte idee l'interiore ſuperficie del mezzo reſiſtente (*), che circonda un conduttore elettrico, può conſiderarſi (quaſi come in Idraulica ſi conſidera la capacità d'un vaſo per contenere i liquidi) come la capacità ſteſſa di contenere l'elettricità raccolta, o concorrente in quel conduttore. Colla differenza però, che in Idraulica quella capacità corriſponde alla cavità del vaſo o recipiente; qui in vece non ſono le ſole miſure della ſuperficie ambiente che determinano quella capacità, ma ſotto le ſteſſe miſure queſta ſoggiace a leggi di capacità da quelle aſſai diverſe. E primieramente deve conſiderarſi la forza propria della elettricità ſteſſa raccolta; la qual forza, per inſiſtere ſulla premeſſa

---

(*) Sia il mezzo ſolido, o fluido; ſia uniforme, e di una ſola ſoſtanza, come nelle bocce, e ne' quadri, ovvero di ſoſtanze diverſe, come intorno a' conduttori ſoſtenuti da corpi ſolidi, cioè ſete, reſine, o vetri, e nel reſto circondati dall'aria.

ſimilitudine, corriſponderebbe alla ſpecifica gravità de' varj liquidi. Inoltre ſi deve tener conto della mobilità della ſpecie oppoſta di elettricità, che attraverſo del mezzo ſteſſo deve ſmuoverſi. In terzo luogo viene da conſiderarſi la fluidità, o fiſſità delle parti del mezzo ſteſſo, nel che conſiſte la differenza de' mezzi ſolidi o fluidi. Poichè ſebbene in ſoſtanza nulla monti per l'iſolamento la ſolidità, o fluidità; pure i fluidi per la mobilità delle loro particelle ſono dalla elettricità ſteſſa agitati con moto inteſtino non meno delle proprie parti, che de' corpicciuoli eſtranei fra quelle innatanti, che ſi rende viſibile qualora ſono inveſtiti dalla luce d' un raggio ſolare; e con tale moto ſi facilita l'inſenſibile e continua riunione delle oppoſte elettricità in proporzione che vengono ſmoſſe, o raccolte. Creſce infine quella capacità ſecondo la facilità, colla quale il mezzo, o ſtrato reſiſtente ſi preſta a ritener vicine in maggior copia, ſenza però che attraverſo di quello poſſano mai riunirſi, le due oppoſte elettricità, come ne' ſottili ſtrati di vetro abilitati a tale effetto con le armature eſterne non iſolate (*). Poichè l'uffizio del mezzo non è, che di reſiſtere all'unione delle oppoſte elettricità, ma non mai d'impedire la tendenza mutua a tale unione. Che anzi quella tendenza incontra nel frappoſto mezzo capacità di eſercitarſi; e in tale eſercizio conſiſte l' ammaſſamento delle oppoſte elettricità nelle bocce, ne' quadri, e nelle elettriche batterie.

(*c*) Quindi è, che le oppoſte elettricità non poſſono mai conſiderarſi ſolitarie, e intieramente diſgiunte l'una dall' altra. Non può una ſcioglierſi, che non reſti

---

(*) Vi è un'altra maniera di accreſcere la capacità de' conduttori, oſſervata da Gordon, e Monnier, dalla quale io ho dedotto altrove (*Phyſ. Spec. art.* 5.) la coſtruzione di paradoſſi elettrici a ſomiglianza de' veri paradoſſi idroſtatici.

ſciolta inſieme l'altra; nè può ciaſcuna adunarſi, o raccoglierſi, ſenza che ſi ſmuova, o ſi raccolga intorno l'oppoſta ſpecie. Ma lo ſmovimento o ſcioglimento di elettricità nel mezzo reſiſtente non è mai dell'omologa a quella del conduttore movente. Poichè queſta omologa reſta libera e ſciolta ſoltanto indirettamente; ond'è, che ne' conduttori frappoſti, o immerſi in tal atto nel mezzo ſteſſo, ſi raccoglie e ſi porta l'omologa in fuori, e la oppoſta in dentro, cioè verſo il confine della elettricità movente; come riſulta dalle più eſatte ſperienze de' moti elettrici, e ſi riconoſce direttamente nelle oppoſte armature iſolate d'una boccia, o d'un quadro mentre ſi carica.

(*d*) Ora come il modo e la ſpecie e la quantità di tali elettriche ſoluzioni interamente deriva dalla ſpecie e quantità raccolta nel conduttore; così la figura e l'andamento delle ſoluzioni medeſime ne' ſucceſſivi ſtrati del mezzo ambiente dalla ſola figura di quel conduttore pienamente ſi regge, e ſi determina. Se tale figura ſia piana, ovvero di cilindrica, o sferoidale curvatura uniforme, non può non eſſere ſimilmente uniforme, ed equabilmente diſtribuito lo sforzo dell' elettricità muovente contro tutti i ſucceſſivi punti del mezzo ambiente; e perciò reſtano le elettricità ſciolte ſucceſſivamente a onde, o ſtrati uniformi in tutta la maſſa del mezzo a ſeconda di quella prima figura. Talchè le varie onde o ſtrati delle elettricità ſmoſſe nelle ſucceſſive diſtanze uguali dalla ſuperficie del conduttore rappreſentano come altrettanti indumenti o coperte della ſuperficie ſteſſa, che vanno attenuandoſi nelle ſucceſſive diſtanze, e ſono uniformi ſoltanto in ciaſcuna. Si può in queſto ſenſo dire, che ſi diffonde e propaga queſta elettrica azione quaſi per raggi divergenti dal conduttore, come diciamo del calore, e della luce, che ſi propagano intorno ne' mezzi uniformi quaſi in una sfera procedente dal corpo infuocato, o lucido, come da centro. E per ſeguitare in queſte idee non ancora abbaſtanza note e familiari a ſollevare l' intelletto colle ſimilitudini di coſe già ben inteſe, dirò, che tolta l' uniformità e la proporzione di lunghezza nel conduttore, ſuccede nell' andamento di quell' elettrico sforzo ciò, che ſuccede alla luce introdotta in lenti, o in mezzi più refringenti, che non più è quella ne' ſucceſſivi intervalli uguali uniformemente diffuſa, nè propagata in forma di sfera.

(*e*) Ciò che ſono le lenti in Ottica, lo ſono le punte nella elettricità. Turbano queſte l' uniforme azione delle elettricità, e le raccolgono talvolta in modo, che ſi eſercitano come per vortice, e ſimulano una effuſione. Qualora pertanto nell' armatura, o nel conduttore iſolato vi ſieno allungamenti di ſuperficie, ovvero ſpigoli, o punte, le quali altro non ſono che ſpigoli più allungati, lo sforzo della elettricità in quel conduttore raccolta converge nell' apice di tale allungamento, e ne riſulta un aumento di sforzo nella ſteſſa, che può per ſimilitudine paragonarſi alla velocità, che vien nominata *adulta* in Idraulica, colla quale i liquidi eſcono dagli anguſti fori, o lumi di vaſi molto ampj; ovvero a quell' impeto, con cui dall' eſiliſſimo becco d' una eolipila eſce il vapore, o altro fluido elaſtico. Dico *per ſimilitudine* in quanto alla ſomma dell' aumento, ma non nel modo. Poichè qui non è, come in quelle, ſemplice impeto ed effuſione, ma vera efferveſcenza ed eſploſione con infiammazione.

(*f*) Ciò che ſi è detto del conduttore, che è come l' interiore armatura del mezzo reſiſtente, s' intende con proporzione de' conduttori poſti intorno a' limiti dell' iſolamento, che ne rappreſentano l' eſteriore armatura. Se in queſta vi ſieno allungate ſuperficie, o ſpigoli, o punte, ivi ſi facilita lo ſviluppo delle oppoſte elettricità moſſo da quel conduttore, in quanto che nell' apice di quelle punte ſi raccoglie, e confluiſce l' oppoſta ſpecie (*c*), che ſenza di queſte reſterebbe uniformemente diffuſa nel limite di tutta l' eſtenſione degli eſterni conduttori (*d*). E può queſt' azione per ſimilitudine paragonarſi alla ſcintilla, che dallo ſpolverino ſi comunica a ſvolgere tutta la maſſa della polvere inchiuſa, e riſtretta in un cannone. Se non che ivi ſi fa l'eſploſione per mera eſpanſione verſo la bocca del cannone; ma qui ſuccede attraverſo lo ſtrato reſiſtente una ſubita e veementiſſima efferveſcenza, immediato effetto della riunione delle oppoſte elettricità, che per tal via viene eccitata e promoſſa con rapidiſſima progreſſione. Ed in queſta via dell' allungamento di ſuperficie conſiſte principalmente l'uſo dell' *arco conduttore* (*), col quale eccitiamo l'eſploſione delle bocce caricate. Quelle parità non ſono che per ſuſſidio dell' imaginazione; ſono ſimili in certi riguardi, e nel rimanente conducono a riconoſcerne meglio colla ſimilitudine le proprietà, e le diverſità. Il prenderle a rigore ſi chiamerebbe roveſciare le idee, e far torto alla Meccanica ed alla Chimica, non per difetto de' loro principj, ma per la chimerica applicazione.

(*g*) Così s' intende l'azione della elettricità frenata e raccolta dal mezzo reſiſtente frappoſto, e accreſciuta per la ſigura allungata o acuta non meno dell' eſterno conduttore, che delle conduttrici ſuperficie poſte intorno, o ſporgenti in dentro del mezzo iſolante.

A più chiara intelligenza deve qui notarſi il diverſo ſtato delle ſpecie di elettricità ſoltanto ſmoſſa ne' varj ſtati del mezzo, e di quelle che ſono raccolte nell' eſtenſione de' conduttori. A queſte conviene il momento di accelerazione,

---

(*) Indi accade, che la punta poſta all' eſtremità dell' arco, che ſi preſenta per cavar la ſcarica, ne accreſce per modo il momento, che indeboliſce la forza dell' eſploſione, e in certo modo la previene. Indi ſimilmente le punte procedenti da qualſivoglia conduttore ne diſperdono l'elettricità quaſi in proporzione, che in eſſo ſi raccoglie, purchè ſieno a diſtanze, ed a ſtato di mutua azione con la oppoſta ſpecie.

accelerazione, che ſpiegai, analogo all' adulta velocità, e non a quelle, finchè ſtanno fra loro in tale poſitura e diſtanza, che poſſono egualmente o ſepararſi o riunirſi l' una con l' altra a onde e ſtrati finitimi per qualunque picciola mutazione di forza movente, o accreſciuta, perchè reſtino diviſe, o diminuita, perchè tornino a riunirſi. Queſto ſtato di elettricità è ciò che io chiamo ſmovimento delle contrarie ſpecie, che coſtituiſce i primi gradi della loro ſoluzione, o ſeparazione, che ſi eſtende gradatamente minore a grandiſſime diſtanze attraverſo i mezzi reſiſtenti, ed in quello ſtato ſuſſiſtono finchè ſono come involte nella ſoſtanza de' mezzi ſteſſi reſiſtenti. Se da queſti paſſano dentro o intorno a ſoſtanze conduttrici, allora ſi raccolgono più diviſe, e ſciolte ciaſcuna nella ſua ſpecie, e ſi muovono perciò in qualche ſomiglianza come gli altri fluidi.

2. Che ſe in ſecondo luogo ſi conſideri il mezzo come ſemplice oſtacolo frappoſto alla riunione delle oppoſte elettricità, anche per la via delle punte viene quell' oſtacolo notabilmente diminuito. Poichè l' intero prodotto della reſiſtenza del mezzo conſiderato preciſamente contra tale unione non altrimenti riſulta, ſe non dalla groſſezza del mezzo ſteſſo moltiplicata per la ſua larghezza come baſe. Ora quando queſta larghezza ſi riduce all' apice d' una punta, reſta la baſe infinitamente picciola; e perciò la colonna o maſſa del mezzo reſiſtente rimane in quella proporzione minore; ed oppone conſeguentemente tanto minore oſtacolo alla riunione della elettricità. Ed in queſta diminuzione di oſtacolo, e nell' accreſciuto momento, che abbiamo qui ſopra ſpiegato, conſiſte la facilità, con cui le ſteſſe forze aſſolute, ed oppoſte ſi riuniſcono più prontamente per la via delle punte, che delle piane o sferiche ſuperficie. E qui noteremo, che mal ſi prenderebbero queſti elementi preciſamente; ma d' uopo è aver riguardo alle forze aſſolute delle elettricità, e allo ſtato di mutua loro azione, e

diſtinguere inoltre i caſi, ne' quali ſi riducono ad agire per la via delle punte le ſpecie già accumulate in copia maggiore, o minore, e le ſpecie ſteſſe, che cominciano ſoltanto, e progrediſcono ad accumularſi.

3. Sebbene però l'uno e l'altro de' ſuddetti modi influiſca nella piena azione delle punte, nondimeno nè ciaſcuno, nè l' uno e l' altro inſieme hanno ſufficienza per adeguarne i fenomeni. E primieramente quel primo aumento ſi fonda ſulle forze reali, e vere potenze eſiſtenti tanto nell' interno, che nell' eſterno conduttore, e ſuppone inoltre fra quelle forze mutua azione. Senza le quali forze, e ſenza l' azione loro vicendevole ſarebbe lo ſteſſo il conduttore negli effetti delle punte, che ſe ſi pretendeſſe in Meccanica di accreſcere il momento per la via delle macchine ſenza potenza alcuna, ovvero con applicare la potenza ſenza oppoſizione, e ſenza unità di centro del moto comune della reſiſtenza.

Nè ſimilmente può prenderſi quella diminuzione di oſtacolo proccurata dalla coſtruzione delle punte per una efficienza, o aumento di forza delle punte ſteſſe. Si riuniſcono le oppoſte elettricità con quel reſiduo dell' aſſoluta e mutua forza loro, che non reſtò diſperſa, e diſtrutta nel mezzo frappoſto. Ora queſto reſiduo non ſuſſiſte tanto maggiore, ſe non quanto per la via delle punte ſi fa minore la reſiſtenza del mezzo. Ma qui pure, come nell' antecedente, ſe ſi prende in conſiderazione il mezzo come reſiſtenza, e ſi preſcinde poi dall' aſſoluta efficacia, e coſpirazione delle elettriche forze, ſi fa lo ſteſſo, che aſſumere l' aſtratto per la realtà, e ſoſtituire l' artifizio per diminuire gli oſtacoli alla eſiſtenza, ed all' idonea applicazione delle forze naturali. Al Meccanico non baſtano le macchine, ci vogliono le forze. Come al roveſcio quando le forze non baſtano, ſi ricorre ad unire con queſte il ſuſſidio delle macchine.

Ciò poi, che ſoprattutto dimoſtra l' inſufficienza delle ſole conſiderazioni del mezzo, o iſolamento, per adeguare la ſpiegazione de' fenomeni delle punte, ſono le inſigni varietà che nelle ſteſſe circoſtanze di mezzo, e d'iſolamento, riſultano da' precedenti Corollarj, e Teoremi, della quale varietà diremo più opportunamente ne' ſeguenti.

TEOREMA X.

L' azione delle elettriche punte non è ſemplice; nè queſte conſiderate aſſolutamente per ſe ſteſſe altro preſentano, che fenomeni confuſi, e irreducibili.

(*a*) Le punte conſiderate per ſe ſteſſe altro non ſono, che una diminuzione di ſuperficie per eſemp. di una baſe di cilindro, la quale con ſuccèſſiva diminuzione ſi riduce ad apice d' un cono (*). Per dichiarare ciò adequatamente, ſupponganſi da principio due eguali baſi di cilindro a certa diſtanza oppoſte, le quali abbiano tale quantità di vicendevole azione, che ſia rappreſentata diviſa in parti eguali con un dato numero di fili paralleli fiſſati ad altrettanti punti corriſpondenti di quelle baſi. Se mentre una di queſte reſta intera, l' altra va ſucceſſivamente diminuendoſi, è manifeſto, che per far ſuſſiſtere quella prima loro azione vicendevole, ogni volta che in quella diminuzione s' incontra un punto, cui ſta fiſſo alcuno di que' fili, che ne rappreſentano le parti, dovrà queſto riportarſi fiſſo ad altro punto di quei, che reſtano nella baſe diminuita; e così continuando la diminuzione reſteranno per ultimo tutti que' fili fiſſati al ſolo apice del cono, in cui finalmente fu ridotta.

(*) E' dunque il nome di punta termine relativo, che ſignifica confronto di ſuperficie minore con altra maggiore; e però anche la sfera, e qualſivoglia ſuperficie a fronte d' una maggiore può rappreſentare una punta.

(*b*) Al contrario ſe in proporzione che fu diminuita la baſe, ſi foſſero troncati i fili, che fiſſati ne' punti di quella ne eſprimevano la intera ſomma, è altresì manifeſto, che tale azione più non ſuſſiſterebbe, ſe non per quell' unica parte, che corriſponde all' unico punto e filo reſiduo nell' apice del cono. E perciò queſto ſarà tratto a sè dalla baſe oppoſta con tanta ſuperiorità di forza, quanta è la ſomma di tutti que' fili diviſa per quell' unico.

(*c*) Riduciamo ora ambedue queſte ipoteſi alla eſtimazione de' momenti delle forze, che ſi uſa in Meccanica. Si fa, che le potenze, e le reſiſtenze, oſſia qualſivoglia genere di forze, ſi rappreſentano nelle macchine con peſi o maſſe corriſpondenti. Si fa, che due ſono le vie di rendere in equilibrio due maſſe rappreſentanti forze di qualſivoglia genere; cioè, ſe ineguali ſono le maſſe, ſi fa che dal centro del moto della macchina non deſcrivano, e non poſſano nello ſteſſo tempo non deſcrivere, che ſpazj reciprochi alle maſſe medeſime. Tolto l' uno, o l' altro di queſti modi, più non ſuſſiſte l' equilibrio; ma vi è preponderanza in ragione delle maſſe, quando eguali ſono gli ſpazj, o in ragione degli ſpazj, quando le maſſe ſono eguali, o in ragione compoſta delle maſſe, e degli ſpazj, ſe quelle e queſti ſono ineguali.

(*d*) Nella prima ipoteſi adunque ſuſſiſte l' equilibrio di azione della punta colla intera ſuperficie dell' oppoſta baſe per la ſola ragione, che colla ſucceſſiva diminuzione della prima baſe non ſi rende punto alterata la vicendevole azione coll' oppoſta; ma ciaſcun filo, che da queſta procede, va ſucceſſivamente raccogliendoſi, e concentrandoſi perfino nell' ultimo punto, a cui la prima ſi riduce. Supponendoſi ora all' uſo meccanico, che ciaſcun punto corriſpondente rappreſenti una eguale quantità di maſſa, niuno è che non veda eſpreſſa colla baſe una maſſa tanto maggiore, che non è la maſſa della punta, quanto lo è il numero de' punti diviſi per quell' unico, a cui fu ridotta la punta. Onde non rimane qui altra via di equilibrio, che la reciprocità degli ſpazj colle maſſe medeſime. E ſiccome in Meccanica la reciprocità degli ſpazj, poſto, come lo è nelle macchine, eguale il tempo, equivale alle reciproche velocità; non altrimenti ſuſſiſterà l' equilibrio della punta colla baſe intera, ſe non con altrettanta velocità nella punta ſopra la velocità della baſe, quanta è la ragione della ſomma dei fili o punti, che rappreſentano la maſſa della baſe, al filo unico, che rappreſenta la maſſa della punta.

(*e*) E queſto modo di conſiderare la vicendevole azione elettrica fra la punta e la più ampia ſuperficie oppoſta, dedotto dal meccanico principio della reciprocità degli ſpazj e delle velocità colle maſſe, non altro eſprime, ſe non che ciaſcun punto dell' oppoſta ſuperficie eſercita nello ſteſſo tempo la ſua attività contro il ſolo corriſpondente alla punta, e queſta a vicenda eſercita l' azione ſua in un ſol tempo contro ciaſcun punto della baſe; onde ne deriva eguale nella punta e nella baſe la quantità di moto, o di sforzo a muoverſi, che eſprime nella ſua eſtimazione la indicata velocità reciproca colle maſſe; nel che conſiſte il meccanico momento delle punte.

(*f*) Queſto *momento meccanico* è diverſo da quello, che ſpiegato abbiamo colla ſimilitudine della velocità *adulta*, il quale perciò potrebbe a maggior diſtinzione chiamarſi *momento idraulico*. Poichè quello procede dalla ſimultanea azione delle parti del fluido contenute nel vaſo, o nella capacità del conduttore elettrico, prementi per ogni verſo, e raccolte contro quelle parti, che eſcono dalla punta, come da un tenue foro; e qui il momento naſce preciſamente al roveſcio, cioè per l' azione della elettricità della punta non già ſpinta dall' omogeneo fluido contenuto nel conduttore, ma eſteriormente accreſciuta dalla ſimultanea e mutua azione di tante parti eguali di oppoſta elettricità, quanti ſono i punti che le eſprimono nella ſuperficie della baſe.

(*g*) Siccome però ſuſſiſterebbe quel momento primo per ſola preſſione o sforzo del fluido raccolto nel conduttore, come in vaſo, da cui parte la punta; e queſto acciocchè ſuſſiſta eſige la vicendevole azione colla elettricità dell' oppoſta ſuperficie; così non doveano l'uno coll' altro confonderſi. Maſſimamente perchè queſto meccanico momento ha luogo ſenza quel primo, come accade aſſai frequente, quando un corpicello elettrico ſenza veruna unione con altro conduttore ſi preſenta per ſe ſteſſo ad una ſuperficie più ampia inveſtita da contraria elettricità; nel qual caſo ſi eſercita la vicendevole azione loro; e ne riſulta l' attrazione, per la quantità del moto richieſta dal meccanico momento, che ora ſpiegato abbiamo. Come al contrario, da che lo ſteſſo corpicello arriva al contatto della più ampia ſuperficie, ed ivi s' inveſte della ſua elettricità, ſe ſi trovi a quella adattato in modo, che preſenti come uno ſpigolo o punta procedente dalla ſteſſa ſuperficie, allora in vigore di quell' idraulico momento, che nel precedente Teorema ſpiegai, ſarà riſpinto e ripulſo inſieme alla propria elettricità, purchè ſia queſta ſuperiore di forza alla gravità, o alla coeſione del medeſimo.

(*h*) Siamo qui ridotti ad anticipare di paſſaggio un cenno della vera cagione efficiente degli elettrici moti. Poichè dai premeſſi principj ognuno per ſe ſteſſo comprende, che ſe la maſſa rappreſentante la punta ſia mobile dovrà accoſtarſi, e indi ſcoſtarſi dalla più ampia ſuperficie con tanto eccesſo di velocità, quanto è reciprocamente l' eccesſo delle maſſe che rappreſentano le forze loro. Combinandoſi poi, e riſolvendoſi così le varie ragioni di velocità, e di maſſe, di mobilità, o immobilità col primo, o ſecondo genere di momento nel concorſo de' varj corpi inveſtiti dalle elettriche potenze, che rappreſentano la baſe, o la punta, ſi porta all' ultima evidenza, come altrove dimoſtrerò, la ragione de' moti elettrici, non meno che delle adeſioni, la quale reſtò finora involta nella più denſa caligine di vani sforzi d'ingegno.

(*i*) Proſeguendo frattanto nella propoſta materia, l'azione della punta non ſuſſiſte altrimenti per ſe ſteſſa. Poichè ſe ſi preſcinde dalla vicendevole azione permanente, e non mutata nella ſucceſſiva diminuzione della punta oppoſta alla baſe, entriamo immediatamente nella ſeconda ipoteſi (*b*); nella quale ben lungi dal ſuſſiſtere l'equilibrio colla reciprocità degli ſpazj, ci riduciamo alla ſemplice ragione delle maſſe, la quale è tanto maggiore nella baſe, che non nella punta, quanto è il numero de' fili al ſolo filo reſiduo (*b*, *c*.).

(*k*) La punta adunque per ſe ſteſſa diminuirebbe il momento delle elettriche potenze in ragione della maſſa diminuita; il che è contrario ai più noti fenomeni. Se poi ci rivolgiamo alla varietà degli effetti delle punte, che nella reſinoſa ſono di forza or quadrupla, or decupla della vitrea (*Teor.* 1, *e* 2), e della ſteſſa punta, che oppoſta all'una o all'altra ſpecie di elettricità non ha nell'una, ſe non forza or ſubdupla, or ſubtripla dell' altra (*Teor.* 5, *e* 6); ſarà fuori d'ogni dubbio, non altro ſcorgerſi nelle punte conſiderate in ſe ſteſſe, che nodi ineſtricabili.

(*l*) Ma ſe conſideriamo le punte in riguardo all'oſtacolo da ſuperarſi, cominciamo ad accreſcere l'effetto delle elettriche potenze colla diminuzione della maſſa ſteſſa oppoſta dal mezzo, come oſtacolo (*Teor.* 9. *n.* 2). Se poi ſi riguardano come un foro più anguſto d'un vaſo aſſai ampio, da cui eſce l'azione dell'elettrica potenza, ſeguono ad accreſcerne il momento, come fanno in Idraulica i liquidi, che eſcono con adulta velocità (*Teor.* 9.*e*,*f*). Se in oltre ſi aggiunga il meccanico momento, che più ſopra ſpiegato abbiamo, e ſi componga cogli antecedenti, c'inoltreremo vie più nella cognizione degli elementi diverſi, che concorrono a formare l'intera azione delle elettriche punte, ma non la compiono finora, nè ciaſcuno per ſeſteſſo, nè compoſti inſieme, come ſeguitiamo a ſpiegare ne' ſeguenti Teoremi.

TEOREMA XI.

Suſſiſtono que' confuſi, e irreducibili fenomeni, finchè ſi conſidera l'azione delle punte, come effetto d'una forza ſola procedente in qualſivoglia modo dal ſolo conduttore elettrico, da cui quelle partono, o a cui ſi preſentano.

Si richiamino qui i fenomeni, che dopo la ſeconda Serie (*Cor.* 1, *e* 2), e dopo la quarta (*Cor.* 1, *e* 2.) abbiamo ſtabilito: cioè, che la punta di reſinoſa elettricità induce carica con forza quadrupla, e diſperde la ſua ſpecie con forza ſettupla della punta oppoſta alla ſpecie medeſima; e viceverſa la punta di vitrea elettricità induce la carica con forza or minore, or d'un terzo maggiore, e diſperde la ſua ſpecie con forza ſempre minore della punta oppoſta alla ſpecie medeſima.

E ſiccome queſti fenomeni comprendono le proporzioni dell'elettrica forza procedente dal conduttore, da cui nello ſteſſo modo partono, o a cui ſi preſentano quelle punte; così eſſendo quelle proporzioni tanto diverſe non potranno ripeterſi da una forza ſola, ſenza che queſta non compariſca contraddittoria ne' ſuoi effetti, e nelle proporzioni loro, che ſono le ſole vie, che ci guidano a conoſcerne l'eſiſtenza, e l'identità, o la diverſità.

Ma rendeſi vie più manifeſta queſta contraddizione nell'ipoteſi d'una ſola forza procedente dal conduttore, da cui parte la punta, o a cui ſi preſenta, ſe ſi rivolge lo ſguardo alle proporzioni riſtrette nel Corollario univerſale de' primi otto Teoremi.

Poſte le quali io ragiono così: Se unica foſſe la forza, o un ſolo il fluido, che coſtituiſce la potenza nelle elettriche punte, poſti eguali tutti gli altri elementi, che

che concorrono a ſormare il momento, come ſono il mezzo, e l'applicazione delle punte ſteſſe, eguale e coſtante dovrebbe di neceſſità riſultare l' azione ſua tanto nell'imprimere la carica, come nel diſperdere la ſpecie raccolta, o accorrente. E qui per farmi vie meglio intendere nella novità di queſte idee ricorrerò novamente alle ſimilitudini d' idee già note e familiari nella ſcienza naturale. Quando in Idraulica ſi calcola l' effetto dell' adulta velocità, poſte le medeſime proporzioni di grandezza del vaſo, e del lume, da cui eſce il liquido, ſe queſto pure è ſempre lo ſteſſo, niuna differenza nè varietà s' incontra giammai nell'eſtimazione dell' effetto. Che ſe, mutata la ſpecie del liquido, riſultano colla identità di vaſo e di lume delle differenze di effetto, riconoſciamo queſte ſenza meno provenienti dalla diverſa maſſa, o gravità ſpecifica de' liquidi ſteſſi, e concludiamo con certezza, che per eſtimare l'intero effetto del liquido profiliente non baſta il ſolo elemento di adulta velocità, ma deve queſto comporſi coll'altro, ch' è intrinſeco ai diverſi liquidi, e corriſponde alla ſpecifica loro gravità.

Non altrimenti dobbiamo ragionare dell'azione delle elettriche punte; e perciò ſiccome, poſti eguali i precedenti elementi, che concorrono a compierne il momento, ſi preſentano tante e tanto inſigni differenze, forza è di concludere, che tali differenze provengono dall'intrinſeca diverſità di que' fluidi, ai quali corriſpondono, e che coſtituiſcono le oppoſte ſpecie di elettricità. Onde nel calcolare l'intero effetto delle elettriche punte d' uopo è aggiugnere ai precedenti elementi la ſpecifica forza di ciaſcun fluido, come in Idraulica ſi aggiugne la gravità ſpecifica di ciaſcun fluido emanante.

Nè, paragonando io la ſpecifica forza de' fluidi elettrici colla ſpecifica gravità de' liquidi, voglio in verun modo indicare, che quella abbia nulla di comune con queſta, o poſſa l'una coll'altra ſoſtituirſi. Che anzi, ſe taluno da me ricerchi, in che conſiſta quella ſpecifica differenza delle oppoſte elettricità, io dirò apertamente, che ſono contento per ora di averla dimoſtrata reale, ed eſiſtente, e laſcio a più felice incontro, o a più felici ingegni la cura di rintracciarla. Così l'immortale *Neuton* nell' analiſi della luce fu contento di aver dimoſtrata con eſatte eſperienze e proporzioni la diverſa refrangibilità de' raggi, che la compongono; e ne laſciò il modo, e la natura all'arbitrio, e alla futura inveſtigazione.

TEOREMA XII.

Nè porgeſi più felice ſcioglimento di quel confuſo e ineſtricabile nodo de' fenomeni, qualora ſi conſideri l'azione delle punte, come effetto d'una ſola forza procedente dall'armatura o conduttore non elettrico, da cui quelle partono, o a cui ſi preſentano.

(*a*) Appartengono a queſto Teorema i fenomeni de' Corollarj 6, 7, e 8, tanto della ſeconda, che della quarta Serie di ſperienze, e più diſtintamente le proporzioni de' medeſimi fenomeni raccolti in fine del Corollario univerſale dai Teoremi 5, 6, 7, e 8.

(*b*) Ragionando ſopra di queſti ſimilmente, come ſopra quelli, che furono eſpoſti nell' antecedente Teorema, ne ſiegue per neceſſità, che non può in verun modo aſſumerſi una ſola forza, o un fluido ſolo ſmoſſo dal conduttore elettrico nell' armatura del quadro, o conduttore non elettrico, da cui parte quella punta, o a cui ſi preſenta.

(*c*) Ma ſiccome nella varietà delle antecedenti proporzioni abbiamo riconoſciuta non meno la diverſa attività delle due ſpecie di elettrici fluidi, che l'eſiſtenza, e realtà de' medeſimi; così nella preſente varietà delle proporzioni di attività della punta ſteſſa procedente dal conduttore non elettrico, ed oppoſta or all' una or all' altra ſpecie di elettricità, ovvero or dall' una or dall' altra di queſte preſentata alla ſteſſa non elettrica armatura, dovremo ſimilmente riconoſcere nell' armatura o conduttore non elettrico non meno la diverſa facilità di ricevere l' azione dell' oppoſta elettricità, che l' influenza, o neceſſità di queſta facilità ſteſſa nella piena eſtimazione, e riſoluzione di que' compoſti fenomeni.

(*d*) E qui pure gioverà farſi ſtrada alle nuove idee col parallelo di principj familiari a chi non è affatto nuovo nelle Fiſiche teorie. Per calcolare in Idraulica l' azione di un fluido proſiliente, non vaga ed aſtratta, ma effettiva e reale, non baſta, come già oſſervai, tener conto dell' adulta velocità, e inoltre della ſpecifica gravità del liquido; che queſti due elementi non riguardano, ſe non l' attività in ſe ſteſſa. Ma ſe queſta ſi riduce all' atto di produrre un dato effetto, d' uopo è allora di riguardare anche l' altro termine dell' effetto medeſimo, come ſarebbe per eſempio, l' ala d' una ruota da muoverſi, contro la quale quel liquido percuote. Ora la quantità della percoſſa corriſponde è vero in aſtratto alla formola di velocità adulta, e di gravità ſpecifica del liquido, l' effetto però è vario ſecondo la maggiore o minore ſuperficie dell' ala percoſſa, e in oltre, ſupponendoſi coſtante, anzi la ſteſſa direzione, occorre varietà nell' effetto, ſecondo la diverſa mobilità della ruota, cui quell' ala appartiene; e ſono queſti gli elementi dell' altro termine, in cui ſi compie l' effetto di quella formola prima.

(*e*) Siccome adunque in Idraulica dalle varietà e dai limiti, che riconoſciamo nell' applicazione della ſola formola aſſoluta al determinato effetto d' una ruota da muoverſi, concludiamo ſicuramente l' influenza, e la realtà degli elementi dell' altro termine, in cui ſi compie l' azione; così la varietà di proporzioni provenienti dalle punte, che partono da un conduttore non elettrico, o a queſto ſi preſentano, porgeranno la prova, e la miſura della diverſa facilità, con cui l'elettricità naturalmente equilibrata e fiſſa ne' corpi non elettrici ſi muove, e ſi ſvolge per l'azione dell'una, o dell'altra ſpecie già ſciolta, e raccolta nell'oppoſto conduttore.

(*f*) Or queſta facilità, che ſi ſcorge nella elettricità fiſſa ne' corpi ad eſſere ſmoſſa e ſciolta per opera delle oppoſte elettricità, coſtituiſce un nuovo e diſtinto termine, che concorre a compiere l'azione delle elettriche punte; e vuole perciò eſſere conſiderato più diſtintamente. In primo luogo la punta, che procede da conduttore non altrimenti elettrico, non ha ſe non minima azione, che da queſto ſi eſtenda all'oppoſto conduttore elettrico; e perciò entra nell'ipoteſi, che fu antecedentemente ſpiegata (*Teor.* 10, 6, 4), poichè ben lungi dall'influire nell'aumento di vicendevole azione, non preſenta a queſta, ſe non ſoggetto tanto minore, quanto è minore la ſuperficie ſteſſa della punta, a confronto di quella dell'armatura, e dei conduttori. Il che, ſebbene ſia chiaro per ſe ſteſſo, e confacente alle verità precedenti, può nondimeno direttamente dedurſi dalle ſtabilite proporzioni.

(*g*) Invero la punta oppoſta alla reſinoſa elettricità ſta alla punta oppoſta alla vitrea in forza d' indurre nel quadro la carica fuori de' limiti dell'iſolamento, come zero ai primi ſegni di elettricità; e dentro i limiti dell' iſolamento come il primo grado di carica alla carica piena (*Teor.* 7).

(*h*) E l'armatura, da cui parte quella punta, ſta all'armatura, da cui parte la ſeconda, in forza d'indurre la carica fuori de' limiti dell' iſolamento, come zero alla metà della carica; e dentro i limiti come meno di metà alla carica piena (*Teor.* 8).

(*i*) Per riconoſcere in queſte proporzioni la ſuperiorità delle ſuperficie in confronto della punta, ſi compongano in uno i termini della prima ragione delle punte fuori de' limiti dell' iſolamento; e ſi compongano ſimilmente in uno i termini della prima ragione delle armature fuori degli ſteſſi limiti; e ſarà il prodotto delle punte al prodotto delle armature, come ſono i primi ſegni alla metà della carica.

(*k*) Si compongano ſimilmente i termini dell' altra ragione delle punte, ed i corriſpondenti delle armature entro i limiti dell' iſolamento; ed eſſendo in ambeduē comune il termine di carica piena, ſarà il prodotto delle punte a quello delle armature, come ſono i primi termini fra loro, cioè come ſta il primo grado di carica incirca alla metà della carica ſteſſa.

(*l*) Quindi è tanto maggiore l' azione mutua del conduttore elettrico, e del quadro, quanto è maggiore certa funzione della ſuperficie dell' armatura ſopra la ſuperficie della punta.

(*m*) La punta adunque, finchè non ha nel conduttore, da cui parte, qualche ſpecie di elettricità ſmoſſa e ſciolta, è inetta ad accreſcere la mutua azione.

(*n*) Quando poi ſiavi nel conduttore, da cui la punta ſi parte, elettricità ſciolta, allora ſi riduce alla prima ipoteſi già ſpiegata (*Teor.* 10. *a*), ed acquiſta l'elettricità ſteſſa per la via della punta quel momento che dichiarai (*Teor.* 9. *n.* 1 *e*, *f*); e che ſarebbe ſuperfluo di ſpiegare più diffuſamente. Aggiugnerò ſoltanto, che di queſto ſteſſo momento ne abbiamo eſempio nella celere progreſſione di aumento di carica, che ſi oſſerva nella Serie ſeconda, e nella quarta delle ſperienze in confronto dell' altre due corriſpondenti; nella prima delle quali dai pollici tre all' uno aſcende alla piena carica, e nella ſeconda dai nove ai tre arriva alla carica piena: quando all' oppoſto nelle corriſpondenti Serie, nelle quali l' armatura non ha punta, la prima ha la differenza dai quattordici pollici fino ai quattro, e la terza dai dodici fino ai due per arrivare alla prima forza della carica.

(*o*) Che ſe poi ſi conſideri nella elettricità naturalmente equilibrata e fiſſa la riſpettiva o ſpecifica facilità ad eſſere ſmoſſa e ſciolta dalle oppoſte ſpecie, riſulta dalle proporzioni ſteſſe precedentemente citate (*g*, *h*), che tanto nelle punte, come nelle armature, ſi ſvolge più facilmente la ſpecie oppoſta alla vitrea, che alla reſinoſa. Poichè nelle ſteſſe diſtanze riſpettivamente delle punte, e delle armature, tanto entro come fuori de' limiti dell' iſolamento, è ſempre inſignemente maggiore la forza di carica raccolta nel quadro colla vitrea, che colla reſinoſa elettricità del conduttore. Il che ſervirà per convincerci tanto più efficacemente della maggiore mobilità, o facilità di ſcioglierſi nella ſpecie reſinoſa, ſe ſi riflette, che la forza ſpecifica della reſinoſa eſſendo per lo meno quadrupla della vitrea (*Teor.* I), dovrebbe il conduttore elettrico di quella ſpecie imprimere quadrupla la carica nell' oppoſta armatura, quando la mobilità delle due ſpecie, che devono ſmoverſi a tal effetto, foſſe in ambedue eguale. Ora quando non s' imprime quadrupla, ma di gran lunga minore colla reſinoſa, che colla vitrea, non può ciò d' altronde ripeterſi, che dalla propoſta differenza di mobilità nelle ſpecie ſteſſe che ſi ſciolgono.

(*p*) Sembrano fin qui ridotti a tale diſtinzione e realtà i varj elementi, che concorrono a compiere l' azione delle elettriche punte, che può ciaſcuno di eſſi riconoſcerſi ne' ſuoi effetti, e perſino calcolarſi nella ſua quantità. Ci piace prima di por termine a queſto Teorema d' indicarne alcun eſempio tra i molti, che ſi preſentano ne' precedenti Corollarj e Teoremi. Si rifletta alle proporzioni delle diſtanze, e alle differenze che riſultano tra la prima carica ſenſibile e la piena carica nelle quattro Serie poco fa indicate in fine del penultimo paragrafo (*n*). Nella Serie prima le differenze della diſtanza della prima carica ſenſibile fino alla carica piena ſono dai quattordici pollici fino ai quattro; e nella terza dai dodici fino ai due, cioè in ciaſcuna dieci pollici, i quali ſommati ſono venti. Per contrario nella Serie ſeconda ſono dai tre fino ad uno, cioè due pollici; e nella quarta dai nove fino ai tre, cioè ſei; i quali ſommati cogli antecedenti due fanno otto pollici. Siccome dunque le diſtanze calcolate anche cogl' iſolamenti ci conduſſero negli antecedenti Teoremi a conoſcere la forza ſpecifica delle ſpecie ſciolte di elettricità; così queſte ci porgeranno dati per calcolare la diverſa mobilità delle ſpecie, che devono ſcioglierſi: e ſiccome nella Serie prima, e terza, nelle quali la punta ſi trova unita al conduttore elettrico, oltre la ſpecifica forza di ciaſcuna elettricità, ha luogo l' Idraulico momento di accelerazione per la via della punta; così nella Serie ſeconda, e quarta, nelle quali la punta appartiene all' armatura ſteſſa, in cui ſi ſciolgono quelle elettricità, oltre alla riſpettiva e ſpecifica mobilità o facilità a ſcioglierſi in ciaſcuna ſpecie, avrà pure luogo l' Idraulico momento, in proporzione che vengono ſciolte. Ma baſti di aver ciò accennato, che ſi ſpiegherà pienamente con nuovi appoggi di ſperienze nella Parte ſeconda, e terza della preſente Analiſi.

TEOREMA XIII.

L' azione delle elettriche punte è compoſta; nè altrimenti corriſponde ai fenomeni, ſe non ſi riſolve ne' ſuoi diſtinti elementi 1. del mezzo reſiſtente come oſtacolo frappoſto alla riunione delle oppoſte elettricità, 2. del meccanico momento di reciproca azione, 3. della ſpecifica forza di ciaſcuna ſpecie di elettricità eccitata, o ſciolta, 4. della ſpecifica mobilità o facilità a ſcioglierſi di ciaſcuna ſpecie, quando ſono naturalmente equilibrate ne' corpi, 5. dell' Idraulico momento d' iſolamento conſiderato come capacità, o recipiente delle ſciolte elettricità.

1. La quantità di oſtacolo del mezzo frappoſto può diminuirſi in due modi. Primo, con diminuirne la groſſezza ſtando ſalva l' ampiezza della baſe; e queſto mo-

do facilita bensì l'azione vicendevole delle oppoſte elettricità, e concorre in ragione della capacità del mezzo a formare de' grandi ammaſſi di oppoſte elettricità; ma non ne compie giammai l' unione, ſe non per la rottura del mezzo ſteſſo, ovvero ſoltanto di quelle particelle, nelle quali la groſſezza frappoſta ſia ridotta a zero. E furono queſte le vie, colle quali giunſe *Epino* ad imitare non ſolamente la boccia Leidenſe con ſuperficie ſimili oppoſte alla ſuperficie d' un elettrico conduttore; ma inoltre a rendere eſteriormente inſenſibile l' azione delle contrarie elettricità ſciolte, e accumulate, e farla nuovamente, e ad arbitrio, ſenſibile colla ſola ſeparazione, e diſtanza delle ſuperficie ſteſſe, nelle quali quelle erano raccolte.

Si diminuiſce in oltre l' oſtacolo con diminuirne la baſe, ſalva reſtando la groſſezza del mezzo; e ciò ſi ottiene per la via delle punte, come a ſuo luogo ſi dichiarò (*Teor. 9. n. 2*). Indi il maſſimo effetto dell' elettrica ſcarica, che è la riunione ſteſſa delle oppoſte elettricità, ſi ha ſempre fra due punte diſpoſte a conveniente diſtanza; e ſe ad una punta ſi opponga più ampia ſuperficie, il maſſimo effetto ſi trova ſempre raccolto dalla parte della punta, e diviſo al contrario in tutta quella parte di ſuperficie, nella quale ſi eſtende l' elettrica azione, ſecondo certa funzione delle diſtanze, e della ſpecifica forza delle elettricità. Che ſe ſi paragoni l' azione d' una ſpecie di elettricità ſpinta da un conduttore per la via d' una punta ad una oppoſta ſuperficie non elettrica; o viceverſa dalla ſuperficie elettrica del conduttore ſpinta contro una punta non elettrica, allora riſulta il maſſimo dell' azione tanto nello ſciogliere, che nel riunire le contrarie elettricità; e ſimilmente la maſſima eſploſione, o forza di ſcintilla, che corriſponde alla minima diminuzione della elettricità raccolta nel conduttore ſecondo le funzioni delle diſtanze compoſte cogli altri elementi di forza ſpecifica, e di ſpecifica mobilità. Talchè anche colla punta

punta oppoſta al conduttore elettrico ſi trova tale diſtanza, nella quale piena rimane in queſto la forza della ſcintilla non altrimenti, che ſe allo ſteſſo oppoſta foſſe una eguale ſuperficie a diſtanza tanto minore (*Ser.* 2. *Cor.* 8. *e Ser.* 4. *Cor.* 5, *e* 8).

2. Ed in queſte reciprocità di ſuperficie colle diſtanze, alle quali ſi eſtende la vicendevole azione delle elettricità o ſciolte o da ſcioglierſi, conſiſte quel meccanico momento, che più ſopra dichiarato abbiamo, e propoſto in ſecondo luogo, come diſtinto elemento delle elettriche punte.

3. Della ſpecifica forza delle oppoſte elettricità ſciolte nulla ci rimane da aggiugnere, eſſendo già colcolata la reſinoſa per lo meno quadrupla della vitrea nell' indurre la carica, e per lo meno decupla nella propria diſperſione (*Teor.* 1, *e* 2).

4. Similmente nulla aggiugneremo della mobilità, o maggiore facilità a ſcioglierſi nella ſpecie oppoſta alla vitrea ſopra la ſpecie oppoſta alla reſinoſa; eſſendoſi già ridotta a certe proporzioni tanto di numeri, come di fenomeni (*Teor.* 5, 6, 7, 8) più diſtintamente nel Teorema duodecimo.

Non tralaſcierò qui d' avvertire, che tanto la ſpecifica forza in terzo luogo propoſta, quanto queſta ſpecifica mobilità delle due ſpecie di elettricità potrebbe calcolarſi più preciſamente ſecondo le Oſſervazioni aggiunte ai Teoremi 3, e 5; e ſecondo le funzioni dell' iſolamento, e de' fenomeni, ai quali ridotte ne abbiamo le proporzioni. A noi però baſta per ora di averne ſtabilita l' eſiſtenza, e l' andamento, riſervandoci a calcolarne giuſtamente le proporzioni in progreſſo dell' Opera col ſuſſidio di nuovi dati, che ci ſomminiſtreranno le ſucceſſive ſperienze.

5. Intorno all' Idraulico momento tanto della elettricità ſciolta e raccolta, come di quelle che ſi vanno ſucceſſivamente ſciogliendo e radunando ne' conduttori

due ſole rifleſſioni ci ſembrano degne di particolare memoria, dopo ciò che detto ne abbiamo negli antecedenti Teoremi.

Primieramente come in Idraulica non ogni apertura di lume è opportuna per proccurare la maſſima velocità del fluido emanante, ma ogni determinata altezza, e grandezza di recipiente ha tale apertura, o lume, per cui eſce il liquido colla maſſima velocità, e colla minima reſiſtenza: non altrimenti negli elettrici fenomeni ogni forma o grandezza di conduttore, o di armatura ha il ſuo maſſimo per queſto momento nelle varie proporzioni di palla, o punta ſmuſſata, o più acuta, ſecondo la corriſpondente forma, o lunghezza, o grandezza di que' conduttori, come vedremo in altre ſperienze a queſto fine dirette.

In ſecondo luogo a queſta idea d'Idraulico momento non vorremmo che taluno aſſociaſſe altri modi o altre idee di forza eſpanſiva, o di elaſticità; quaſichè ciaſcuna ſpecie di elettricità aveſſe in ſe ſteſſa principio e termine di queſto momento. Sembra a noi all'oppoſto, che tanto in queſti come univerſalmente in altri fenomeni di elettricità non debba mai preſcinderſi dalla mutua azione delle ſpecie ſteſſe fra loro, ſenza la quale ſi riduce la coſa a mere finzioni, ed a caſi imaginarj; mentre in realtà non vi è mai verun ſegno di elettricità, che non prenda principio, e incremento dalla proporzione ſteſſa di mutua azione delle due oppoſte ſpecie. In queſto ſenſo ridurremo qui principalmente que' ſoffj, e quaſi sbuffi, che ſembrano partire ſpontanei dai limiti degl'iſolamenti, ove ſono ſcabrezze, e termini acuti di corpi conduttori, non oſtante che ſiano quegli involti e coperti da un ſottile intonaco di ceralacca, o di maſtice, quando è aſſai forte l'elettricità. Così quando lo ſtrato reſiſtente ſia di ſimili materie reſinoſe ſi fora ſimilmente, e ſi trapaſſa con facilità, e reſta perciò inetto a raccoglier carica, ſe ha punte ſporgenti internamente dall' una all' altra armatura. Per ſimile ragione infine i conduttori e le armature ſopraccariche e ridondanti di elettricità ſembrano ſoffiare e sbuffare ſpontaneamente per forza interna da ogni loro ſcabrezza, o ſpigolo, o prominenza; perchè appunto per queſte vie maſſimamente eſtendono la vicendevole azione coll' oppoſta elettricità ſmoſſa a grandiſſime diſtanze ne' corpi ambienti.

OSSERVAZIONE.

In queſta prima Parte della noſtra Analiſi delle punte ragionando, non come ſi è fatto da molti finora, dalla generale ipoteſi ai particolari fenomeni, ma bensì dal particolare all' univerſale, e dalla riſoluzione del compoſto al ſemplice, che ſono le uniche vie di Fiſica induzione, ci ſi preſenta naturalmente innanzi una idea delle elettriche forze ben diverſa da quella, che corre tanto alla moda della Frankliniana ipoteſi. Se dobbiamo giudicare della realità di queſta ipoteſi, che *Kinnersley* chiamò lepidamente *ortodoſſia elettrica*, dalla confuſione, e contraddizione introdotta non meno ne' fenomeni delle elettriche punte, che in ogni altro ben diſtinto fenomeno di elettricità, non ſappiamo trovar nulla, che ci rechi il minimo ſcrupolo di eſſerci ſcoſtati da quella mal concepita ortodoſſia elettrica. Chi avrà forza di ſpirito da eſaminare con imparzialità le opere degli Autori celebri, che hanno coltivate le coſe elettriche dopo *Franklin* ſeguendo la ſua ipoteſi, potrà per ſe ſteſſo convincerſi, che hanno eſſi più ſovente ſottilizzato, che analizzato, e troverà in quelle piuttoſto rarefatte, che eſteſe le cognizioni. Si forzano e ſi ſoggiogano i nuovi e diſtinti fenomeni ai precarj principj della ipoteſi; s' involgono e ſi compongono quelli con queſti; e ſi coniano di ſiffatta miſura nuovi nomi per tener fermi i ſettarj, ed abbagliare i proſeliti; in vece di eſtendere, o limitare, o variare que' principj ſecondo l'ingenuità, e l'eſpreſſione de' ſemplici fenomeni.

A prendere le coſe nella vera ſorgente l'appellazione, e la preferenza di *poſitiva elettricità*, e di *fluido unico* attribuita a quella ſpecie, che ſi eccita nello sfregamento de' vetri liſcj, ſembra non avere altro fondamento, che l'azzardo per cui *Franklin*, in quelle ſue belliſſime ſperienze, ſulle quali edificò la ſua ipoteſi, non ebbe per mano ſe non vetri, e criſtalli più toſto che zolfi, e reſine; ovvero perchè raccolſe piuttoſto l'elettricità dal vetro ſtrofinato, che dal cuſcinetto ſtrofinante. Se aveſſe da principio fatte le ſperienze ſteſſe con globi di zolſo, come poi le ſece *Kinnersley*, forſe il nome di poſitiva elettricità non toccava mai più alla vitrea, ma reſtava per lo ſteſſo titolo di primogenitura in infinito a tutta la linea de' corpi reſinoſi. Per verità nella prima Riſpoſta a *Kinnersley* ſi trovò *Franklin* molto ſorpreſo da quelle ſperienze; e le ſoſpettò piuttoſto fallaci ed equivoche per ſola differenza di quantità, che non per diverſità nella ſpecie, o nella direzione. E nella ſeconda Riſpoſta non le eſaminò diſtintamente, ma contentandoſi di averne replicate alcune con quell'apparato, che ſi trovò più comodo, che perfetto, non ſeppe ricuſarne la verità; ed imaginandoſi da quelle poche ripetute anche la realtà delle altre, le ſpiegò colla ſua idea di *elettricità negativa*, e col *difetto* di quel fluido unico, ch'egli avea ſtabilito nel vetro. *Mais* (conchiude egli ſteſſo) *ce ne ſont ici que des penſe'es jette'es à la hate*.

Grande fu il genio di *Neuton*; e la ſua nobile Teoria della luce, e de' colori regge coſtante nelle vicende dei tempi, perchè non fu egli pago di gettarla a lampo d'ingegno, ma invecchiò prima di ridurre a termine l'analiſi de' fenomeni, ſui quali ſeppe fondarla. Fu pur grande il genio di *Carteſio*; ma le ſue ipoteſi perirono con lui, perchè inſofferente nella oſſervazione, e nell' analiſi fiſica, ſi contentò di ridurle a meri voli d'ingegno. Grande è il genio di *Franklin;* ma qual confidenza dovrà averſi in un ſuo penſiero azzardato ſopra le due oppoſte ſpecie di elettricità, delle quali egli non ebbe idea ben diſtinta? Tanto più che ebbe egli idea affatto falſa della sfera di attività delle medeſime, che fu impropriamente detta, e continua a dirſi *elettrica atmosfera*, la quale idea venne poi rettificata da *Epino*.

Indi fu con non minore ſpirito, che giudizio, da qualche Fiſico non volgare propoſto il problema, non mai prima d'ora ſciolto, nè rigettato, cioè: " Suppo-
„ ſta vera ſecondo l'opinione di *Franklin* la realità e
„ l'azione d'un fluido ſolo ne' fenomeni delle due op-
„ poſte ſpecie di elettricità, dimoſtrare direttamente,
„ che quel fluido abbia ſede piuttoſto nella vitrea, che
„ nella reſinoſa; ovvero a quale di queſte due realmente
„ convenga il nome di poſitiva ". Poteva in queſto aſpetto la *Frankliniana* opinione annoverarſi fra quelle ipoteſi verſatili, che ſogliono inverterſi egualmente ſenza verun pregiudizio, che ſenza vantaggio veruno della verità.

Che ſe poi voglia ridurſi ad eſattezza di miſure e di proporzioni, che ſono la vera pietra di paragone della realtà degli effetti, e delle cauſe, ſi ſcorge mancante non ſolo ne' fenomeni delle elettriche punte, ma coi più ſolenni fenomeni della elettricità. Dimoſtro in altre Memorie ſeparate l'incoerenza de' cardinali principj, da' quali ſi deriva la ſpiegazione della boccia Leidenſe. Quante fallacie, e quante illuſioni non s'introdurſero poi, e non laſciano tuttavia di ſoſtenerſi tra il volgo de' Fiſici nelle vere leggi degli elettrici moti, non bene da principio conoſciute da *Franklin*, e poco felicemente in ſeguito dichiarate, o diſſimulate dai *Frankliniani*? Chi inteſe mai col ſolo difetto, o coll'aſſenza d'un fluido le ripulſioni tra i corpi dotati di reſinoſa elettricità non meno inſigni, nè meno coſtanti, che tra i corpi inveſtiti dalla vitrea? Come s'inteſero colla ſola forza eſpanſiva d'un fluido unico le elettriche adeſioni, o coeſioni? Eppure ſono queſte il primo, e più coſtante tra gli elettrici fenomeni. Poichè allo ſtrofinamento per eccitare l'elettricità immediatamente ſuccede l' adeſione de' corpi ſtrofinati fra loro, come mi occorrerà di rendere altrove manifeſto colle più ſplendide prove; e gli altri elettrici ſegni non ſi manifeſtano mai altrimenti, che inſieme, o dopo la ſeparazione di que' corpi ſtrofinati, e aderenti; la quale ſeparazione ſi fa egualmente alzando, o ſtriſciando la ſuperficie ſtrofinante, che traendo, o ruotando la ſtrofinata. Ma delle elettriche adeſioni non ebbe *Franklin*, che idea aſſai vaga; e i *Frankliniani* o le diſſimularono affatto per comodo della loro ipoteſi, non annoverandole neppure fra i ſegni; o ne declinarono la ſpiegazione con chiamarle *fenomeni acceſſorj*: quaſichè la diſſimulazione, o la tergiverſazione foſſero vie degne di un Fiſico per accoſtarſi alla verità.

TEORIA

Del nuovo Aſtro oſſervato prima in Inghilterra.

Del Sig. Ab. RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH Profeſſore di Ottica al Dipartimento della Marina a Parigi.

* * *

PROPOSIZIONE I.

T*rovare la diſtanza, la poſizione, e la grandezza dell' arco deſcritto dal nuovo Aſtro per mezzo di quattro oſſervazioni fatte nell' intervallo di più meſi.*

LA brevità del cammino percorſo da queſt' Aſtro in ſei meſi fa conoſcere abbaſtanza eſſer egli molto remoto; ſi dee quaſi tutto alla parallaſſe dell' orbe annuo della terra. L' arco deſcritto deve eſſere aſſai proſſimamente rettilineo, e la velocità in eſſo ſenſibilmente coſtante. Quindi la di lui diſtanza, poſizione, e grandezza potranno determinarſi per mezzo di quattro oſſervazioni, applicando a tale determinazione il problema di una retta ſegante in modo quattro rette date di poſizione, che tre ſegamenti di eſſa intercetti dalle ſteſſe rette ſiano in data ragione, cioè nella proporzione degl' intervalli del tempo. Queſto problema, anche dal *Neuton* propoſto nella ſua Aritmetica univerſale per le orbite rettilinee delle comete, è ſtato altra volta da me dimoſtrato non aver luogo per l' orbite comuni delle comete (*Diſſert. de Cometis An.* 1746.), e più diffuſamente in altra Operetta ſu lo ſteſſo ſoggetto, che il Signor *Caſtillon* aggiunſe nell'ultimo Tomo dell'Aritmetica Neutoniana da ſe con egregie annotazioni illuſtrata. Ma nel noſtro caſo la brevità del cammino corriſpondente alla ſmiſurata diſtanza ne permette l'uſo. Trovata la diſtanza in ſuppoſizione d'un moto rettilineo ed uniforme, agevolmente ſi potrà conoſcere, che la correzione, la quale dovrebbe corriſpondere alla curvatura ed ineguaglianza della velocità, sfugge realmente ogni ſenſo nel caſo noſtro.

Siano T, T', T'', T''', (*Fig. I.*) quattro luoghi della terra, P, P', P'', P''' quattro luoghi dell'Aſtro ridotti al piano dell'ecclittica a traverſo i quali paſſano le direzioni delle longitudini oſſervate TE, $T'E'$, $T''E''$, $T'''E'''$. Si tratta di trovare la diſtanza, la poſizione, e la grandezza della retta PP''', i cui ſegamenti PP', $P'P''$, $P''P'''$ ſiano nella proporzione data degl'intervalli del tempo infra quelle oſſervazioni.

Siano A, A', A'' le interſezioni della retta TE colle rette $T'E'$, $T''E''$, $T'''E'''$, e le rette $P'''B$, $P''B'$ parallele alle rette $E'T'$, $E''T''$ s'incontrino colla medeſima retta TE ne' punti B, B'.

Nel triangolo TST' dalle date diſtanze ST, ST' del ſole dalla terra, e coll'angolo dato TST' uguale al moto del ſole tra la prima oſſervazione e la ſeconda, ſi ricaverà la corda TT' cogli angoli STT', $ST'T$: gli angoli STA, $ST'A$ ſi ſcopriranno dalla differenza delle longitudini del ſole, e dell'Aſtro. Quindi ſi avranno gli angoli ATT', $AT'T$, che ſaranno la ſomma o la differenza degli angoli STT', STA, ed $ST'T$, $ST'A$. Una figura anche trivialmente delineata, che contenga i luoghi T, T' nell'orbita circolare della terra colle rette TE, $T'E'$ indefinite, farà vedere ſe prender ſi debba la ſomma, o la differenza. La ſomma ſarà da uſarſi nel caſo eſpreſſo dalla figura per l'angolo ATT'; la differenza per l'$AT'T$. Anzi baſterà trovare l'uno ſolamente

ſolamente di quegli angoli, eſſendo il terzo TAT' la differenza data delle longitudini dell' Aſtro nella prima, e ſeconda oſſervazione. Quindi ſi troverà la retta TA, e nel modo ſteſſo troverannoſi le rette TA', TA'' nei triangoli $A'TT''$, $A''TT'''$ col mezzo de' raggi ST'', ST''', degli angoli TST'', TST''', e degli angoli $TA'T''$, $TA''T'''$ uguali ai moti del ſole, e dell' Aſtro in longitudine dalla prima alla terza, e quarta oſſervazione.

Si dicano t, t', t'' i tempi dalla prima oſſervazione alla ſeconda, alla terza, alla quarta; m, m', m'' i moti dell' Aſtro in longitudine dalla prima oſſervazione alla ſeconda, da queſta alla terza, dalla terza alla quarta. L' angolo $A''P'''B$, il cui lato $A''P'''$ ha la direzione della longitudine quarta, e il lato BP''' parallelo all' AP' la direzione della ſeconda, ſarà $= m' + m''$, l' angolo $A''P'''B'$ ſarà $= m''$ per la direzione $B'P'''$ parallela alla direzione $A'P''$ della terza longitudine: l' angolo poi $A''BP'''$ ſarà $= m$ per le direzioni BA'', BP''' delle longitudini prima e ſeconda, e l' angolo $A''B'P'''$ ſarà $= m + m'$ per le direzioni $B'A''$, $B'P'''$ delle longitudini prima e terza. Si facciano i ſeni di queſti angoli $a =$ ſen. $(m' + m'')$, $a' =$ ſen. m'', $b =$ ſen. m, $b' =$ ſen. $(m + m')$. Si facciano pure $AA'' = c$, $A'A'' = c'$, $PA'' = x$.

Sarà $t : t'' :: PP' : PP''' :: PA = x - c : PB = \dfrac{t''x - ct''}{t}$;

e perciò $A''B = \dfrac{t''x - ct''}{t} - x = \dfrac{(t'' - t)x - ct''}{t}$: così

ſen. $A''P'''B = a :$ ſen. $A''BP''' = b :: A''B : A''P''' = \dfrac{(t''-t)bx - bct''}{at}$.

Con le ſteſſe proporzioni ſoſtituendo le rette $A'P''$, $B'P'''$ alle rette AP', BP''', e perciò i valori a', b', c', t' ai valori a, b, c, t, ſi avrà l' altro valore della medeſima $A''P''' = \dfrac{(t'' - t')b'x - b'c't''}{a't'}$. Laonde ſatto $\dfrac{(t''-t)b}{at} = m$,

$\frac{b\,c\,t''}{at}=n$, $\frac{(t''-t')\,b'}{a'\,t'}=m'$, $\frac{b'\,c'\,t''}{a'\,t'}=n'$, ſi avrà $A''P'''$ $=m\,x-n=m'\,x-n'$, e perciò $x=\frac{n-n'}{m-m'}=A''P$. Avuto queſto valore, e il valore $AP'''=m\,x-n$ coll' angolo $PA''P'''$, il quale è il moto in longitudine dalla prima oſſervazione alla quarta $=m+m'+m''$, ſi avrà nel triangolo PAP''' tutto il cammino PP''' cogli angoli in P, e P''', che eſibiſcono la di lui poſizione riſpetto alle rette TE, $T'''E'''$; e le diſtanze TP, $T'''P'''$ ſi avranno aggiungendo le $A''P$, $A''P'''$ qui trovate alle trovate prima TA'', $T'''A''$; e perciò ſi avrà ciò che ſi dovea ritrovare.

SCOLIO.

Non ho qui in villa, dove sì fatte coſe ſcrivo, la ſoluzione di queſto Problema propoſto dal *Neuton* nella ſua Aritmetica univerſale, nè quella di *Simpſon*, di cui mi ſono ſervito nell' accennata Operetta ſtampata dal *Caſtillon*, e molto meno l' altre anteriori, di cui ſa menzione il *Neuton*. Quelle ſi potranno riſcontrare, ed uſarle quando eſibiſcano un più ſpedito calcolo numerico. Il metodo però da me qui uſato nella ſoluzione dello ſteſſo Problema ſembra aſſai naturale, e diretto, ed offre una formola molto ſemplice.

PROPOSIZIONE II.

Trovare la ſpecie, e la grandezza dell' orbita.

Nella *fig.* 2. i punti S, T, P ſiano i medeſimi che nella prima, e i punti A, P', T' ſiano gli A'', T''', P''' di quella: ſiano poi $C\ C'$ i luoghi dell' Aſtro nella ſua orbita. Moltiplicando TP, $T'P'$ per le tangenti della latitudine prima ed ultima ſi troveranno le rette PC, $P'C'$ perpendicolari al piano dell' eclittica, e perciò perpendicolari alla retta PP', a cui ſe ſi concepiſca la retta CI parallela ed uguale, ſarà anch' eſſa cognita con la differenza $C'I$ delle rette PC, $P'C'$; e però ſi avrà anche la corda dell' orbita CC', ipotenuſa del triangolo CIC', la quale per la latitudine di queſt' Aſtro piccioliſſima appena differiſce dalla retta PP'. Se queſta ſi divida in due egualmente in H, e s' inalzi HH' ſino alla corda CC', che ſarà la ſemiſomma delle rette PC, $P'C'$, e ſi tirino SP, SH; ſi avranno nel triangolo SPT i lati ST, TP coll' angolo STP, che è la differenza delle longitudini del ſole, e dell' Aſtro, e perciò ſi troverà SP, e l' angolo SPT, che coll' angolo trovato APP' darà l' angolo SPH; queſto poi col lato SP, e $PH = \frac{1}{2} PP'$, darà la retta SH, dalla quale e dalla retta HH' ſi avrà SH'. E' noto poi anche il lato $CH = \frac{1}{2} CC'$, e facilmente ſi troverà SC dai lati SP, PC cogniti coll' angolo retto SPC: quindi ſi avrà anche l' angolo $SH'C$, cioè la poſizione della retta CC', la quale può prenderſi per la tangente dell' orbita per riſpetto al raggio vettore SH'. La perquiſizione diverrà molto più ſemplice ſe ſi prendano PP', SH, SHC invece di CC', SH', SH'C', il che ſarà lecito in queſt' Aſtro, che ha le latitudini così picciole.

La lunghezza della corda CC' riferita al tempo tra le oſſervazioni eſtreme offre la velocità, che paragonata colla velocità del corpo che ha da rivolgerſi in cerchio nella diſtanza SH', determinerà il genere della ſezione conica, nella quale l' Aſtro ſi move, e quell' iſteſſa velocità, inſieme coll' angolo $SH'C$, determinerà la di lei ſpecie, e la grandezza nel modo ſeguente. Si dica n lo ſpazio, che col moto medio della terra vien percorſo nel tempo di un minuto, la diſtanza media della terra dal ſole poſta $= 1$, r il raggio vettore SH', c la corda CC', t il tempo dalla prima oſſervazione all' ultima. Il quadrato dello ſpazio corriſpondente al tempo t in quel moto medio ſarà $n^2 t^2$; ed eſſendo i quadrati delle velocità in cerchj intorno al ſole in ragione reciproca dei raggi, il quadrato dello ſpazio corriſpondente al medeſimo tempo nel circolo, il cui raggio $= r$, ſarà $\frac{n^2 t^2}{r}$. Per la qual coſa il quadrato della velocità in quel circolo ſarà al quadrato della velocità di quell' Aſtro come $\frac{n^2 t^2}{r}$ a c^2. L'altezza, da cui cadendo con un moto uniformemente accelerato con la forza, che rattiene il mobile nel cerchio, ſi acquiſterebbe la velocità circolare, è, per li teoremi *Hugeniani* la quarta parte del diametro; di modo che per quel cerchio è $= \frac{1}{2} r$, e le altezze dovute alle diverſe velocità, con pari forza, ſono come i quadrati delle ſteſſe velocità. Quindi l'altezza dovuta alla velocità dello ſteſſo Aſtro ſarà $= \frac{c^2 r^2}{2n^2 t^2}$.

In una mia diſſertazione, che ha per titolo, *Del modo di trovare l'orbita d'un pianeta coll' ajuto della catottrica*, ho da gran tempo pubblicata una ſempliciſſima ed elegantiſſima coſtruzione del problema, in cui data la diſtanza, la velocità, e la poſizione della tangente ſi cerca la ſezione conica da deſcriverſi; la qual coſtruzione ho ivi dedotta dalla ſoluzione d'un certo problema catottrico. Ho di poi dedotto la ſteſſa coſtruzione da ſoli principj appartenenti alla teoria delle forze decreſcenti in ragione reciproca duplicata delle diſtanze in altra Operetta intorno alle perturbazioni di Giove, e di Saturno, come ſegue.

Sieno nella *fig.* 3. i punti S, C i medeſimi che nella *fig.* 2., ed H ſia lo ſteſſo che H'. Si pigli HK verſo S uguale all' altezza dovuta alla velocità, ed SL terza continuatamente proporzionale a SK, SH nella direzione SK. Si conduca LT perpendicolare alla tangente HC, e ſi prolunghi in M. L'aſſe primario della curva ricercata ſarà uguale alla retta SL; i due fuochi ſaranno S, M, e nel loro mezzo il centro N; dati i quali è manifeſto, ch'è data pure la ſezione conica.

La curva ſarà un'elliſſi, una parabola, o un'iperbola ſecondo che l'altezza HK ſarà minore, uguale, o maggiore per riſpetto al raggio SH. In queſto ultimo caſo i punti K, L giaceranno nella retta SH prolungata dalla parte di S. Nel caſo dell'elliſſi ſi avrà il circolo, ſe ſarà $SK = \frac{1}{2} SH$, e l'angolo SHC retto. Nel caſo della parabola, ſvanendo la SK, la longitudine dell'aſſe SL diventerà infinita, e i punti N, M allontanandoſi all'infinito, la poſizione dell'aſſe, e la diſtanza perielia ſi determineranno facilmente con queſt'altra coſtruzione. Col centro S, e coll'intervallo SH ſi trovi nella ſteſſa tangente il punto Q, e tagliata in due egualmente la HQ in O, ſi trovi OV perpendicolare alla retta SQ: ſarà V il vertice della parabola, SV la diſtanza perielia, la cui direzione determinerà la longitudine del perielio nell'orbita: nel caſo dell'elliſſi la direzione SM offrirà la longitudine dell'afelio, SN l'eccentricità, SL il tempo periodico, che ſi avrà dal teorema Kepleriano, qualora ſi prenda la radice quadrata del cubo della metà dell'aſſe SL, la quale eſibirà il numero degli anni.

Per ritrovare l'altezza $HK = \frac{c^2 r^2}{2n^2 t^2}$ ſi ha il valore trovato $SH = r$, $CC' = c$, e il tempo t, che aſſumer ſi deve in minuti: biſognerà in oltre trovare il valore n. Il che potrà farſi nel ſeguente modo. L'anno ſidereo è nell'Aſtronomia del Sig. *de la Lande* di giorni 365. 6^h. $9'$. $10'' = 31558150''$; lo ſpazio fatto in queſto tempo nel cerchio, il cui raggio $= 1$, è la circonferenza $= 2 \times 3,1415927$; e però lo ſpazio n corriſpondente ad un minuto, cioè a 60″, ſarà $\frac{12 \times 3,1415927}{3155815}$, e il logaritmo del valore $\frac{1}{2n}\,2$ ſarà $= 7,8534090$. Se gli ſi aggiunga il doppio logaritmo della diſtanza r, e del valor della corda c, e il doppio complemento aritmetico del logaritmo del tempo t eſpreſſo col numero de' minuti, ſi avrà il valore dell' altezza HK, il quale paragonato colla diſtanza SH eſibirà un' ellißi, una parabola, o un' iperbola, ſecondo che per riſpetto ad eſſa ſarà minore, uguale, o maggiore.

PROPOSIZIONE III.

Trovare tutti gli elementi della Teoria di queſt' Aſtro.

La longitudine del nodo, e l' inclinazione con facilità ſi troveranno anche indipendentemente dalla ſpecie dell' orbita. Sia nella *fig.* 2. R l' interſezione delle rette $P'P$, $C'C$: ſarà SR la linea dei nodi, la di cui direzione eſibirà la longitudine del nodo aſcendente, ſe tutte due le latitudini, come qui, ſaranno boreali, e $P'C'$ maggiore parimenti, come qui, della PC. Fatto $P'C' - PC = C'I : PC :: P'P : PR$, ſi troverà queſto lato del triangolo SPR, in cui è manifeſto anche l' angolo SPR, ſupplemento dell' angolo trovato SPH: il lato poi SP coll' angolo TSP ſi avrà nel triangolo TSP, nel quale ſi hanno i lati ST, TP coll' angolo in T, che è la differenza della longitudine del ſole, e dell' Aſtro nella prima oſſervazione; e perciò troveraſſi l' angolo PSR. L' angolo STP aggiunto qui a quella longitudine del ſole eſibirà la longitudine eliocentrica della direzione SP, e l' angolo PSR levato da quella ſomma eſibirà la longitudine ricercata della direzione SR tendente al nodo aſcendente.

Se ſi concepiſca un piano perpendicolare alla retta SR condotto per la retta PC, colla quale SR s' incontri in D; l' inclinazione ricercata ſarà l' angolo PDC, la di cui tangente è $\frac{PC}{PD} = \frac{PC}{SP \times \text{ſen. } PSR}$. Perciò ſi avrà anche l' inclinazione.

Per la longitudine del perielio ſi ha nella *fig.* 2. l' angolo PSH nel triangolo SPH già riſoluto; il quale aggiunto qui all' angolo RSP eſibirà l' angolo RSH: la di cui tangente diviſa pel coſeno dell' inclinazione darà l' angolo RSH'. Imperciocchè ſe il piano $HD'H'$ parallelo al piano PDC s' incontri con la medeſima SR in D'; ſarà $HD'H'$ l' inclinazione, e la retta HD ſarà il coſeno di quell' angolo col raggio $D'H'$, mentre queſte due rette ſono tangenti degli angoli RSH, RSH' col raggio comune SD'. L' angolo RSH' aggiunto qui alla longitudine del nodo, cioè della direzione SR, offrirà la longitudine della direzione SH'. Si ha l' angolo $HRD = PRD = APP' - PSR$, la di cui tangente pure moltiplicata pel coſeno dell' inclinazione ſomminiſtrerà l' angolo $H'RD'$. Quindi ſi avrà $SH'C' = RSH' + H'RD'$, che è il medeſimo, che l' angolo SHQ della *fig.* 3. Il ſupplemento del doppio angolo SHQ ſarà l' angolo HSQ, per eſſere iſoſcele il triangolo HSQ; il quale aggiunto alla longitudine della direzione SH darà per il caſo della parabola la longitudine del perielio; e dalla teoria poi generale dell' orbita parabolica la diſtanza perielia SV è $= SH \times \text{ſen.}^2\, SHQ$, e perciò anche que' due elementi facilmente ſi avranno nel caſo della parabola. Qui pure ſi conſeguirà l' effetto più facilmente ſe nella *fig.* 2. ſi aſſumano i punti P, H, P' invece de' punti S, H', C'.

Per il caſo dell' elliſſi, date nella *fig.* 3. SH, HK, ſi avrà SK, ed SL, la cui metà ſarà il ſemiaſſe maggiore uguale alla diſtanza media. Si avrà ancora $HL = SL - SH$, e perciò anche LT perpendicolare alla tangente $HC = HL \times$ ſen. LHC. Quindi ſi avrà LM doppia di eſſa; ed avendoſi nel triangolo SLM anche il lato SL, e l'angolo L complemento dell'angolo LHC, ſi troverà SM doppia della eccentricità SN, e l'angolo MSL, il quale tolto dalla longitudine della direzione SH darà la longitudine dell'afelio. Le diſtanze perielia ed afelia ſi avranno dalla differenza, e dalla ſomma della diſtanza media, e dell' eccentricità trovata, e il ſemiaſſe minore ſarà medio proporzionale geometrico tra di eſſe. Simile è l' operazione per l'iperbola; ſe qualche ſomma non ſi muti in ſottrazione, o viceverſa ſecondo le leggi della traſformazione dei luoghi geometrici.

Il tempo dell'arrivo al perielio nella parabola ſi avrà dalla teoria generale del moto parabolico, in cui ſi ha un belliſſimo, e poco avvertito teorema del *Neuton* nel primo libro dei Principj della filoſofia naturale, di cui ho io da gran tempo fatto uſo per determinare aſſai facilmente per ogni giorno, e ad ogni due giorni i luoghi della cometa nella parabola graficamente delineata. Il teorema è queſto. Mentre la cometa progrediſce in quella curva con un moto aſſai ineguale, il centro del circolo che paſſa per il ſole, per il vertice dell'aſſe, e pel luogo della ſteſſa cometa, ſi muove con un moto uniforme nella retta linea, che taglia in due parti eguali, e ad angoli retti la diſtanza perielia, e nel tempo, che dal perielio la cometa deviene all' anomalia di 90 gradi, percorre un ſegamento di eſſa uguale all'iſteſſa diſtanza perielia. Indi poi per qualunque anomalia, data la quale ſi ha pur anche il raggio vettore, dividendo la diſtanza perielia per il quadrato del coſeno di mezza l'anomalia, ſi deduce agevolmente la formola molto ſemplice, che ci dà il tempo corriſpondente a quell' anomalia.

Nella *fig.* 4. le rette MN, ON che ſegano in due ugualmente, e ad angoli retti la diſtanza perielia SV, ed il ed il raggio vettore SH s' incontrano ſcambievolmente nel punto N, ch'è il centro del circolo, che paſſa per li punti S, V, H: la retta MP è perpendicolare alla retta SH: e con eſſa s' incontra in Q la retta NQ parallela ad OS. Se il raggio vettore SH ſi faccia $= r$, la diſtanza perielia $SV = u$, l' anomalia $VSH = a$; ſarà $SP = \frac{1}{2} u \,\text{coſ.}\, a$, $OP = \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} u \,\text{coſ.}\, a = NQ$. L' angolo NMQ ſarà eguale all' angolo $MSP = a$, eſſendo l' uno e l' altro il complemento dell' angolo SMP. Quindi ſarà $MN = \frac{NQ}{\text{ſen.}\, a} = \frac{r - u \,\text{coſ.}\, a}{2 \,\text{ſen.}\, a}$.

Il numero de' giorni corriſpondenti all' anomalia di 90 gradi nella parabola avente la diſtanza perielia $= 1$ ſi chiami n; il numero ad eſſa corriſpondente nella data parabola ſarà $= nu^{\frac{3}{2}}$ e però ſe ſi faccia $SV = u$:

$$MN = \frac{r - u \,\text{coſ.}\, a}{2 \,\text{ſen.}\, a} :: nu^{\frac{1}{2}} : \frac{nu^{\frac{1}{2}}}{2 \,\text{ſen.}\, a} (r - u \,\text{coſ.}\, a)$$

queſto ultimo termine eſprimerà il numero de' giorni debito all' anomalia a. In oltre il numero n è $= 109,6$, e perciò il numero cercato ſarà $\frac{54,8\, u^{\frac{1}{2}}}{\text{ſen.}\, a} (r - u \,\text{coſ.}\, a)$.

Queſto numero aggiunto al tempo medio tra le oſſervazioni eſtreme darà il tempo dell' arrivo dell' Aſtro al perielio. In fatti la formola qui trovata è molto ſemplice, e può eſſere di grandiſſimo uſo tanto per computare la tavola parabolica dei tempi corriſpondenti alle anomalie, quanto ancor molto più per ritrovare il tempo, qualora le tavole già computate non s' abbiano alle mani, o qualora l' anomalia ecceda la maſſima di quelle, che nelle ſteſſe tavole ſi contengono. Dove ſi tratta di computare la tavola, rieſce la formola anche più ſemplice fatto $u = 1$.

Se l' orbita è poi ellittica, quel tempo ſi computerà coll' ajuto del ſettore ellittico riferito all' area totale. Se nella *fig.* 5. i punti S, N, H ſiano i medeſimi, che nella *fig.* 3., e ſiano poi A, P i punti dell' afelio e perielio, e la retta HK perpendicolare all' aſſe attraverſo AP prolungata dalla parte di H s' incontri col cerchio circoſcritto in I, e ſi tirino le rette SI, SH, NI; ſi avrà l' angolo ASI, facendo come il ſemiaſſe maggiore trovato NI al ſemiaſſe conjugato medio geometricamente proporzionale fra le diſtanze AS, SP afelia e perielia ſimilmente ritrovate, così la tangente dell' angolo NSH avuto nella riſoluzione del triangolo SLM alla tangente di quell' angolo. Il valore dell' arco $IL = \frac{SN \times IK}{NI} = SN \times$ *ſen.* ANI ſi riduca alle parti angolari facendo come $113 : 355 :: NI : \frac{355}{113} \times NI$, ch' è il valore di mezza la circonferenza, così $\frac{355}{113} \times NI : IL = SN \times$ ſen. $ANI : 180^\circ : \frac{113 \times 180^\circ}{355} \times \frac{SN \times \text{ſen.}\, ANI}{NI}$; fatto queſto valore $= M$, ſi farà come 360° ad $ANI + M$, così il tempo periodico al quarto: queſt' ultimo valore ſarà il tempo corriſpondente all' anomalia ASH; trovato il quale, ſi avrà il tempo dell' arrivo al perielio.

Se il moto ſi faccia nell' iperbola, non difficilmente ſi otterrà il tempo ricercato mediante il valore dell' area iperbolica, che ſi ha per mezzo de' logaritmi: ma egli ſembra molto improbabile, che i corpi, ſe ve n' ha che ſi movano in iperbole, di tal maniera a noi s' avvicinino, che cadano ſotto gli occhi.

Se il moto ſia diretto, o retrogrado, facilmente ſi ſcoprirà dall' oſſervazione ſteſſa della *fig.* 1., delineata anche groſſolanamente dopo determinata la diſtanza della retta PP'', e la poſizione del punto A'', che è il concorſo delle direzioni TE , $T'''E'''$. Si ha in oltre pur queſta regola generale. Se l'uno dei punti S, A'' giacerà tra le rette $T''T$, $P'''P$ indefinitamente prolungate, e l'altro fuori; il moto ſarà retrogrado: altrimenti ſarà diretto. Qui ſi troverà l'uno e l'altro dai punti di dentro: quindi il moto ſarà diretto . Così tutti ſi avranno gli elementi della Teoria, che ſi dovevano determinare.

SCOLIO.

Il metodo finora eſpoſto appoggiato alla prima Propoſizione non può adoperarſi, ove ſi tratti delle comete comuni che non cadono ſotto gli occhi ſe non ſe in diſtanze molto minori; perchè ſe ſi prenda l'arco maggiore, la curvatura e l'ineguaglianza della velocità ſi oppongono all'ipoteſi, ſopra di cui ſi fonda quella ſoluzione: ſe poi ſi prenda l'arco minore, in cui ſembri che quella curvatura ed ineguaglianza ſi poſſa traſcurare , allora l'arco eziandio deſcritto dalla terra è pure rettilineo ſenſibilmente , e vien percorſo colla velocità anche meno ineguale: quindi tanto l'arco cometico, quanto l'arco terreſtre ſi dovranno avere inſieme per linee rette, l'una e l'altra delle quali da quattro direzioni della longitudine è ſegata nella medeſima proporzione del tempo. Per altro in quell'antica mia Diſſertazione ſulle comete, e nello Schediaſma impreſſo dal *Caſtillon* appiè dell'Aritmetica univerſale del *Neuton* io ho dimoſtrato, che nel caſo che quelle quattro rette date paſſano per li quattro binarj de'punti appartenenti alle due rette tagliate in quei punti nella medeſima ragione, rieſce il problema indeterminato per tal modo, che preſo qualunque punto in una di quelle rette in qualunque diſtanza, poſſa condurſi altra retta , che da quelle quattro medeſime ſarà ſegata in quella ſteſſa ragione . Donde naſce , che ſe ſi abbia la determinazione, ella non corriſponde alla natura del problema, ma ai piccioli errori dell'oſſervazioni, e alle quantità neglette per dar luogo alla ſuppoſizione d' un moto rettilineo ed uniforme.

Nel noſtro caſo va la coſa molto diverſamente. Altro metodo, ch' eſporrò fra poco, il quale mediante tre oſſervazioni ricerca la diſtanza nell' ipoteſi d' un moto parabolico, mi fa vedere, che la diſtanza ſteſſa è doppia della diſtanza di ſaturno dal ſole, la quale invero mi ſi appalesò dover' eſſere di quella grandezza, anche eſſendo il moto circolare. In quella diſtanza l' arco anche di ſei meſi non differiſce ſenſibilmente da una linea retta, nè il moto s' allontana dall' uniforme, di maniera che non ne può provenire l' errore neppur d' un ſecondo; mentre il moto della terra in un arco così grande moltiſſimo differiſce dalla retta linea. Quindi nella *fig.* 1. le rette linee $T'E'$, $T''E''$ ſegano la corda TT''' in ragione aſſai diverſa dalla ragione dei tempi, in cui ſegano la corda PP''', il che toglie l' indeterminazione, e dà ſperanza d' uno ſcioglimento abbaſtanza accurato. L' eſattezza della ſoluzione dipende dalla grandezza del numeratore, e del denominatore della formola trovata nella Propoſizione prima $x = \frac{n - n'}{m - m'}$, la quale nel caſo dell' indeterminazione renderebbe vana la ſoluzione, dando $\frac{0}{0}$, o una frazione derivata da' ſoli errori delle oſſervazioni. Quanto più differenti ſaranno tra di sè le ragioni de' ſegamenti di quelle corde, tanto maggiori ſaranno que' valori, e perciò tanto meno ſi altereranno per li piccioli errori delle oſſervazioni; per la qual coſa potrà ſperarſi la determinazione abbaſtanza eſatta, ſe le ultime oſſervazioni ſieno diſtanti l' una dall' altra l' intervallo di ſei meſi. Dopo ſei meſi la corda TT''', che è la baſe della parallaſſe annua, diminuiſce; il che pure nuoce ad una eſatta determinazione. A prima viſta ſembrano ſommamente acconce le oſſervazioni fatte tre meſi avanti, e tre dopo la congiunzione col ſole, che in queſt' anno è ſucceduta poco innanzi al ſolſtizio eſtivo, o l'oppoſizione, che ſi avrà preſſo al ſolſtizio invernale, perchè allora quella baſe non ſarà obbliqua; ma ſe ſi adoperino le oſſervazioni fatte avanti, e dopo la ſtazione, che ſi avrà prima della metà di Ottobre, i ſegamenti della corda TT''' avranno una ragione molto più diverſa dalla ragione de' ſegamenti della corda PP'''. Queſta differenza ſarà ancora molto più grande, ſe un anno intero ſia lontana l' ultima oſſervazione dalla prima; nel qual tempo altresì l' errore nato dalla curvatura dell' arco di queſt' Aſtro ſarà così picciolo, che ſi potrà traſcurare, e agevolmente potraſſi determinare, ſe piacerà, per poterne tener conto: la corda TT''' ſvanirà; ma le corde TT'', TT'' ſaranno abbaſtanza grandi, e la ſoluzione avrà luogo adattata appuntino a quel caſo. Intanto potrà ſperarſi qualche ſucceſſo dalle oſſervazioni fatte nel principio di Aprile, e da farſi nel principio del proſſimo Ottobre con due intermedie aſſai diſtanti da quelle, e da sè ſcambievolmente.

Il metodo, che ſuppone l'orbe circolare, o parabolico, non ſoggiace a queſto pericolo, ſe nella ſoluzione del problema ſi adoperi anche la relazione, che la grandezza della CC' nella *fig.* 2. deve avere alla diſtanza dal ſole. Per l' orbe circolare baſtano due oſſervazioni, tre pel parabolico. Eſporrò queſti metodi nelle due ſeguenti Propoſizioni.

PROPOSIZIONE IV.

Trovare il raggio del cerchio nell' ipoteſi circolare col mezzo di due oſſervazioni.

Primamente queſto raggio ſi troverà poco lontano dal vero col metodo ſeguente. Nella *fig.* 2., che offre due oſſervazioni, ſi troverà la corda TT', e la retta TA, come nella Propoſizione prima: indi nel triangolo STA troveraſſi SA dai lati ST, TA, e dall' angolo in T, tutte coſe note. Poichè tutto l'angolo TAT', che è il moto totale in longitudine di queſto Aſtro aſſai lento, è di pochi gradi; ſarà l' angolo ASH molto picciolo eziandio dopo lo ſpazio di ſei meſi, e perciò la retta SH', che qui ſimilmente quaſi nulla differiſce dalla retta SH, ſarà proſſimamente uguale alla ſomma delle rette SA, AH, la prima delle quali ſe ſi chiami a, l'altra x, ſarà $SH' = a + x$. E mentre ſia il triangolo PAP' iſoſcele, la retta PP' ſarà perpendicolare alla retta AH, e perciò pochiſſimo differente dalla retta perpendicolare alla retta SH, intercetta dalle rette $AP \times AP'$, la quale ſenſibilmente non differirà dalla CC', che le corriſponde, e queſta dall' arco del circolo intercetto fra le rette TC, $T'C'$. Se poi l'angolo PAP' ſi chiami m, ſarà PP' in caſo d' iſoſceliſmo $= 2\,AH \times \tan. \frac{1}{2} PAP' = 2x \tan. \frac{1}{2} m$, in luogo di cui ſi può porre $x \tan. m$, perchè le tangenti de' piccioli angoli ſono proporzionali aſſai proſſimamente agli ſteſſi angoli; e ciò ſarà aſſai proſſimamente il valore dell' arco CC'.

Nella Propoſizione ſeconda ſi è trovato lo ſpazio n, che in un minuto di tempo vien percorſo nella diſtanza media della terra dal ſole. Quindi ſe il tempo fra queſte oſſervazioni, ridotto a minuti, ſi chiami t, ſarà lo ſpazio debito a quel tempo in quel circolo nt. Ora il raggio SH' di queſt'orbita circolare eſſendo $a + x$, ſarà il quadrato dello ſpazio corriſpondente a quel cerchio $= \frac{n^2 t^2}{a+x}$, eſſendo li quadrati delle celerità reciprocamente proporzionali ai raggi de' cerchj. Quel valore fatto $= CC'^2 = x^2 \, tan.^2 m$, ſarà $x^3 + a x^2 - \frac{n^2 t^2}{tan.^2 m} = 0$ l'equazione di terzo grado, che darà il valore ricercato x il più proſſimo al vero.

Trovato il valore x per tale equazione, agevolmente ſi troverà il valore più accurato della diſtanza col metodo di falſa poſizione. Preſo quel valore per la retta AH, e il triangolo PAP come iſoſcele (dalla qual forma pochiſſimo potrà egli differire) ſi avrà $HP = HP' = x \, tan. \frac{1}{2} a$, ed $AP = \frac{x}{coſ. \frac{1}{2} a}$; e nel triangolo TSP ſi avrà ST, e $TP = TA + AP$ coll' angolo STP, e perciò troveraſſi il valore SP, che deve eſſere aſſai proſſimamente uguale al valore SH, e queſto al valore SH', come ancora CC' aſſai proſſimamente uguale al valore PP'. Il quadrato di queſto moltiplicato per SH' deve eſſer uguale al valore ritrovato $n^2 t^2$. La differenza ſarà l'errore da correggerſi per altra poſizione del valore x, il quale ſi dovrà pigliar minore o maggiore, ſecondo che per lo contrario quel prodotto riuſcirà per ſorte minore o maggiore del valore $n^2 t^2$; imperciocchè accreſciuto il valore di x s'accreſcerà tanto PP', quanto SH'. L'error nuovo paragonato col primo eſibirà il valore di x, il quale correggerà l'errore, ſe i precedenti errori ſaranno ſtati piccioli, come ſaranno di fatto: altrimenti lo diminuirà in tal guiſa, che per nuove poſizioni ſi dileguerà ben preſto.

Dalle oſſervazioni del dì 3 Aprile, e 17 Luglio ho trovato la diſtanza TP aſſai proſſimamente $= 19, 6$. Se ſi adoperi la ſeconda oſſervazione ancor più remota, trovato per mezzo di eſſa il valore TA, e da queſto valore levato TP, il rimanente ſi potrà aſſumere per AP; così PP' per $= 2AP \times$ ſen. $\frac{1}{2}$ PAP', e trovato il valore SP nel triangolo STP, ſi avrà $PP'^2 \times SP$, valore da paragonarſi col valore $n^2 t^2$. In tal maniera ſi eviterà l'equazione del terzo grado. Ma anche più facilmente la coſa ſi condurrà ad effetto, dove foſſe nota la longitudine dell' Aſtro in oppoſizione da paragonarſi colla longitudine in congiunzione col ſole, che di leggieri ſi deduce dalle oſſervazioni del meſe di Maggio, e di Luglio: imperciocchè circa la congiunzione lo ſteſſo moto apparente, per altro lentiſſimo, dovette eſſere quaſi accuratamente equabile. La differenza di queſte longitudini ſarà il moto angolare intorno al ſole: facendo come queſta differenza delle longitudini a 360°, così l'intervallo del tempo fra quelle due poſizioni al quarto termine, queſto darà il tempo periodico, dal quale per la terza legge di *Keplero* riſulterà la diſtanza dal ſole.

Ho data qui una ſoluzione di queſto problema analoga al mio metodo più generale che ſerve per le orbite paraboliche; ma eſſo ſi ſcioglie molto più facilmente per la falſa poſizione in queſt' altra maniera. Si prenda nella ſteſſa fig. 2. un raggio SP arbitrario: nel triangolo TSP ſi avrà l'angolo in T, che è la differenza delle longitudini geocentriche del ſole, e dell' Aſtro, e la diſtanza ST del ſole dalla terra: così ſi avrà l'angolo SPT, il cui ſeno è $= \frac{ST \times \text{ſen.}\, STP}{SP}$: eſſo dovrà eſſere aggiunto alla longitudine geocentrica dell' Aſtro data dalla oſſervazione, o dovrà eſſerne ſottratto, ſecondo le diverſe circoſtanze facili a determinarſi, per avere la longitudine eliocentrica dell' Aſtro medeſimo. Così ſi avranno le due longitudini eliocentriche di eſſo corriſpondenti a' due tempi delle due oſſervazioni, e però ſi avrà l'arco deſcritto in quell' intervallo di tempo. Queſto ſi paragonerà a quello, che dovrebbe deſcriverſi in eſſo in eſſo intervallo in vigore della diſtanza aſſunta. Se un anno tropico ſia $= a$; la diſtanza aſſunta $= r$; quell' intervallo $= t$; la circonferenza del circolo $= c$; l' arco, che corriſponde a quel tempo, ſarà $= \frac{tc}{ar^{\frac{3}{2}}}$, ciò che facilmente ſi ricava dalla regola di *Keplero* de' quadrati de' tempi proporzionali a' cubi delle diſtanze: in vigor di eſſa il tempo periodico di eſſo Aſtro ſarà $= ar^{\frac{3}{2}}$ preſo r nelle unità uguali alla diſtanza media del ſole dalla terra; e l' arco cercato ſarà il quarto termine proporzionale dopo queſta quantità, il tempo t, e l' intera circonferenza. Queſto arco confrontato con quello, che avevano dato le due oſſervazioni, dà l'errore della poſizione; la quale rifatta, quanto biſogna, deve dare al fine la vera diſtanza, da cui ſi ricaverà anche il tempo della rivoluzione, che avrà per numero di anni il ſolo valore $r^{\frac{3}{2}}$.

Convien però avvertire di correggere le oſſervazioni dell' Aſtro col liberarle dall' aberrazione del lume, e dalla nutazione, correggendo il luogo del ſole colla nutazione ſola: non occorre aver riguardo alla preceſſione degli equinozj; giacchè la rivoluzione ſiderale dell' Aſtro contiene lo ſteſſo numero degli anni ſiderali, che la rivoluzione tropica degli anni tropici.

Quando nella ſcorſa ſtate del 1781 compoſi queſto opuſcolo, trovai coll' altro metodo la diſtanza 19, 6, ſervendomi di due oſſervazioni, che erano troppo vicine fra loro, come ho detto qui innanzi, onde i piccoli errori delle oſſervazioni portavano un errore più conſiderabile nel riſultato; oltrechè non aveva impiegato le picciole correzioni ſopra accennate, baſtandomi allora di avere a un dipreſſo la diſtanza da determinarſi meglio colle oſſervazioni più lontane, come appare negli Scolj ſeguenti. Adoperando poi delle oſſervazioni più lontane con queſto altro metodo, e facendo uſo delle debite correzioni, ho trovato la diſtanza di 18, 90. Un' oſſervazione del 25 Aprile confrontata con una del 12 Decembre mi ha dato 18, 914, e con una del 21 Febbrajo 18, 892: il numero di mezzo, diſprezzando le milleſime, reſta il ſuddetto 18, 903. Queſto viene confermato anche dalla differenza delle longitudini nella congiunzione, ed oppoſizione, di cui ho pur fatta menzione in queſto opuſcolo. Ma per avere il tempo, e il luogo della congiunzione eſatti, e non all' ingroſſo, non ſi può ſupporre il moto geocentrico dell' Aſtro uniforme; giacchè la diſtanza della terra dal ſole, e dall'Aſtro medeſimo variandoſi, varia la velocità di eſſo moto; e come l' Aſtro non avendo latitudine ſenſibile, ed avendo una luce sì debole, reſta naſcoſto dietro al ſole per troppo lungo tempo; queſta diſuguaglianza nuoce ſenſibilmente alla determinazione cercata. Ho un metodo per evitare queſto inconveniente, che ſpiegherò in altro opuſcolo, dove darò anche l' applicazione di varie combinazioni di oſſervazioni a' metodi qui propoſti.

Aggiungerò qui ſolo, che il Sig. *de la Lande* ha trovato per la diſtanza 18, 913, e calcolando con queſta un gran numero di oſſervazioni ha trovato una differenza di pochi ſecondi; ciò che dimoſtra, che l' orbita non ſi diſcoſta molto dalla circolare, e ci aſſicura, che queſto è un vero pianeta diſcoſto dal ſole quaſi eſattamente al doppio di ſaturno.

PROPOSIZIONE V.

Trovare l'orbita parabolica col mezzo di tre oſſervazioni.

Sieno nella *fig. 6.* tre luoghi della terra T, T', T'' con tre direzioni delle longitudini TE, $T'E'$, $T''E''$, S il luogo del ſole, P, P', P'' tre luoghi dell' Aſtro nell' orbita parabolica, il cui arco in iſmiſurata diſtanza potrà qui prenderſi per rettilineo, e il moto per uniforme. Sia poi il ſegamento Tt della corda TT'' alla corda TT'', come il tempo fra la prima e ſeconda oſſervazione al tempo tra la prima e terza; e ſe la terra ſi moveſſe con moto uniforme per la corda TT'', il luogo di eſſa nella ſeconda oſſervazione ſarebbe in t, e la ſeconda longitudine avrebbe avuto la direzione tP' in vece della direzione $T'P'$ cavata dall' oſſervazione. Soſtituita queſta longitudine alla longitudine oſſervata, e fatti t, t', t'' i tempi dalla prima oſſervazione alla ſeconda, dalla ſeconda alla terza, dalla prima alla terza, ed m, m', m'' i moti in longitudine, che corriſpondono a que' tempi, ſi avrà la ſeguente proporzione $T'P' : TP :: \frac{t'}{\text{ſen.}\,m'} : \frac{t''}{\text{ſen.}\,m''}$, e queſt' altra $T'P' : T''P'' :: \frac{t}{\text{ſen.}\,m} : \frac{t''}{\text{ſen.}\,m''}$.

Queſto teorema ſi deduce da quello, che ho dimoſtrato nella ſeconda delle due operette impreſſe nel Tomo VI. degli Opuſcoli, che dall' Accademia di Parigi ſi pubblicano col titolo di *Memoires preſentès à l' Academie*. Ivi a' luoghi della terra, e della cometa ne' ſuoi archi curvilinei picciolisſimi ho ſoſtituito le interſezioni de' raggi vettori colle loro corde. Dimoſtrai che in caſo, che la ſaetta dell' arco deſcritto intorno al centro delle forze ſia picciola aſſai per riſpetto al raggio vettore, può prenderſi il moto di queſta interſezione per equabile; ſoſtituita poi la longitudine della direzione, tendente dall' interſezione del raggio terreſtre colla ſua corda all' interſezione del raggio cometico colla ſua, alla longitudine della direzione tendente dal luogo della terra al luogo della cometa nella ſeconda oſſervazione, ſi ottengono le proporzioni qui propoſte. Mentre alla interſezione del raggio terreſtre colla ſua corda ſi ſoſtituiſce qui il punto t ſegante la corda ſteſſa in ragione de' tempi, e non curata la ſaetta dell'arco cometico troppo picciola per la ſmiſurata diſtanza, l'interſezione del raggio cometico alla corda dell' arco ridotto al piano dell' eclittica ſi confonde in P col luogo dell' Aſtro, è manifeſto che il medeſimo teorema deve qui pure aver luogo.

Queſto teorema ivi m' offerſe un metodo ſpeditiſſimo, onde determinare l' orbita della cometa, aſſai proſſima alla vera, col mezzo di tre oſſervazioni, adoperando il metodo di falſa poſizione. Imperciocchè, preſa la diſtanza accorciata ſeconda $T'P'$, ſi trovano con quella proporzione la prima, e la terza; e col loro mezzo per una grafica coſtruzione ſpedita, o per la riſoluzione di ſei triangoli, de' quali tre ſono rettangoli, trovaſi tanto la corda PP'', quanto la corda dell' orbita CC'' coi raggi vettori SC, SC''. Ivi poi ho dimoſtrato anche queſt' altro teorema: ſe il prodotto dal quadrato dello ſpazio, che col moto medio della terra ſi percorrerebbe in due minuti di tempo, moltiplicato nel quadrato del tempo t'' ridotto a minuti, ſi chiami a, e la ſomma di tali raggi b; deve eſſere $bc^2 - \frac{c^4}{12b} = a$, traſcurate le quantità, che nel caſo di queſta ſaetta picciola riſpetto al raggio vettore ſicuramente poſſono traſcurarſi: il logaritmo poi di quel quadrato trovai eſſere 0, 756499, al quale aggiunto il doppio logaritmo del valore t'', il valore a facilmente riſulta; ed una volta trovato rimane coſtante in tutte le propoſizioni. La differenza del valore della formola dal valore a è l' errore da diminuirſi dopo la nuova poſizione, o da correggerſi; donde naſce, che per una ſola ſerie di poſizioni ſi deviene ai valori ricercati, mentre col metodo comune ſi ricerca la ſerie di molte ſerie, il che eſigge una fatica di calcoli quaſi intollerabile. Ho poi anche il metodo, con cui per le comuni comete delineata facilmente una figura molto ſemplice, ſi forma giudizio della grandezza da aſſumerſi per la prima poſizione, ſicchè ſi ha appena biſogno della terza poſizione. Agevolmente poi avute tre longitudini, e latitudini l' una dall' altra diſtanti l' intervallo di pochi giorni, e adoperata l'operazione grafica coll'ajuto del calcolo numerario, nello ſpazio di due o tre ore ſi trovano gli elementi proſſimi ai veri, e da correggerſi poi facilmente coll'oſſervazioni più remote.

In queſto metodo ſpeſſe volte può traſcurarſi la riduzione della ſeconda longitudine, potendoſi dimoſtrare, che la retta che congiunge le interſezioni dei raggi vettori colle corde è parallela alla retta che congiunge gli ſteſſi punti degli archi, allor quando la cometa nella ſeconda oſſervazione è in congiunzione col ſole, o in oppoſizione, o sì veramente in una diſtanza dal ſole uguale alla diſtanza del ſole dalla terra; per la qual coſa in quell'Operetta ho omeſſa tal riduzione, di che però ed ivi, e in quell'antica prima Diſſertazione ſopra le comete fatto aveva menzione. Ho poi un metodo generale molto ſpedito d'aver la ragione della riduzione ſteſſa, che ho propoſto alla ſteſſa Accademia, e con molte altre coſe appartenenti alla teoria delle comete eſpoſto in un'opera di giuſta mole, che ho già da gran tempo bella e compiuta, cui già con molti ſupplementi da aggiungerſi ho accennato due anni fa in fine della nuova edizione del mio poema ſopra l'ecliſſi pubblicato in Parigi colla traduzione in franceſe. Queſta riduzione è qui del tutto neceſſaria, dovendoſi a cagion del moto troppo picciolo uſare le oſſervazioni avute in uno intervallo di tempo molto più lungo, in cui ſi può bensì avere per rettilineo l'arco di queſt'Aſtro; ma la curvatura dell'arco terreſtre è sì grande, che non ſi può del tutto traſcurare. Queſta riduzione ſi farà, trovato che ſia l'angolo $T'P't$ per qualunque poſizione.

Queſt'angolo ſi conſeguirà facilmente, e tutta la rimanente perquiſizione potrà effettuarſi nel modo ſeguente. Ne' triangoli TST', TST'' con le diſtanze ST, ST', ST' del ſole dalla terra, e cogli angoli in S uguali al moto del ſole in longitudine corriſpondente ai tempi t, t'', ſi troveranno le corde TT', TT'', e gli angoli in T, T', T'', e le diſtanze TA, $T''A$ nel triangolo TAT''. Facendo t'' : t : : TT'' : Tt, ſi troverà queſto lato del triangolo $TT't$, in cui avraſſi ancora il lato TT', e l'angolo $T'Tt$, differenza degli angoli STT'', STT'. Laonde ſi avrà $T't$, e l'angolo $TT't$, dal quale ſe ſi levi l'angolo $TT'E'$ differenza dell'angolo $ST'T$ dall'allungazione $ST'E'$, ſi avrà l'angolo $tT'E$. Queſte coſe dovranno trovarſi una volta; le quali ſaranno poi le medeſime per tutte le poſizioni inſieme col valore a una volta trovato per mezzo del logaritmo 0, 756499 aggiunto al doppio logaritmo del tempo t'' ridotto a minuti.

Ora preſo un valore arbitrario per la diſtanza $T'P'$, ſi avranno nel triangolo $P'T't$ i lati $T'P'$, $T't$ coll'angolo in T', ch'è il medeſimo che il trovato $tT'E'$. Laonde ritroveraſſi l'angolo $T'P't$ da aggiungerſi qui alla longitudine della direzione $T'P'$ per aver la longitudine della direzione tP', la quale dovrà adoperarſi per trovare i valori m, m' ridotti. Il ſeno di queſt' angolo ſarà $\frac{T't \times \text{ſen.}\, T'tP'}{tP'}$. Per la qual coſa trovato una volta il valore $T't \times$ ſen. $T'tP' = T't \times$ ſen. $T'tE'$, queſto per ciaſcheduna delle poſizioni ſi dovrà dividere per il valore tP', per cui ſi potrà prendere $T'P' - T't$, onde avere la riduzione $T'P't$.

Allora poi ſi avrà $TP = \frac{t''\,\text{ſen.}\, m'}{t'\,\text{ſen.}\, m''} \times T'P'$, e $T''P'' = \frac{t''\,\text{ſen.}\, m}{t\,\text{ſen.}\, m''} \times T'P'$. Togliendo poi TA, $T''A$ ſi avranno le AP, $A''P''$, e perciò nel triangolo PAP'', in cui l'angolo PAP'' è uguale al moto totale m'' in longitudine, ſi avrà PP''. Quindi ſi avranno coll' ajuto delle latitudini PC, $P''C''$, $C''I = P''C'' - PC$ colla corda $CC'' = c$. Nel triangolo SPT co' lati dati ST, TP coll'angolo in T ſi troverà SP, e nello ſteſſo modo SP''. Queſti due lati con PC, $P''C''$, e cogli angoli in

P, P'' retti daranno i raggi SC, SC'', e perciò la ſomma $SC + SC'' = b$. Baſterà qui confrontare il valore bc^2 col valore a, imperciocchè il valore $\frac{c^4}{12b}$ ſvanirà, come ſarà manifeſto a chi ne faccia eſperienza, per il valore della corda c troppo picciolo riſpetto al valore b.

Diſtrutto l' errore col mezzo di alcune poſizioni ſi troveranno tutti gli elementi dell' orbita parabolica, come nella Propoſizione terza. Ho applicato queſto metodo alle oſſervazioni de' giorni 3 Aprile, 7 Maggio, e 17 Luglio, che qui eſibiſco colle poſizioni del ſole.

	T.M.	Long. dell' Aſtro	lat. B	long. ☉	diſt. ☉
Apr. 3	$9^h.19$	$2^s.24°.52',7$	$0.\ 5'.38''$	$0^s.14°.29',9$	1,00124
Mag. 7	8. 35	2. 26. 12,4	0. 8. 36	1. 17. 32,7	1,01019
Lug. 17	15. 17	3. 0. 17,7	0.12. 10	3. 25. 43,2	1,01612

Il tempo medio è per Parigi. Ho per altro tralaſciato i ſecondi a cauſa del moto in uno ancora e più minuti inſenſibile. Nelle longitudini ho uſato le ſole decime parti de' minuti, perchè così non ſi traſcurano ſe non ſe al più tre ſecondi, l' error de' quali in queſte oſſervazioni corriſponde unicamente alla quinta parte di un ſecondo di tempo. Nelle latitudini, che più accuratamente ſi definiſcono per le declinazioni non dipendenti dal tempo, ho ritenuto i ſecondi, e ciò molto più, perchè gli errori di eſſe, molto minori in sè, nuocono aſſai più riferiti ad eſſe cotanto picciole, qualora ſi cerca la poſizione della linea de' nodi, e l' inclinazione, i quali due elementi perciò ſaranno molto meno certi.

Ho trovato i valori $a = 13,1101$, $TA = 14,8947$, $T''A = 15,4811$. Dopo poche poſizioni, nelle quali molto tempo innanzi alla fine del calcolo oſſervai, che il valore della corda PP'' riferito alle diſtanze, era per dare gli errori troppo grandi, poſi $T'P' = 20$, ed avendo veduto, che le picciole differenze della poſizione mi offerivano mutazioni ſmiſurate nella grandezza dell'errore, aſſunſi le rette SP, SP'', PP'' per eguali alle rette SC, SC'', CC''. Il valore bc^2 mi riuſcì 13, 6920, mentre $\frac{c^4}{12\,b}$ foſſe minore di 0, 0001, e perciò da traſcurarſi del tutto. Quindi l'errore fu + 0, 5819. Poſto 19, 8, riuſcì l'errore — 2, 2049. Indi la nuova poſizione dovette eſſere 19, 9584, la qual pur uſata, l'errore fu depreſſo a 0, 0855. Per queſti due ultimi errori trovai le mutazioni aſſai picciole delle rette TP, $T''P''$, PP'', SP, SP'' trovate in queſt' ultima poſizione. Queſte poi corrette adoperai per trovare PC, $P''C''$, e coll' ajuto loro trovai toſto i primi due elementi, e così gli altri tutti col metodo eſpoſto nella Propoſizione terza. Può bensì eſſere che in tanti calcoli numerici mi ſiano sfuggiti degli errori in queſt' età mia d' anni 71, avendogli fatti mentre villeggiava lungi dalla capitale, ſiccome ancora mi trovo, ſcrivendo queſte coſe, dove non ho veruno aſſiſtente ai calcoli. Nondimeno più volte ripetuti gli ſteſſi calcoli, e corretti, mi pare di potermene fidare; e traſmeſſi poi queſti elementi a Parigi, furono giudicati abbaſtanza congruenti con quelli, che ivi da altri furono ritrovati con altri metodi, e dopo fatte molte oſſervazioni.

Qui aggiungerò una coſa, che diminuita alquanto la diſtanza può ritrovarſi altra corda, che al problema ſoddisfaccia, in cui però l' Aſtro s'allontanerebbe dal ſole, e dalla terra, e perciò molto tempo innanzi ſarebbe egli ſtato viſibile. Avendo da principio uſate le oſſervazioni più vicine per la corda più vicina, col mio metodo comune alle orbite delle comete, trovai un' orbita, che reſtò toſto dalle ſeguenti oſſervazioni abbandonata, il che addivenne pur anche ad altri. Conſiderando

rando a fondo la coſa trovai avervi quattro corde, ciaſcuna delle quali ſoddisfarebbe, due proſſime e due remotiſſime: eſcluſe quelle, ſi dovette ricorrere a queſte.

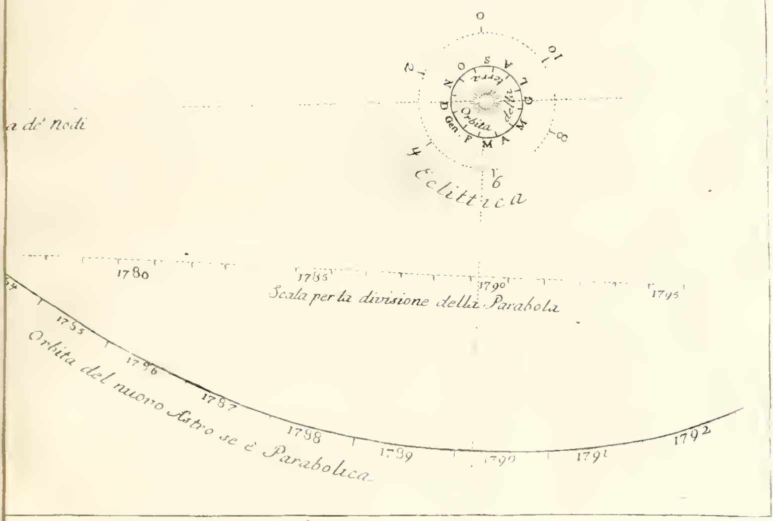
Proporrò qui infine dell'operetta gli elementi trovati per la parabola, e vi aggiugnerò la figura, *(Tav. anneſſa)*, in cui è delineato ogni movimento di queſto Aſtro, che ſi avrà per più anni eziandio dopo l' arrivo al perielio, ſe l' orbita di eſſo è parabolica. La ſpecie dell' orbita ſi determinerà più accuratamente dopo molte combinazioni di quattro oſſervazioni, e ciò anche più accuratamente ſe ciaſcuno di queſti luoghi ſi cavi per interpolazione da più oſſervazioni fatte in molti giorni, onde gli errori di eſſe ſi diſtruggano ſcambievolmente. Pel metodo parabolico potranno uſarſi con maggior frutto, e con calcolo più facile i luoghi corriſpondenti a tre meſi in circa, ma in eguali intervalli dal mezzo corriſpondente alla ſteſſa oppoſizione, intorno alla quale facilmente ſi oſſerverà l' Aſtro nel fine di queſt' anno, e nel principio del ſeguente: imperciocchè allora il punto t cadrà nella retta $T'E'$ della *fig.* 6, coſicchè non ſia d' uopo della riduzione della ſeconda longitudine; eſſendo poi eguali i tempi t, t', ſarà $TP : T''P' :: \text{ſen.}\, m' : \text{ſen}\, m$, e perciò ſenz' aver alcun riguardo alla ſeconda diſtanza accorciata TP, ſi potrà la poſizione fare per la ſola TP, preſa la quale, e fatto una volta il valore $\frac{\text{ſen.}\, m}{\text{ſen.}\, m'} = r$, ſarà $T'P' = r \times TP$, come propoſi nella ſeconda di quelle mie operette ſtampate per ordine dell' *Accademia*; ed in vero ſi potrà pur anche, ſe piaccia, uſare il metodo della prima operetta, che riduce il problema ad un' equazione di ſeſto grado. Ma quelle operette intenderſi non poſſono interamente, ſe non ſi corregga l' erronea traſpoſizione delle tavole, che giunto in Francia trovai in quel ſeſto volume impreſſo a Parigi avanti la mia venuta: la tavola che ivi fu appoſta dopo il fine della prima operetta inſieme colla terza appoſta dopo il fine della ſeconda, devono eſſere la prima, e la ſeconda della ſeconda operetta; e le due prime appoſte all' operetta ſeconda appartengono alla prima. Eſſendo le medeſime operette moltiſſimo nello ſteſſo volume diſtanti l' una dall' altra, e le pagine, ove debbono inſerirſi da' legatori, non incontrandoſi col fatto, neſſuno a caſo indovinerà i veri luoghi delle tavole, e perciò ſenza ſiffatto avvertimento quell' operette non poſſono eſſere di alcun uſo.

Se uſar ſi debbano le oſſervazioni di due o tre anni, ſi dovrà far conto della curvatura, e dell' ineguale velocità, il che certamente per l' uno e l' altro metodo facilmente ſi otterrà, determinando l' effetto della gravità verſo il ſole relativamente alla diſtanza da eſſo proſſimamente cognita, il quale effetto determina la poſizione del punto dell' arco, in cui è l' Aſtro, dal punto della corda, da cui è diviſa in ragione dei tempi. Qui preſa la diſtanza = 10 trovai la riduzione della ſeconda longitudine indi nata non giugner neppure ad un ſecondo, come di ſopra ho accennato.

Elementi in ſuppoſizione dell' orbita parabolica.

Longitudine del nodo	2^{s}. 25°. 13, 3
Inclinazione	2. 17, 6
Luogo del perielio nell' orbita	5. 22. 16, 9
Diſtanza perielia	10, 2756
Arrivo al perielio	13. Marzo 1790.

Moto diretto.


a de' nodi
0
2
4
6
8
10
O
S
A
L
G
M
A
M
F
Gen.
D
N
Terra
Orbita
della
Eclittica
1780
1785
1790
1795
Scala per la divisione della Parabola
84
1785
1786
1787
1788
1789
1790
1791
1792
Orbita del nuovo Astro se è Parabolica

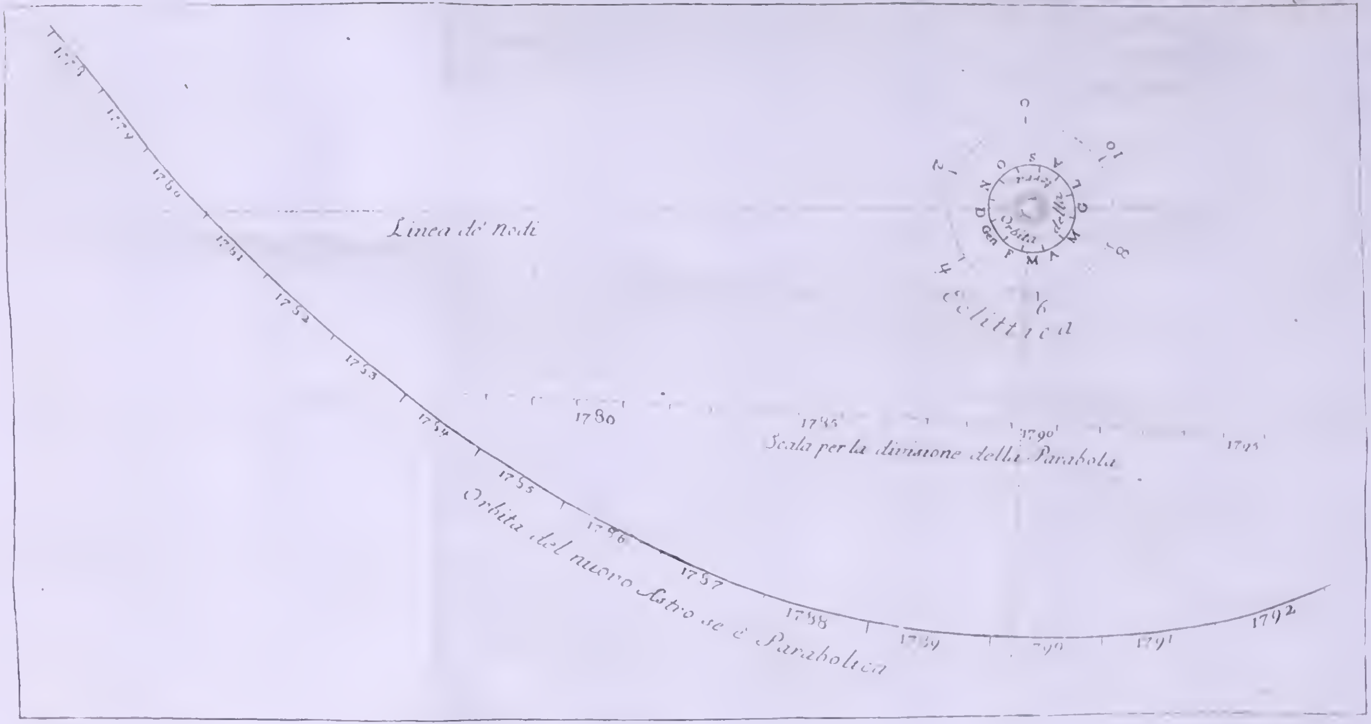

1778
1779
1780
1781
1782
1783
1784
1785
1786
1787
1788
1789
1790
1791
1792
Linea de' nodi
Orbita del nuovo Astro se è Parabolica
1780
1785
1790
1795
Scala per la divisione della Parabola
Orbita della Terra
Gen
F
M
A
M
G
L
A
S
O
N
D
0
2
4
6
8
10
Eclittica

Fig. 1

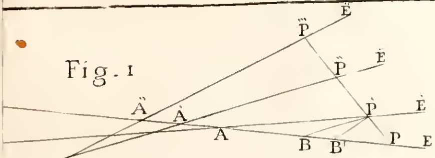

E‴
P‴
P″
E″
P′
E′
A″
A′
A
B
B′
P
E

Fig. 2

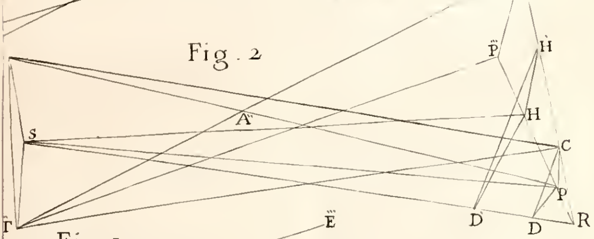

C′
P″
H′
A′
H
S
C
P
T′
D′
D
R

Fig. 1

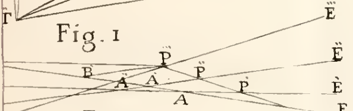

E‴
P‴
B′
P″
E″
A″
A′
P′
E′
A
P
E

Fig. 2

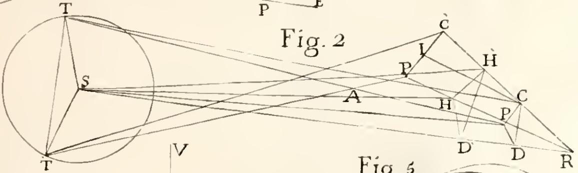

T
C′
I
H′
P′
S
A
H
C
P
T′
D′
D
R

Fig. 4

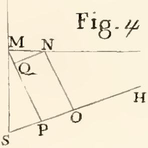


Fig. 5

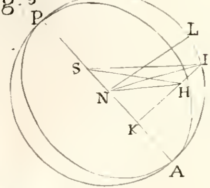
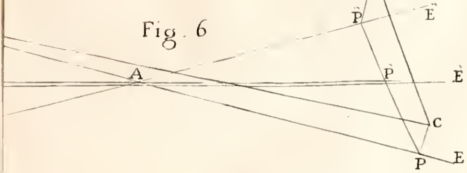


Fig. 6



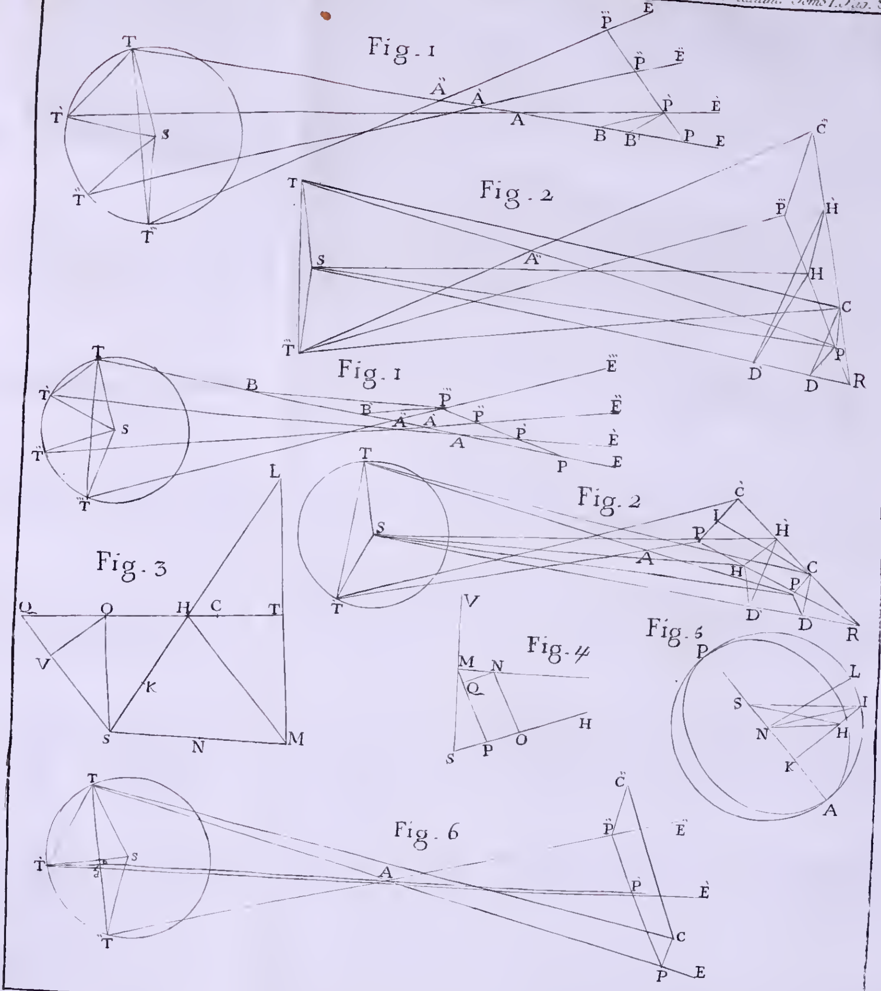

T
T'
S
T''
T'''
A'''
A''
A
A'
B
B'
P'''
P''
P'
P
E
E''
E'
E
C''
P''
H'
H
C
P
D'
D
R
A''
L
Q
O
H
C
T
V
K
S
N
M
V
M
N
Q
S
P
O
H
P
L
S
I
N
H
K
A
C''
P''
E''
A
P'
E'
C
P
E
d

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

RISULTATI

Di ſperienze ſopra l' elaſticità de' Fluidi Aeriformi permanenti ſul mercurio.

Del Sig. FELICE FONTANA Direttore del Gabinetto Fiſico del Gran Duca di Toſcana.

MI pareva, che foſſe una ricerca nuova ed importante per la fiſica moderna di conoſcere le leggi, con cui gli ſpazj occupati dalle arie fattizie erano diminuiti dai peſi comprimenti, e ſe le denſità di quei fluidi elaſtici erano proporzionali ai peſi comprimenti, come lo ſono nell' aria atmosferica.

Per maggior facilità io ho penſato di far le mie eſperienze nella macchina da comprimer l' aria, ed ho paragonato gli ſpazj occupati dalle arie artificiali a quelli dell' aria comune, che mi ſervì ſempre di termine di paragone. Ho fatto uſo di due cilindri di criſtallo alti 10 pollici e larghi mezzo pollice ben calibrati per tutto, e ne' quali il pollice era diviſo in 20 parti.

La quantità delle arie introdotte era coſtante, ed occupava nei tubi otto pollici in altezza. In uno dei due tubi laſciai per tutto il tempo delle mie ſperienze l' iſteſſa quantità, e qualità di aria comune, cioè otto pollici in altezza. I due tubi erano ſituati dentro di una tazza, ed immerſi in parte nel mercurio l' uno a canto dell' altro in modo che era facile oſſervare gli ſpazj occupati dalle arie attraverſo il groſſo recipiente della macchina di compreſſione. Oſſervava, che il calore foſſe ſempre il medeſimo, e paragonava le diminuzioni delle arie fattizie con quelle dell' aria comune tutte le volte che queſte erano ridotte a quattro pollici, a due poll., ad un poll.

I.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Deflogiſticata di $\frac{1}{59}$.

II.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Flogiſticata di $\frac{1}{100}$.

III.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Infiammabile di $\frac{1}{60}$.

IV.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Nitroſa di $\frac{1}{100}$.

V.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Fiſſa di $\frac{1}{60}$.

VI.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Vitriolica di $\frac{1}{32}$.

VII.

L' aria comune fu trovata egualmente compreſſibile dell' aria acida Marina.

VIII.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Alcalina di $\frac{1}{57}$.

IX.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' *aria Regia* dello ſtagno di $\frac{1}{100}$.

X.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Spatoſa di $\frac{1}{30}$.

XI.

L' aria comune fu trovata egualmente compreſſibile dell' aria Arſenicale.

XII.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Epatica di $\frac{1}{45}$.

Il Cavalier *Newton* ha dimoſtrato che ſe le particelle d' un corpo ſi reſpingono con forze reciprocamente proporzionali alle loro diſtanze, comporranno un fluido, la denſità del quale ſarà proporzionale ai peſi comprimenti. Molti Fiſici hanno dedotto da quella verità matematica, che l'aria doveſſe la ſua elaſticità e natura ad una tal forza.

Qui abbiamo dodici fluidi o arie oltre l' aria comune, in cui ſi verifica la legge fiſſata dal *Newton*, giacchè le minime differenze trovate da noi coll' eſperienza ſono traſcurabili, nè l' aria comune ſteſſa ſegue a rigore quella legge, e queſte dodici arie ſon ben lontane dal formare un fluido elaſtico ſimile all' aria comune, che anzi ſono tutte dodici di una natura affatto differente fra loro, e differente dall' aria comune. Il teorema del *Newton* ſerve a provar ſolamente, che le noſtre arie fattizie convengono bensì coll' aria comune nella elaſticità, oſſia che quella forza ideale di repulſione è ſufficiente a rappreſentare i fenomeni delle elaſticità delle arie, ma non prova per queſto che eſiſta realmente ne' corpi, e che quei fluidi ſieno della medeſima natura ed indole dell' aria comune. Io ho ancor trovato per eſperienza, che gli ſteſſi fluidi aeriformi di ſopra ſi dilatano nel vuoto della ſteſſa quantità, di cui ſi ſono condenſati nel pieno, o nell' aria compreſſa.

Deve bensì parer ſingolare, che tanti fluidi, e sì diverſi fra di loro oſſervino una medeſima legge di dilatazione e di riſtringimento; il che farebbe credere che vi è una forza fiſica in natura, un principio non ancora noto agli Oſſervatori, per cui le particelle dei corpi nel momento, che diventano elaſtiche fra di loro, e permanenti ſul mercurio, ſono allontanate e reſpinte con quelle date leggi, che ſi ſono vedute; e queſta forza pare unica e ſempre l' iſteſſa, giacchè produce i medeſimi effetti ſopra tante ſoſtanze diverſe, e li produce coſtantemente in tutti i luoghi, ed in tutti i tempi.

Un' altra verità par che ſi poſſa dedurre, ed è, che l' elaſticità non è una forza eſſenziale, non è una forza intrinſeca dell' aria atmosferica, giacchè ſi vede che quella ſteſſa forza è comune a tanti altri fluidi aeriformi, che ſono sì differenti fra di loro.

Reſterebbe da eſaminare ſe quel medeſimo principio, che rende elaſtici tanti fluidi aeriformi, è ancora la cagione dell' elaſticità di tutti gli altri corpi anche ſolidi, che ſarebbe una ſcoperta importante per la fiſica generale, e di una gran ſemplicità. Alcune ſperienze fatte ſopra l' avorio, il vetro, e l' acciajo mi fanno ſoſpettare, che l' elaſticità di quei corpi è ſoggetta alle medeſime leggi, onde che il principio foſſe ancora l' iſteſſo, e la differente elaſticità nei diverſi corpi poteſſe derivare dai diverſi contatti delle molecole componenti. Ma molto mi reſta ancora per aſſicurarmi della vera natura di queſto principio generale, e come renda elaſtici i corpi, benchè molte ſperienze da me fatte mi luſinghino, che la ricerca non è affatto impoſſibile.

Conviene, che io dica qualche coſa ſopra l' aria, che ho chiamato *Regia*, e della quale poche perſone poſſon intender coſa ſia, e quali ne ſono le principali proprietà. Io trovai il modo di far queſt' aria nel 1778 in Londra, e la cavai dallo ſtagno per mezzo dell' acqua regia.

Nel medeſimo tempo trovai un' altra aria cavata parimente coll' acqua regia, la quale ſi ottiene tanto dalla platina, che dall'oro, e che chiamai ſin d'allora aria della *Platina*. Queſta ſeconda aria ſi ottiene quando la diſſoluzione della platina, o dell'oro comincia a proſciugarſi. Hanno tutte due queſte arie delle proprietà ſingolari, che farò conoſcere nella mia opera *ſulle Arie in generale*. Non ho fiſſato nè il peſo, nè l'elaſticità dell'aria della platina, e dell'aria dell'oro per le ragioni che ſaranno dette allora. Il Signor *Fabroni* ha bensì parlato di queſte due nuove mie arie nelle note al *Cronſted*, che ſi doveva pubblicare in Londra ſino dal 1779, e che depoſitò manoſcritte nelle mani del noſtro comune e riſpettabile amico il Sig. *Kirwan*.

Nella mia opera *ſulle arie* da pubblicarſi io eſaminerò coll'eſperienza alla mano le proprietà ſingolari di queſte due nuove arie; e farò molte altre ricerche relative alle altre arie in generale, e ſpecialmente ſe le dilatazioni di eſſe ſieno proporzionali alle differenze del calore, e quanto ne deviino. Queſti eſperimenti ſono molto delicati, ed eſigono moltiſſime avvertenze nel farli. Ho ancora voluto fiſſare le leggi delle dilatazioni dei fluidi aeriformi eſpoſti al medeſimo grado di calore, ed ho ottenuto de' riſultati, che non ſono gran fatto uniformi a quelli pubblicati negli Atti di Berlino l'anno paſſato dal chiariſſimo Signor *Achard*; la medeſima diſcrepanza e maggiore io ritrovo nelle gravità delle diverſe arie pubblicate dal medeſimo Sig. *Achard*, nè io poſſo ſoſpettare alcun errore nel metodo da me praticato. Nell'opera del Signor *Kirwan* pubblicata nelle Tranſazioni di Londra l'anno paſſato *ſopra la quantità delle molecole acide, che ſi trovano negli acidi ordinarj*, ſi leggono i riſultati delle mie ſperienze fatte a Londra nel 1778 ſopra i peſi delle arie naturali, ed artificiali, e queſti eſperimenti ſaranno di nuovo ripetuti da me nella mia opera citata di ſopra, acciocchè i peſi ſieno determinati anche con maggior preciſione.

PRINCIPJ GENERALI

Della ſolidità, e della fluidità de' Corpi.

Del Sig. FELICE FONTANA Direttore del Gabinetto Fiſico del Gran Duca di Toſcana.

I.

QUalunque particella di materia tende ad accoſtarſi a qualunque altra per il principio d' attrazione, e da queſta forza riſultano i corpi ſolidi.

II.

Se nella natura non regnaſſe che queſta ſola forza, tutto ſarebbe ſolido, ed immobile.

III.

Se vi ſono de' corpi fluidi non vi poſſono eſſere che per un altro principio, o forza oppoſta alla prima, che li rende tali, onde ſe la prima forza tende ad accoſtare le particelle della materia, l' altra deve neceſſariamente allontanarle.

IV.

Tutti i corpi fluidi diventan ſolidi nel freddo, e il freddo naturale della Siberia rende ſolido il mercurio medeſimo.

V.

Tutti i corpi ſolidi diventan fluidi nel caldo, il quale può aumentarſi a ſegno, che ſi riſolvano fino in vapori inviſibili; onde la materia del calore qualunque ella ſia, e comunque ſi poſſa trovar modificata nelle diverſe circoſtanze de' diverſi corpi, è il ſecondo principio attivo, che regna nella natura, e ſarà chiamato Forza Eſpanſiva, perchè tende ad allontanare da sè le parti componenti dei corpi.

VI.

I fluidi anche i più peſanti, tolte e ſcemate le reſiſtenze eſterne, ſi diſſipano in un momento, come ſi vede in una goccia d'acqua, e fin di mercurio meſſe nel vuoto. Dunque la forza eſpanſiva, che è in eſſi, è in una continua azione, o *niſo*, ed è maggiore della forza d'attrazione, che tenderebbe a conſolidarli.

VII.

La forza eſpanſiva ne' fluidi non è inferiore alla forza di gravità di eſſi fluidi, giacchè col ſolo ſcemarne la preſſione eſterna ſopra di eſſi, i fluidi ſi diſſipano in vapori, e ſorton dai corpi in cui ſi trovano.

VIII.

L'aria comune, l'aria fiſſa, le ſoſtanze ſpiritoſe e meno peſanti, meſſe in altre più peſanti (come per eſempio l'acqua), l'aria medeſima aſſorbita dal carbone, potranno ſortire dai fluidi, e dai corpi in cui ſi trovano, non perchè ſieno elaſtiche dentro quelle ſoſtanze, ma bensì perchè, ſcemata la preſſione eſterna, la forza eſpanſiva prevale alla gravità, e le ſpinge, e urta, e caccia da eſſi in tutte le direzioni.

IX.

La fluidità ne' corpi può conſiderarſi come uno ſtato accidentale di eſſi, giacchè ſi arriva dal filoſofo a torla in tutti fuorchè nell' aria, che per analogia non può eſſere eccettuata dagli altri fluidi, benchè il grado di freddo per tal effetto debba eſſer molto maggiore che negli altri.

X.

Queſta forza eſpanſiva comune ai fluidi e ai ſolidi può eſſere una delle principali e primitive cagioni delle ordinarie evaporazioni, e produrre fino le evaporazioni de' corpi ſolidi ſtaccando e ſollevando le impercettibili molecole di eſſi, giacchè una molecola quaſi iſolata può conſiderarſi beniſſimo come dominata dalla forza eſpanſiva.

XI.

In queſta maniera ſi vede che nei fluidi ſi debbono conſiderare due forze, l' una di gravità, l' altra d'eſpanſione; e da queſti due principj biſogna partire per render ragione delle qualità, o leggi che ſi oſſervano in eſſi.

XII.

I fluidi non elaſtici, come l'acqua, il mercurio.... non ſono ſenſibilmente compreſſibili, almeno cogli ordinarj metodi, che ſi praticano: ſono eſſi egualmente incompreſſibili anche allora che ſono penetrati dal calore, e ſi ſa che ſi dilatano ſenſibilmente col creſcer ſenſibilmente il calore.

XIII.

Si può ſpiegare il ſingolar fenomeno della incompreſſibilità dei fluidi non elaſtici, e dilatati dal calore ſenza ſupporre una forza infinita nella materia del calore paragonata colle preſſioni eſterne. La ſola variazione de' contatti, e de' ſiti delle molecole incompreſſibili baſta a tutto. Queſte molecole potendo occupare per il calore introdotto degli ſpazj maggiori di prima, e nel tempo ſteſſo trovarſi in contatti continuati potranno reſiſtere a tutte le preſſioni eſterne, le quali preſſioni non avranno alcuna azione contro della materia del calore. Per iſpazj maggiori non altro intendo che un minor numero di molecole, che ſi trovano in uno ſpazio medeſimo.

XIV.

La forza de' vapori proviene da una gran quantità della materia del calore, che ſi uniſce ad eſſi in quello ſtato. Si è ſcoperto in queſt'ultimo tempo, che la materia del calore, che è in tutti i corpi, non vi è diſtribuita, nè in ragione de' volumi, nè della quantità di materia, ma ſecondo l' indole e natura diverſa dei diverſi corpi. Si è trovato ancora, che i corpi nel paſſare dallo ſtato di fluidi a quello di ſolidi perdono una grandiſſima quantità di calore, e che per l'oppoſto ne acquiſtano altrettanta quando dallo ſtato di ſolidi ritornano in fluidi. L'acqua per eſempio perde 58 gradi di calore nell'atto che ſi diaccia, e ne acquiſta il diaccio 58 nell' atto che ritorna acqua: così mille altre ſperienze hanno fatto vedere, che i corpi contengono una grandiſſima quantità di materia del calore, e queſto calore è preſo da quelle minime molecole nell' atto, che diventano vapori, e lo perdono quando ritornano a formare i corpi di prima. Non ſi ignorano le forze de' fluidi, che ſi riducono in vapori, e ſi ſa quel che poſſono poche gocciole di acqua, o di mercurio rinſerrato, a cui nulla par che poſſa reſiſtere; nè ſi ignora la forza prodigioſa del calore, che urta, e impelle tutti i corpi per tutte le direzioni, talchè non è più ſorprendente che nell' atto di unirſi la materia attiviſſima del calore in sì gran quantità ai vapori, e nell' unirviſi nell' iſtante come fa, i vapori vincano tutti gli oſtacoli più forti.

XV.

I vapori ſono facilmente compreſſibili, oſſia i fluidi incompreſſibili ridotti in vapori ſi comprimono facilmente. Tutte le ſperienze ci aſſicurano di queſta verità, e baſta applicare al vapore una forza maggiore di quella, ch' egli ha di eſpanderſi, per ridurlo ſotto un volume minore.

XVI.

Si è detto perchè i fluidi ſieno incompreſſibili, benchè penetrati più o meno dal calore. Queſta cauſa non può aver luogo per neſſun conto nei vapori, perchè ſi può provar facilmente, che le molecole di queſti non ſi toccano per neſſun modo a differenza di quelle de' fluidi; e ſi può fino provare che vi è tal vapore, in cui le particelle ſono delle centinaja di migliaja di volte più lontane, che in altri. L' acqua ridotta in vapore può occupare uno ſpazio 20000 volte maggiore di prima. Non è adunque ſtraordinario, che i vapori ſi poſſano comprimere, giacchè non ſi ha da vincere in eſſi, che la ſola forza sfiancante del calore.

Di qui ſi vede quanto ſia precaria l'ipoteſi di quei filoſofi, i quali hanno immaginato una forza di *repulſione* nelle molecole de' vapori, ſolo perchè non ſapevano ſpiegare altrimenti gli effetti di eſſi vapori. Coſta poco al matematico l' immaginarſi delle forze in rapporto dei fenomeni medeſimi, e di figurarſi che le une comincino ad operare dove le altre finiſcono, e che paſſino da repulſive in attrattive, e da attrattive in repulſive ſecondo i biſogni. Ma prima d'ogni altro biſogna provare che tali forze veramente eſiſtano in quelle date circoſtanze, e caſi, e che ſieno in un rapporto eſatto cogli effetti che vogliamo ſpiegare. La forza adunque de' fluidi ridotti in vapore, come l'acqua, il mercurio..,.. deriva dalla materia del calore, che è aſſorbita da eſſi in quello ſtato, e non già dalla forza di repulſione per cangiate diſtanze di quelle impercettibili molecole. Creſce ne' vapori la forza all'aumentarſi del calore, e nel momento in cui ceſſa il calore corrono a ricomporre il corpo fluido di prima.

XVII.

Noi abbiamo eſaminato i corpi ſolidi, i corpi fluidi, e i corpi ſotto forma vaporoſa, e ſi è cercato di accennar le cagioni dei loro differenti ſtati. Ora ci rimane di eſaminare un' altra ſorta di fluidi, che meritano una diſtinzione particolare, che forma in oggi uno de' più vaſti rami della fiſica delle arie, e delle operazioni chimiche più dilicate. Queſte ſoſtanze ſi preſentano ſotto forma di aria elaſtica, traſparente, compreſſibile, che il freddo e il caldo reſtringe e dilata, ma che non riducono a formare il fluido di prima.

XVIII.

Queſti fluidi aeriformi ſi poſſono ridurre a tre claſſi principali, che hanno la proprietà comune di eſſer permanenti ſul mercurio, ma non già quando ſono a contatto dell' acqua, o di altre ſoſtanze fluide. Altri ſono aſſorbibili per intiero dall' acqua, altri ſolo in parte, ed altri non lo ſono punto. I primi ſono l' aria acida marina, l' aria acida vitriolica, l' aria alcalina, l' aria ſpatoſa, e queſti formano la prima claſſe. Nella ſeconda claſſe mettiamo l' aria fiſſa, che non è aſſorbita dall' acqua, che del ſuo proprio volume. Nella terza ſi dovrà collocare l' aria nitroſa, l' aria infiammabile, l' aria puriſſima, e l' aria detta flogiſticata.

Conviene però riflettere, che queſti fluidi aeriformi per rapporto alla ſorbibilità coll' acqua non differiſcono, che dal più al meno; perchè ho provato per eſperienza, che anche i non aſſorbibili ſono più o meno aſſorbiti, ſe ſi mettono in contatto dell' acqua privata della ſua aria naturale; ed ho fino trovato con particolari eſperienze, che ſono aſſorbiti beniſſimo, ſe ſi tengono lungo tempo a contatto dell' acqua benchè ſaturata della ſua aria naturale.

XIX.

Si è veduto che il calore riduce in vapori i fluidi, ma ſi è ancor veduto che appena ceſſato il calore ritornano i vapori a formare i fluidi di prima. Vi è adunque qualche altro principio oltre il calore, che rende permanenti nel freddo i fluidi aeriformi. Non è difficile di provare che queſto principio è ciò, che i chimici chiamano flogiſto, e che mille fenomeni di compoſizioni e decompoſizioni di corpi ne dimoſtrano coll' ultima evidenza le ſue proprietà, e l' eſiſtenza.

XX.

Si può dimoſtrare, che le arie della prima claſſe contengono di quel principio, e che quanto più ne hanno diventano tanto meno aſſorbibili all' acqua, ma non ſono però ſaturate del tutto da eſſo, e conſervano ancora una parte della loro natura primitiva. La ſola aria nitroſa ſi può conſiderare per ſaturata dal flogiſto, cioè per l' acido nitroſo ſaturato da eſſo, giacchè non dimoſtra punto la ſua natura acida in quello ſtato, fuorchè nelle circoſtanze da me pubblicate nella mia opera ſull' *aria nitroſa*; e perchè l' aria nitroſa è ſaturata bene dal flogiſto, non è aſſorbibile dall'acqua. Laddove tutti gli altri mantengono ancora in parte almeno le loro primitive qualità, per cui hanno più attrazione coll' acqua che col flogiſto, onde quando ſono a contatto di eſſa ritornano fluidi come prima.

XXI.

L' aria fiſſa contiene del flogiſto ed un acido ſottiliſſimo e debole, e perciò è aſſorbita dall' acqua meno delle arie della prima claſſe, e più di quelle della terza.

XXII.

L' aria nitroſa è compoſta di flogiſto, e di acido nitroſo ſaturato perfettamente; onde s' intende ſubito perchè non ſia aſſorbita dall' acqua. Le altre arie di queſta ultima claſſe non ſono ancora ben conoſciute, onde poco o nulla ſi potrà pronunziare ſopra di eſſe.

XXIII.

L' aria infiammabile ha ſicuramente il flogiſto per uno de' ſuoi componenti, ma nulla ſi può dire degli altri

altri componenti, che pur deve avere. L'aria infiammabile non s' infiamma mai ſola, anzi ſpegne i lumi, e fino il carbone acceſo; ma s' infiamma, e arde ſe è meſcolata coll' aria comune. Conviene adunque conſiderarla per una ſoſtanza combuſtibile come tutte le altre, ma più pura e più ſemplice della fiamma ordinaria degli altri corpi combuſtibili, che non ardono mai nè anco eſſi ſenza l' aria reſpirabile, o nel vuoto; nè forſe altro arde, e s' infiamma ne' corpi, che l' infiammabile, o i componenti di eſſa aria, che ſi trovano dentro i corpi combuſtibili. La gran leggerezza dell' aria infiammabile farebbe credere, che foſſe compoſta di qualche principio ſottiliſſimo, ed aſciutto, il quale non aveſſe alcuna affinità, o pochiſſima coll' acqua, ma che foſſe incorporato bene col flogiſto, talchè s' intenderebbe ſubito allora, perchè non è aſſorbibile dall' acqua. Ma non è facile d' immaginare tali eſperienze, che ci decompongano quell' aria, e per cui ſi poſſa giudicare della natura de' ſuoi componenti. Ho intrapreſo altre volte un ſimile travaglio, ma ſono ancor lontano da poter pronunziare con ſicurezza. Si cava comunemente cogli acidi, ma ſi può cavare ancora colle ſoſtanze alcaline, e fino col ſolo fuoco dai metalli. Si dimoſtra che non eſiſte in eſſi ſotto forma d' aria, perchè non ſi cava dal ferro coll' acido nitroſo.

XXIV.

Il fuoco o la fiamma non è una pura operazione meccanica, come la maggior parte de' filoſofi ha creduto fino a queſti ultimi tempi. L' oſtinazione di non volere uſare nella ſpiegazione de' fenomeni naturali, che de' principj dedotti dalle più ſemplici leggi del moto, e degli urti conoſciuti fra corpo e corpo, ha ritardato di quaſi un ſecolo i progreſſi della fiſica. Ma da poco in qua felicemente queſta ſcienza ha ricevuto un' eſtenſione, di cui non pareva nè anco capace, e queſta ſi deve alla ſola chimica, per cui due ſommi uomini meritano la più grande ſtima dalla poſterità i Sigg. *Bergman*, e *Scheele*.

La fiamma, o il corpo che brucia, è in uno ſtato di nuove decompoſizioni, e di nuove combinazioni, le quali variano all' infinito al variare della natura, e componenti dei corpi combuſtibili. Non ſi dà mai fiamma ſenz' aria, nè vi è altra aria per la fiamma, che l' aria reſpirabile. Da queſte moltiplici decompoſizioni ſi ſchiude la materia del calore; ed è molto veriſimile, che ſi ſchiuda allora, o ſi precipiti la materia, che forma la luce, la qual luce ſi diffonda rapidamente per tutto all' intorno, e renda viſibili i corpi. La luce terreſtre, o de' corpi combuſtibili è molto analoga alla luce ſolare, e rendono l' una e l' altra viſibili i corpi ſenza biſogno d' aria.

XXV.

La fiamma è adunque per me una operazione tutta chimica, in cui ſi fanno continuamente delle decompoſizioni, e compoſizioni fra l' aria pura dell' atmosfera, ed il flogiſto de' corpi combuſtibili. Nell' incontro delle materie combuſtibili coll' aria ſeguono mille modificazioni nuove relative alla diverſa natura de' corpi.

Per modificazione di ſoſtanze, e di corpi io non voglio altro intendere, che ſemplici decompoſizioni di corpi più compoſti, e compoſizioni di altri più ſemplici, non conoſcendo alcuna eſperienza, o fatto ſicuro e luminoſo nella ſiſica, nè in tutta la chimica, che un corpo abbia propriamente cangiato la ſua natura di prima in un' altra eſſenzialmente diverſa. Tali metamorfoſi ſi ſuppongono, è vero, continuamente da' filoſofi, che non hanno eſaminato come conveniva le genuine proprietà de' corpi, e che hanno preſo o un cangiamento apparente e accidentale de' corpi per un cangiamento della natura medeſima del corpo, o quel che è peggio abuſando della parola *cangiamento* hanno confuſo i cangiamenti nati per diminuiti o accreſciuti principj colla cangiata natura del corpo medeſimo. All' uomo non è ancor dato, che ſcomporre un certo limitato numero di corpi compoſti in altri più ſemplici, e di ricomporne di nuovo un numero ancor minore de' primi; ed in queſto il filoſofo non fa altro, che ſecondar la natura, che tende a render più ſemplice il più compoſto, e più compoſto il più ſemplice.

XXVI.

La materia elettrica non è certamente un principio ſemplice, come una gran parte de' fiſici ha creduto, ma è una vera fiamma, o ſoſtanza in combuſtione. Si vede in fatti, che è ſempre accompagnata da un forte odore, quaſi direi di fosforo, e di zolfo. Si ſa che ſi ſpegne nel vuoto perfetto, come ſi ſpengono tutte le altre fiamme, o corpi in combuſtione; non s' ignora più, che diminuiſce le arie reſpirabili, come lo fanno tutte le arie flogiſtiche, e la fiamma ſteſſa; tinge in roſſo il tornaſole, e precipita la calce in terra calcare, e criſtalizza i ſali cauſtici vegetabili quando ſi fa paſſare attraverſo l' aria dentro cannelli di vetro anche col mezzo di conduttori d' argento puriſſimo. La luce dell' elettricità è poi in tutto ſimile a quella di tutte le altre fiamme, e rende anch' eſſa viſibili i corpi ſenza biſogno d' aria, come lo fa ancora la luce ſolare. I tre riſultati del tornaſole, della calce, e de' ſali cauſtici non ſi oſſervano mai facendo uſo di aria flogiſticata, e ceſſano nell' aria comune ſubito che ha acquiſtata la natura di aria flogiſticata. Produce adunque l' elettricità ſull' aria comune tutti quei medeſimi effetti, che produce il flogiſto oſſia la fiamma attuale.

Ad un principio di vera fiamma io ho ancora riportato, fin da quando era in Londra, la luce che ſi oſſerva ne' fosfori; ed ho dato fin d' allora delle prove dirette di queſta mia opinione, come ſi può leggere nelle opere pubblicate in quella città dai Signori *Wilſon*, e *Kirwan*. In queſta maniera non ſolo la elettricità, ma ancora le altre ſoſtanze lucenti, come i fosfori, ſarebbono ridotte ad un medeſimo principio; talchè la famiglia de' corpi combuſtibili, ed infiammabili comprenderebbe un più gran numero di ſoſtanze di prima. Si ſa alla fine, che gli sforzi de' filoſofi, e ciò che ſi chiama ſcienza de' corpi, non ad altro ſi riduce, che a generalizzare i fenomeni.

XXVII.

Ci reſterebbe da eſaminare l'aria pura detta ancora deflogiſticata, che l'acqua non aſſorbe, ma della vera natura, e de' componenti di queſt' aria non ſe ne fa motto, benchè ſe ne conoſcano le proprietà principali, che la diſtinguono facilmente da tutte le altre arie.

Altri la credono pregniſſima di flogiſto, ed altri affatto priva di eſſo. Se non vi ſono prove certe, che la dimoſtrano affatto priva di flogiſto, molto meno ve ne ſono, che la facciano credere ricca di quel principio. E' vero, che l'acqua non l'aſſorbe, ma oltredichè la più piccola quantità di flogiſto potrebbe forſe baſtare a far tutto queſto, l' altro ſuo componente, quando ſia compoſta, potrebbe non avere alcuna attrazione coll' acqua, e non laſciarſi ſciorre da eſſa. Tutto bensì concorre a far credere, che nell'aria deflogiſticata ſi trovi una grandiſſima quantità di fuoco, eſſia della materia del calore, la quale unita agli altri componenti di eſſa aria rende ogni coſa inaſſorbibile all'acqua. Queſt' aria avida di flogiſto lo attrarrà da tutti que' corpi dove eſſo ſi trova, quando eſſi vi abbiano una minore affinità. Di qui ſi può ſpiegare, perchè decomponga l'aria nitroſa, e non l'aria infiammabile; baſta che il flogiſto prima vi ſia unito con minor forza.

XXVIII.

L'aria detta flogiſticata è ancor eſſa poco conoſciuta, e molti la conſiderano per aria ſaturata dal flogiſto, ed altri per povera molto di quel principio. Ella ha delle qualità molto diverſe dall'aria infiammabile, perchè non s'infiamma nè anco allora, ch'è unita all'aria pura, e può fino ſpegnere i lumi. Nulla ſi può pronunciare della ſua natura, e de' ſuoi componenti, e pare che sfugga qualunque analiſi, o decompoſizione.

XXIX.

Si è veduto che l'aria infiammabile è compoſta di flogiſto, e che chiuſa nelle bocce di criſtallo d'Inghilterra rivivifica il vetro di piombo. Ma nulla di tutto queſto fanno le due arie di ſopra, cioè la deflogiſticata, e la flogiſticata, talchè neſſun ſegno certo di eſiſtenza di flogiſto ſi può avere da eſſe, benchè poi ſia vero che differiſcono eſſenzialmente fra di loro quelle due arie, mantenendo una la vita e la fiamma, quando l'altra fa tutto l'oppoſto. La prima ſi laſcia diminuire da tutti i proceſſi flogiſtici, e l'altra da neſſuno di eſſi, eccettuato il carbone ſpento nel mercurio, e raffreddato, che le diminuiſce tutte, e diſtrugge.

XXX.

Finiſco con una rifleſſione generale ſull'elaſticità dei fluidi Aeriformi, e le ſue conſeguenze. L'elaſticità ne' fluidi permanenti diminuiſce in ragione inverſa degli ſpazj occupati, oſſia la forza elaſtica in eſſi diventa tanto minore, quanto è maggiore lo ſpazio occupato da eſſi fluidi,

Non ſi vede chi potrebbe limitare queſta forza eſpanſiva dei fluidi aeriformi ſe non vi foſſe l' attrazione terreſtre, che agiſce ſopra ogni molecola più minima de' corpi, per cui tendono perpetuamente verſo la terra. L'aria atmosferica per eſempio potrebbe beniſſimo eſtenderſi fino alla luna, e riempiere gli ſpazj celeſti, ma l'attrazione ne fiſſa il limite, il quale deve trovarſi dove le molecole dell'aria ſono attratte dalla terra con tanta forza con quanta tendono in virtù della loro a diſcoſtarſi fra di loro, e ad eſpanderſi.

Il calcolo potrebbe facilmente determinare queſto limite nelle due ipoteſi fatte da noi, e il problema potrebbe eſſere ſuſcettibile di qualche preciſione fiſica. Si potrebbe ancora tener conto della forza centrifuga cagionata dalla rotazione della terra nelle particelle dell' aria: il calore non può alterare ſenſibilmente le leggi della elaſticità, perchè è minimo ed uniforme alle più grandi diſtanze, nè i vapori arrivano mai così in alto.

La forza eſpanſiva dell' aria comune va conſiderata come una forza, che non ceſſa mai affatto, benchè diminuiſca rapidamente, come ſi è detto. Si potrà adunque conſiderare come minima, o infinitamente piccola nelle maſſime dilatazioni dell'aria. Nell' ipoteſi che le molecole dell'aria non foſſero attratte dalla terra, l'atmosfera non potrebbe eſercitare alcuna preſſione ſenſibile ſopra i corpi, che ſono ſulla ſuperficie della terra medeſima; talchè l'aria in quanto elaſtica neſſun effetto ſenſibile potrebbe produrre contro i corpi ſottopoſti. Ma nel momento che ſi vorrà ſupporre, che l'aria ſia attratta dalla terra, come lo è infatti, ogni ſtrato minimo d'aria peſerà ſull' altro, che le è ſotto, talchè gli ſtrati più baſſi ſaranno i più premuti, e i più elaſtici, e l'elaſticità e la gravità ſaranno nel medeſimo rapporto.

E' adunque la gravità dell'aria e non la ſua elaſticità la primitiva cagione, per cui l'atmosfera ha un limite, e per cui preme ſopra la ſuperficie della terra; nella ſteſſa maniera che una ſerie di elaſtri collocati gli uni ſopra degli altri premerebbono contro i corpi ſottopoſti in ragione del loro numero, e per la ſola forza del loro peſo, benchè poi foſſe vero, che la loro elaſticità ſarebbe in proporzione dei loro medeſimi peſi.

Non è ora più difficile di vedere quel che ſarebbe il calore, o qualunque altro agente, che s' inſinuaſſe fra queſti elaſtri, e come ſi devono ſpiegare le alterazioni accidentali cagionate nell'atmosfera.

ARTICOLO

Di Lettera ſcritta DAL MEDESIMO al Fratello Pubblico Profeſſore di Matematica nell' Univerſità di Pavia.

Sopra la Luce, la Fiamma, il Calore, e il Flogiſto.

Finiſco col mandarvi alcuni miei penſieri, relativi alla luce, alla fiamma, al calore, ed al flogiſto, che i filoſofi confondono più, o meno, e modificano, ſeguendo ciaſcuno le idee che ſen'è formate, e le ipoteſi che ha abbracciato.

Io ho voluto qui conſiderare que' quattro agenti, come ſoſtanze diverſe tra di loro; e finchè il fiſico ſperimentatore non arriverà a dimoſtrare la loro vera compoſizione, e natura, ſon di parere che ſi debbano valutare per differenti fra loro, e per ſemplici nel temdo medeſimo. Non già, perchè ſia impoſſibile che la coſa ſia anco diverſamente; ma perchè non è permeſſo di fingere delle compoſizioni, dove non ſi veggono, nè delle modificazioni ſemplici, dove gli effetti ſono diverſi, e ſpeſſo oppoſti.

Queſta diverſità di effetti è quella principalmente, che mi ha fatto conſiderar quelle ſoſtanze per diverſe tra loro, appoggiato al principio ricevuto, e certo nella fiſica, che ſe gli effetti ſono diverſi, diverſe devono eſſere anco le cauſe, quando non coſti del contrario. Io non farò, che accennare le principali qualità di quegli eſſeri.

Luce.

I.

La luce ſolare fa ſchiudere dalle piante meſſe nell' acqua aria puriſſima, detta deflogiſticata.

II.

La luce ſolare, anche allora che è privata di calore, cioè, che ſi fa agire come ſola luce, ſchiude dalle piante la medeſima aria puriſſima.

III.

La luce ſolare paſſa in iſtante attraverſo le lamine di vetro, e nell' iſtante riſcalda i corpi meſſi dietro ad eſſe.

IV.

La luce ſolare non fa detuonare il nitro, non produce l' acido zolfuroſo volatile, non rivivifica le ordinarie calci metalliche, almeno cogli ordinarj metodi praticati finora.

V.

La luce ſolare non riſcalda i corpi più traſparenti, e più ſottili, come l' aria, le lamine di criſtallo.

VI.

La luce ſolare appena riſcalda i corpi bianchi, ed opachi.

VII.

La luce ſolare non riſcalda, che que' corpi, in cui ſi è arreſtata.

FIAMMA.

I.

La fiamma anche accreſciuta, e comunque lucida, fa ſchiudere dalle piante aria mefitica, aria flogiſticata.

II.

La fiamma paſſa, come la luce, in iſtante attraverſo il criſtallo, ma non riſcalda i corpi collocati dietro del criſtallo, che molto tardi.

III.

La fiamma immediatamente applicata alle calci metalliche le rivivifica.

IV.

La fiamma riſcalda anche i corpi più traſparenti, e li fonde ſubito.

V.

La fiamma, applicata eſteriormente ai matracci di criſtallo, non rivivifica le calci metalliche comuni.

Calore.

I.

Il calore tanto ſolare, che terreſtre, ſchiude dalle piante aria flogiſticata.

II.

Il calore non rivivifica in metallo le ordinarie calci, non fa detuonare il nitro, non produce l'acido zolfuroſo volatile.

III.

Il calore eſclude dai corpi il flogiſto, o ne diminuiſce la quantità, come par provato dalle ſperienze più moderne fatte in Inghilterra.

IV.

Il calore penetra tutti i corpi, comunque opachi, e duri, e li fonde.

Flogisto.

I.

Il flogiſto eſclude dai corpi il calore, o ne diminuiſce la quantità, come appare dalle moderne dottrine.

II.

Il flogiſto non paſſa attraverſo il vetro a rivivificar le calci metalliche.

I corpi meſſi nel vuoto, dentro recipienti di criſtallo, poſſono eſſere illuminati, tanto dalla luce ſolare, che dalla luce terreſtre, o fiamma. I corpi poi lucenti, o infiammati, non danno più luce meſſi nel vuoto; dunque l' aria è neceſſaria a render lucenti quei corpi, ma non già a render viſibili a noi i corpi collocati dentro il vuoto, quando ſi getti ſopra di eſſi la luce eſterna dei corpi lucenti nel pieno. Pare dalle ultime eſperienze de' fiſici, che fino la elettricità medeſima nel vuoto ſubiſca le ſteſſe leggi, perchè ſpariſce quando il vuoto è perfetto. Il che ſempre più ci aſſicura, che i corpi lucenti ſono in uno ſtato di acceſione, come l'ho io dimoſtrato di diverſi fosfori; ma la luce, che ſi manifeſta allora, ſegue le conoſciute leggi della luce ſolare, quando ſi fa cadere ſopra i corpi, e ſi riflette da eſſi.

Da tutto quello, che abbiamo rilevato ſopra, ſi vede, che la luce ſolare non conviene in tutto nè anco colla luce della fiamma, o terreſtre. 1. Perchè la prima fa ſchiuder dalle piante aria deflogiſticata, e l'altra aria mefitica. 2. Perchè la prima riſcalda i corpi in iſtanti, e l'altra molto più tardi. 3. Perchè la prima non fa detuonare il nitro, non rivivifica le calci metalliche, non rende l'olio di vitriolo acido zolfuroſo volatile all'oppoſto della fiamma. 4. Perchè la luce ſolare non riſcalda i corpi traſparenti, che riſcalda la fiamma. 5. Perchè la luce ſolare non riſcalda, che poco, e tardi i corpi opachi, bianchi, al contrario della fiamma.

Il calore non è nè luce, nè fiamma, nè flogiſto; non è luce, perchè penetra tutti i corpi, che la luce non penetra; non è nè fiamma, nè flogiſto, perchè non rivivifica le calci metalliche, non fa detuonare il nitro.......

Il flogiſto non è il calore, perchè non penetra tutti i corpi, come fa il calore, e perchè eſclude il calore de' corpi medeſimi.

Siccome abbiamo oſſervato delle diverſità reali di eſſetti provenienti dalle quattro ſoſtanze ſeguenti , *Luce*, *Fiamma*, *Calore*, e *Flogiſto* , e nulla conoſciamo ancora della vera natura di eſſe; vi è tanto che baſta, perchè il filoſoſo oſſervatore debba conſiderarle come ſemplici , e come differenti tra loro , e perchè debba ſervirſene, come di principj , per iſpiegare gli effetti, che ſono ſubordinati ad eſſe ſoſtanze: e così infatti facciamo, parlando degli acidi , benchè forſe ſieno compoſti, e riſultino dalla modificazione di un acido ſolo. Sopra di queſti principj il famoſo *Bergman* ſommo chimico , e grandiſſimo fiſico, ha ſtabilito le ſue cinque terre elementari primitive , che ſpargono tanto lume in tutta la fiſica, e la ſtoria naturale, poco curandoſi, ſe in lor medeſime ſieno poi ſemplici, o ſieno una modificazione di una ſola di eſſe, o di più. Queſta, qualunque ella ſia, è la ſola via che ci reſta per internarci nella ſcienza de' corpi, e per tenerci lontano dalle illuſioni, e dalle ipoteſi.

Nella ſuppoſizione poi, che la materia primitiva dei corpi foſſe omogenea , non ne ſeguirebbe per queſto , che noi non doveſſimo cercar di conoſcere le proprietà di eſſa, quando è modificata in modo, da coſtituire delle diverſe ſoſtanze; che anzi nella ſola conoſcenza delle proprietà di queſte ſoſtanze diverſe conſiſterebbe la ſcienza de' corpi, e la conoſcenza delle cauſe, e de' fenomeni naturali.

Da tutte le coſe dette fin qui, par che ſi poſſano conſiderare quelle quattro ſoſtanze , o agenti, come principj ſemplici, e differenti fra di eſſi . Ma non ne ſegue già da tutto queſto, che due, o più di eſſi non poſſano formarne un ſolo. E' vero, che in queſt' ipoteſi non ſarebbono più nè ſemplici, nè quattro, ma andavano dal filoſofo conſiderati come tali prima di trovarne i componenti. Una volta poi, che queſti componenti ſi ſieno trovati, ſi deve rettificar l'ipoteſi, e diminuire il numero di eſſi a proporzione di quelli, che ci moſtrerà l'eſperienza.

Se ſi poteſſe dimoſtrare, come lo penſavano i chimici Svezzeſi, che il calore è fatto di aria pura, e di flogiſto, il calore non andrebbe più conſiderato come un principio ſemplice, ma bensì come un compoſto di due principj, di cui conoſciamo alcune delle principali proprietà. Così, ſe ſi proverà, che la luce non è che il calore ſopraccaricato di flogiſto, allora ſi dirà, che la luce non è più un principio ſemplice, ma che è fatto di tre altri principj, talchè la fiamma per eſempio ſi dovrà conſiderare come fatta di calore, e di flogiſto, unita ad altri corpi eterogenei, di cui ſono formati i corpi combuſtibili.

La luce ſolare, anche ſolo conſiderata in quanto luce, e non punto conſiderato il ſuo calore, ſarebbe ſempre accompagnata da qualche quantità di flogiſto. Il famoſo *Scheele* ha dimoſtrato il primo, che la luce ſolare rivivifica alla lunga la luna cornea, ed il nitro lunare; ma nulla di queſto ſi ottiene col ſolo calor ſolare, neſſuna rivivificazione ſi oſſerva di quelle calci. Così il medeſimo filoſofo ha ſcoperto, che l'acido nitroſo, chiuſo dentro di una boccia, ed eſpoſto alla luce del ſole, ſi flogiſtica beniſſimo; ma non ſi flogiſtica punto, ſe ſi eſpone al ſolo calor della luce.

Nè ſi creda già, che queſte qualità trovate nella luce ſolare ſiano contraddette affatto dai fenomeni del §. IV, perchè le circoſtanze ſono molto diverſe, ed applicando più lungamente la luce a quelle ſoſtanze, ſi arriverebbe forſe a provare, che non è poi priva affatto di flogiſto. Là ſi è voluto eſcludere l'ipoteſi d'un flogiſto abbondante, e qui ſi è voluto far vedere, che non ne è poi priva interamente.

SOPRA LA MISURA DELLA LUCE IN GENERALE;

E ſopra l' illuminazione de' varj ſegmenti del Diſco Solare tagliati dall' orizzonte nel tempo del naſcere e tramontare del Sole.

Del P. Gregorio Fontana Delle Scuole Pie Profeſſore di Matematica ſublime nell' Univerſità di Pavia.

NIuno de' Fiſico-Matematici prima del 1760, in cui comparvero alla luce le due opere inſigni, una di *Bouguer* intitolata *Traitè d' Optique ſur la gradation de la lumiere*, l' altra di *Lambert* col titolo *Photometria, ſive de menſura & gradibus luminis*, avea ſoſpettato, che nel miſurare la quantità relativa della luce che da un corpo o per ſeſteſſo luminoſo, o altronde irradiato viene tramandata ſopra un dato punto, o picciolo ſpazio da illuminarſi, doveſſe tenerſi conto di quell' angolo, che formano i raggi colla ſuperficie del corpo da cui partono. Eppure un' oſſervazione non difficile a farſi dovea far credere, che il predetto *angolo di emanazione* è un elemento indiſpenſabile per calcolar giuſtamente la miſura della luce. Rimirando il diſco ſolare con un elioſcopio ſi veggono tutti i punti del diſco ugualmente chiari e brillanti, nè ſi ſcorge differenza ſenſibile fra lo ſplendore delle parti più vicine al centro, e delle parti più lontane, coſicchè il centro ſteſſo ed il lembo non preſentano all' occhio alcun divario in ordine alla loro lucidità. Da queſta uguale diſtribuzione di lucidezza in tutte le parti del diſco ſolare ſi deduce ſpeditamente la conſeguenza, che le varie quantità di luce verſate ſopra una data ſuperficie dai diverſi punti d'un corpo raggiante ſeguitano, in parità di tutte le altre coſe, la ragione de' ſeni degli angoli di emanazione. Imperciocchè rappreſenti il circolo *AFBI* (*fig.* 1) il diſco del ſole; e prendaſi il ſemicircolo *APB* perpendicolare al diſco per rappreſentare la conveſſità del corpo ſolare rivolta allo ſpettatore, che ſi ſuppone ſituato ad una diſtanza immenſa in direzione del ſemidiametro *CP* perpendicolare ad *AB*, e dividente per metà il ſemicircolo *APB*. Le particelle *Pp*, *Mm*, *Ee* della ſuperficie conveſſa del ſole compariſcono uguali allo ſpettatore ogni qual volta le loro projezioni ortografiche *Cc*, *Nn*, *Dd* riſultano eguali; nè queſte rieſcono uguali, ſe quelle non creſcono in ragione inverſa delle riſpettive ordinate *PC*, *MN*, *ED*, come è noto per la proprietà del cerchio. Se vuolſi adunque (come prima di *Lambert*, e *Bouguer* da tutti ſi ſupponeva), che qualſivoglia punto della ſuperficie conveſſa del ſole tramandi all' occhio dello ſpettatore ſulla terra la ſteſſa copia di raggi, qualunque ſia la poſizione di tal punto ſul globo ſolare riſpettivamente all' occhio, e ſe perciò la quantità di luce, che viene all' occhio da una parte qualunque di detta ſuperficie, creſce in proporzione della grandezza di quella parte, ne naſcerà la conſeguenza, che le projezioni ortografiche uguali *Cc*, *Nn*, *Dd*, cioè le varie parti del diſco rimirate d'in ſulla terra, dovranno comparire tanto più lucide e chiare, quanto più ſaranno diſcoſte dal centro *C* del diſco, e ciò in ragione inverſa delle ordinate riſpettive, e così le parti vicine al lembo, e tutto il lembo medeſimo dovranno mandare uno ſplendore infinito, divenendo quaſi appunto infinito quel rapporto. E poichè queſto è viſibilmente aſſurdo, ed è anzi noto per eſperienza, che le ſuddette parti *Cc*, *Nn*, *Dd* del diſco gettano un egual chiarore, nè punto ſi oſſerva che una ſia più o meno lucida dell'

dell' altra; quindi ſi ſcuopre evidentemente falſo il principio, che da ciaſcun punto della ſuperficie ſolare l'occhio dello ſpettatore riceva lo ſteſſo numero di raggi; ed è poi agevole l' inferire, che il numero di tali raggi è proporzionale al ſeno dell' angolo, che eſſi formano, nell' uſcire, colla ſuperficie del ſole. In fatti l' illuminazione delle parti *Pp*, *Mm*, *Ee* della ſuperficie ſolare vedute dallo ſpettatore in *Cc*, *Nn*, *Dd* ſul diſco è in ragione compoſta della grandezza di tali parti conveſſe, e del numero de' raggi, che l' occhio riceve da ciaſcun punto di quelle. Se adunque compajono ugualmente illuminate, come ſi è detto, quella ragione compoſta ſarà una ragione di ugualità, che è quanto dire, la grandezza di dette parti ſarà inverſamente come il numero de' raggi vibrati all' occhio da ciaſcun punto in eſſe aſſunto, e conſeguentemente ſarà un tal numero in ragione diretta delle ordinate corriſpondenti. Ma queſte ordinate ſono anche come i ſeni degli angoli *CPp*, *NMm*, *DEe* conforme richiede la natura del cerchio, i quali angoli ſono appunto formati dai raggi emananti *CP*, *NM*, *DE* dalla ſuperficie conveſſa del ſole; perciò ſi fa manifeſto, che il numero de' raggi lanciati all' occhio dello ſpettatore da ciaſcun punto della ſuperficie ſolare ſeguita la ragione ſemplice diretta del ſeno dell' angolo di emanazione. Il *Bouguer* aſſume una tal ragione un poco maggiore della ſemplice, perchè da un' oſſervazione gli parve di poter inferire, che le parti del diſco ſolare compajono meno luminoſe quanto più ſon lontane dal centro; ſebbene egli ſteſſo confeſſa, che quell' oſſervazione avrebbe avuto biſogno di eſſere più ſpeſſo che egli non fece ripetuta.

Per riguardo a que' corpi, che riflettono il lume ricevuto, haſſi un riſcontro di queſta legge dell' angolo di emanazione nell' oſſervazione ovvia e comune, che ſe in un muro ben imbiancato, poco prima del naſcere o poco dopo del tramontare del ſole, ſi fiſſa coll' occhio una piccola parte tinta d' altro colore, e ſi rimira da qualunque punto della circonferenza d'un cerchio, che ha per centro la ſteſſa parte, queſta ſi vede ſempre chiara ed illuminata egualmente; il che non può accadere ſenza che la quantità di luce riflettuta da eſſa nell' occhio vada creſcendo nella ragione del ſeno dell' angolo fatto da' raggi rifleſſi colla ſuperficie riflettente, vale a dire dell' angolo di emanazione. Per rettificare queſta oſſervazione troppo groſſolana, e ridurla ad un' eſattezza baſtante, il *Lambert* immaginò il ſeguente ingegnoſo eſperimento. Due piani AB, BC (*fig.* 2) uniti ſotto l'angolo ABC vengono irradiati da un lume collocato in O ad ugual diſtanza dai piani per modo, che eſſendo uguali le perpendicolari OI, OP, ſieno pure uguali le quattro BI, IA, BP, PC, e queſte inoltre ſieno molto picciole in paragone delle diſtanze OI, OP. In tali circoſtanze egli è evidente, che i piani AB, BC rimarranno illuminati egualmente, e ciaſcun punto riceverà ſenſibilmente lo ſteſſo numero di raggi. Ciò fatto ſi collochi in E una lente FG, la quale rifranga le immagini ba, bc dei piani ſopra una ſuperficie data LM poſta dietro la lente. Oſſervate attentamente le immagini ba, bc ſi trovano egualmente illuminate, nè ſi ſcorge veruna diverſità fra l' una e l' altra nel grado d' illuminazione; e queſto ſempre ſi eſperimenta comunque ſi cangi la ſituazione della lente, e comunque vadano variando gli angoli ABE, CBE. Guidiſi CN perpendicolare a BE, e ſia AB normale a BE e parallela ad LM, e ſi piglino BA, BC molto picciole in confronto di AE, BE, CE, affinchè tutti i raggi mandati da AB alla lente partano ſotto lo ſteſſo angolo a un di preſſo, e ſotto uno ſteſſo angolo anche i raggi che vanno da BC alla lente. Ora i triangoli ſimili ABE, abE, CNE, bcE danno le ſeguenti analogie $AB : ab :: BE : bE$, $CN : bc :: NE : bE$;

e poichè per la picciolezza di *CB* in paragone di *BE* diventa proſſimamente $NE = BE$, la ragione di AB : ab ſarà la ſteſſa che di $CN : bc$. Laonde $ab : bc :: AB : CN :: BC : CN :: BC : BC$ ſen. $CBN :: 1 :$ ſen. CBN. Ma l'eſperimento dimoſtra che le due immagini *ab*, *bc* ſono ugualmente chiare e luminoſe, e che queſta chiarezza è uniformemente diffuſa ſu ciaſcun punto; ſarà dunque la quantità di luce ſparſa ſull'immagine *ab* a quella ſparſa ſu *bc* come la grandezza di *ab* alla grandezza di *bc*, cioè come il ſeno tutto al ſeno dell'angolo *CBN*. Di qui appariſce, che la quantità di luce riflettuta dai piani *AB*, *BC* ſulla lente *FG* ſeguita la ragione dei ſeni degli angoli di emanazione. E così l'eſperienza dimoſtra, che una ſiffatta legge ha luogo non meno ne' corpi luminoſi per sè ſteſſi, che in quelli che tramandano la luce ricevuta dai primi.

Reſta ora a vedere ſe queſto nuovo elemento introdotto nel calcolo, dove ſi tratta di determinare la quantità della luce vibrata da un corpo raggiante ſopra una data ſuperficie, partoriſca de' riſultati diverſi da quelli, che ſi ottengono nell' ordinaria ipoteſi, in cui tal elemento ſi traſcura. Ciò ſi rende tanto più neceſſario da che il Sig. *Euler* nelle *Memorie dell' Accademia di Berlino* ſembra determinato a credere, che i problemi riguardanti la miſura della luce diano i medeſimi riſultati, ſia che vogliaſi nel calcolo tener conto dell' angolo di emanazione, ſia che voglia traſcurarſi. Per mettere alla prova queſto penſamento di sì gran Geometra, io ſcelgo a tal effetto il Problema cardinale di queſta ſcienza, cioè di *ritrovare l' illuminazione perpendicolare prodotta in una ſuperficie piana infinitamente picciola da una sfera raggiante*.

Inerendo adunque in primo luogo all' ipoteſi ordinaria io procedo nel modo ſeguente: la figura *ORMS* (*fig.* 3.) rappreſenta una sfera luminoſa o raggiante, il di cui ſemidiametro $CR = r$; *Pp* rappreſenta la ſuperficie piana infiniteſima in ambedue le dimenſioni, che viene illuminata dalla sfera, ed è diſtante dal centro di lei per $PC = a$. Il ſegmento sferico illuminatore circoſcritto dalle tangenti PR, PS è RES; finalmente $NMmn$ è una zona infinitamente piccola compreſa fralle circonferenze di due cerchj paralleli normali all' aſſe PC. Ora poſto l' angolo $MCE = \varphi$ ſi ha la ſuperficie di detta zona $= 2\pi r^2 d\varphi \text{ ſen. } \varphi$ (prendendo $1 : \pi$ pel rapporto del diametro alla periferia), ed MP $= \sqrt{(r^2 + a^2 - 2ra \text{ coſ. } \varphi)}$. L' angolo d' incidenza MPp de' raggi vibrati dalla zona ſul piano infiniteſimo Pp è $= PMB$, e queſto ha per ſuo ſeno $\frac{PB}{PM}$

$$= \frac{a - r \text{ coſ.} \varphi}{\sqrt{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ coſ. } \varphi)}},$$

e per coſeno $\frac{BM}{PM}$

$$= \frac{r \text{ ſen.} \varphi}{\sqrt{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ coſ.} \varphi)}}.$$

Eſſendo pertanto l' illuminazione in Pp in ragion compoſta della zona $NMmn$ illuminatrice, del ſeno dell' angolo d' incidenza, e del quadrato inverſo della diſtanza, riſulterà la predetta illuminazione

$$= \frac{2I\pi r^2 d\varphi \text{ ſen.} \varphi}{r^2 + a^2 - 2ar \text{ coſ.} \varphi} \times \frac{a - r \text{ coſ.} \varphi}{\sqrt{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ coſ.} \varphi)}}$$

prendendo per I l' unità d' illuminazione.

Per più facilmente integrare la formola

$$\frac{2I\pi r^2 (a - r \text{ coſ. } \varphi) d\varphi \text{ ſen. } \varphi}{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ coſ.} \varphi)^{3:2}},$$

onde conſeguire la miſura dell' illuminazione del ſegmento sferico indefinito NEM, aſſumo $\text{coſ. } \varphi = x$, e l' illuminazione elementare di tal ſegmento ſi trasforma in

$$\frac{-2I\pi r^2 (a - rx) dx}{(a^2 + r^2 - 2rax)^{3:2}}.$$

A queſta formola più ſemplice applicando le note regole d' integrazione ſi ritrova ſenza pena, che il di lei integrale è

$$= \frac{2I\pi r^2 (r - ax)}{a^2 \sqrt{(r^2 + a^2 - 2rax)}} + \text{coſt}.$$

E ſiccome ſi annulla

l' illuminazione all' annullarſi dell' angolo φ, ovvero quando $\text{coſ.}\,\varphi = x = 1$, ſi raccoglie quindi coſt. $= \frac{-2I\pi r^2(r-a)}{a^2\sqrt{(r^2+a^2-2ra)}} = \frac{2I\pi r^2}{a^2}$, prendendo pel valore di $\sqrt{(r^2+a^2-2ra)}$ la quantità $a-r$ piuttoſto che $r-a$, perchè altrimenti riſulterebbe negativa la quantità d' illuminazione, che ſarebbe aſſurdo. Dunque l' illuminazione eccitata nel piano Pp dal ſegmento raggiante indefinito NEM è $= \frac{2I\pi r^2}{a^2}\left(1 + \frac{r-ax}{\sqrt{(a^2+r^2-2rax)}}\right)$, e poſto l' angolo $\varphi = ECS$, e perciò $\text{coſ.}\,\varphi = x = \frac{r}{a}$ naſce l' intera illuminazione generata dal ſegmento propoſto RES $= \frac{2I\pi r^2}{a^2}$. Il che era ecc.

Cerco ora nell' ipoteſi di *Lambert* e *Bouguer* una ſiffatta illuminazione, e per ottener queſto non ſi ha che a moltiplicare l' illuminazione precedentemente trovata della zona pel ſeno dell' angolo di emanazione PMF fatto dalla tangente MF, e dal raggio emanante MP. Queſt' angolo è $= PMB - FMB = PMB - ECM$; quindi $\text{ſen.}\,PMF = \text{ſen.}\,PMB\ \text{coſ.}\,ECM - \text{ſen.}\,ECM\ \text{coſ.}\,PMB = \frac{(a-r\,\text{coſ.}\varphi)\text{coſ.}\varphi - r\,\text{ſen.}\varphi^2}{\sqrt{(r^2+a^2-2ra\,\text{coſ.}\varphi)}} = \frac{a\,\text{coſ.}\varphi - r}{\sqrt{(a^2+r^2-2ra\,\text{coſ.}\varphi)}}$ $= \frac{ax-r}{\sqrt{(a^2+r^2-2rax)}}$, il quale moltiplicato per $\frac{-2I\pi r^2(a-rx)dx}{(a^2+r^2-2rax)^{3:2}}$ ſomminiſtra nell' ipoteſi di *Lambert* l' illuminazione prodotta dalla zona $= \frac{2I\pi r^2(a-rx)(r-ax)dx}{(a^2+r^2-2rax)^2}$. Cercando l' integrale di queſta eſpreſſione ſi trova ſenza difficoltà

$\frac{I\pi r}{2a}\left(x - \frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(r^2+a^2-2rax)}\right) +$ coſt., il quale dovendo ſparire quando $x = 1$, diventa coſt.
$= \left(\frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(r-a)^2} - 1\right)\frac{I\pi r}{2a} = \left(\frac{(r+a)^2}{2ra} - 1\right)\frac{I\pi r}{2a}$
$= \left(\frac{r^2+a^2}{2ra}\right)\frac{I\pi r}{2a}$. Dunque l' illuminazione prodotta dal ſegmento sferico indeterminato è
$= \frac{I\pi r}{2a}\left(x - \frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(r^2+a^2-2rax)} + \frac{r^2+a^2}{2ra}\right)$; e poſto $x = \frac{r}{a}$, riſulta la totale illuminazione prodotta dall' intero ſegmento $RES = \frac{I\pi r}{2a}\left(\frac{r}{a} - \frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(a^2-r^2)} + \frac{r^2+a^2}{2ra}\right)$
$= \frac{I\pi r}{2a} \times \frac{2r}{a} = \frac{I\pi r^2}{a^2}$. Il che era ecc. Di qui ſi vede che la quantità dell' illuminazione calcolata ſecondo l' ordinaria ipoteſi è doppia di quella, che ſi ricava dall' ipoteſi di *Lambert*. Il che dà a divedere di qual importanza ſia in tutta la ſcienza della *miſura della luce* di preliminarmente ſtabilire l' una o l' altra ipoteſi, giacchè in uno de' più ſolenni e fondamentali Problemi di queſta ſcienza s' incontrano nelle due ipoteſi riſultati tanto differenti e diſcordi, che baſterebbono a ſpargervi il più ragionevole pirroniſmo.

Paſſo ora ad un altro Problema intereſſante e curioſo. Suppongo un punto *P* (*fig.* 4) ſituato nella cavità d'una ſuperficie sferica raggiante al di dentro, cioè che tramanda da tutti i ſuoi punti la luce verſo la cavità; e tale ſuperficie sferica ſia *BMN*. Pel punto *P* da illuminarſi guido il diametro *BF*, e perpendicolari ad eſſo diametro conduco due cerchj paralleli infinitamente proſſimi *MN*, *mn*, che ſegnano nella ſuperficie sferica la zona elementare $MNnm$, e tirando il raggio CM, la retta PM, e la tangente MR, faccio $CM = r$, $CP = a$, l'angolo $MCF = \varphi$. Quindi ſeguitando i paſſi medeſimi che dinanzi, ſi ritrova $PM^2 = a^2 + r^2 - 2ra\ \text{coſ.}\ \varphi$, la zona $MNnm = 2r^2 \pi d\varphi\ \text{ſen.}\ \varphi$ (eſprimendo $1 : \varphi$ il rapporto del diametro alla periferia circolare); e però chiamando I l' unità d'illuminazione, ſarà l'illuminazione prodotta dalla zona $MNnm$ nel punto P $= \dfrac{2I\pi r^2 d\varphi\ \text{ſen.}\ \varphi}{r^2+a^2-2ar\ \text{coſ.}\varphi}$; conſeguentemente l' illuminazione prodotta dalla ſuperficie sferica indefinita MFN ſarà

$$= \int \frac{2I\pi r^2 d\varphi\ \text{ſen.}\ \varphi}{r^2+a^2-2ar\ \text{coſ.}\ \varphi} = \frac{I\pi r}{a}\ \text{log.}\ (a^2+r^2-2ar\ \text{coſ.}\ \varphi)$$

$+$ coſt. E perchè ſi annulla coll' angolo φ anche l' illuminazione, naſce perciò coſt. $= \dfrac{-I\pi r}{a}\ \text{log.}\ (a^2+r^2-2ar)$ $= \dfrac{-2I\pi r}{a}\ \text{log.}\ (r-a)$. Dunque l' illuminazione predetta è $= \dfrac{I\pi r}{a}\ \text{log.}\ (a^2+r^2-2ar\ \text{coſ.}\ \varphi) - \dfrac{2I\pi r}{a} \times \text{log.}\ (r-a)$. Se ora ſi piglia $\varphi = 180°$, ſi ottiene l' illuminazione eccitata nel dato punto P da tutta la sferica ſuperficie $= \dfrac{2I\pi r}{a}\ \text{log.}\ \dfrac{a+r}{r-a}$.

Introduco ora nel calcolo ſecondo l'altra ipoteſi di *Lambert* l'angolo di emanazione PMR moltiplicando pel ſeno di queſt' angolo l'eſpreſſione dianzi trovata $\dfrac{2I\pi r^2 d\varphi\ \text{ſen.}\varphi}{r^2+a^2-2ar\ \text{coſ.}\varphi}$. A tal effetto oſſervo, che queſt' angolo PMR è $= PMO + OMR = PMO + \varphi$; e quindi ſen. $PMR =$ ſen. PMO coſ. $\varphi +$ coſ. PMO ſen. φ. E poichè ſen. $PMO = \dfrac{PO}{PM} = \dfrac{CO-CP}{PM} = \dfrac{r\ \text{coſ.}\ \varphi - a}{\sqrt{(a^2+r^2-2ra\ \text{coſ.}\varphi)}}$, e coſ. $PMO = \frac{MO}{PM} = \frac{r\,\text{ſen.}\,\phi}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\,\text{coſ.}\,\phi)}}$, ſarà ſen.

$$PMR = \frac{(r\,\text{coſ.}\phi - a)\,\text{coſ.}\phi + r\,\text{ſen.}\phi^2}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\,\text{coſ.}\,\phi)}} = \frac{r - a\,\text{coſ.}\,\phi}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\text{coſ.}\phi)}}.$$

Laonde ſarà l'illuminazione prodotta nel punto P dalla zona elementare nell'ipoteſi di *Lambert*

$$= \frac{2I\pi r^2 d\phi\,\text{ſen.}\,\phi\,(r - a\,\text{coſ.}\,\phi)}{(a^2+r^2-2ar\,\text{coſ.}\phi)^{3:2}} = \frac{2I\pi r^3\,d\phi\,\text{ſen.}\phi}{(a^2+r^2-2ar\,\text{coſ.}\phi)^{3:2}}$$

$$- \frac{2I\pi ar^2 d\phi\,\text{ſen.}\phi\,\text{coſ.}\phi}{(a^2+r^2-2ar\,\text{coſ.}\phi)^{3:2}}.$$

Paſſando ora all'integrazione di queſti due termini ſi vede ſubito, che l'integrale del primo è $= \frac{-2I\pi r^2}{a\sqrt{(a^2+r^2-2ar\text{coſ.}\varphi)}}$. Per ritrovare l'integrale del ſecondo termine piglio $x = \text{coſ.}\,\varphi$, e quel termine ſi cangia in $\frac{2I\pi ar^2 x dx}{(a^2+r^2-2arx)^{3:2}}$. Prendo inoltre $y = a^2 + r^2 - 2arx$, e il detto termine ſi traſforma di nuovo in $\frac{-2I\pi ar^2\left(\frac{a^2+r^2-y}{2ar}\right)\frac{dy}{2ar}}{y^{3:2}}$

$= \frac{-I\pi(a^2+r^2)dy}{2ay^{3:2}} + \frac{I\pi dy}{2a\sqrt{y}}$, il di cui integrale è viſibilmente $\frac{I\pi(a^2+r^2)}{a\sqrt{y}} + \frac{I\pi\sqrt{y}}{a} = \frac{I\pi(a^2+r^2)}{a\sqrt{(a^2+r^2-2arx)}}$

$+ \frac{I\pi}{a}\sqrt{(a^2+r^2-2arx)}$, a cui aggiungendo l'integrale

dianzi trovato $- \frac{2I\pi r^2}{a\sqrt{(a^2+r^2-2ar\,\text{coſ.}\,\varphi)}}$, e riducendo al medeſimo denominatore tutti i termini, ſi ottiene finalmente l'illuminazione eccitata dalla ſuperficie indeterminata

minata $MFN = -\frac{2I\pi(a-r\,\mathrm{coſ.}\varphi)}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\,\mathrm{coſ.}\varphi)}} + \mathrm{coſt.}$ Per ritrovare la coſtante baſta riflettere, che l'illuminazione ſvaniſce inſieme coll'angolo φ, il che dà $\mathrm{coſt.} = \frac{-2I\pi(a-r)}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar)}} = 2I\pi$ prendendo per $\sqrt{(a^2+r^2-2ar)}$ il valore $r-a$ piuttoſto che $a-r$. Dunque la predetta illuminazione è $= 2I\pi + \frac{2I\pi(a-r\,\mathrm{coſ.}\,\varphi)}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\,\mathrm{coſ.}\,\varphi)}}$. Se pertanto in queſt' equazione ſi aſſume $\varphi = 180°$, e però $\mathrm{coſ.}\ \varphi = -1$, egli è manifeſto, che allora dee riſultare la quantità dell'illuminazione prodotta nel dato punto dall'intera ſuperficie sferica. Dunque una ſiffatta illuminazione è $2I\pi + \frac{2I\pi(a+r)}{a+r} = 4I\pi$. Di qui ſi raccoglie un Teorema molto ſingolare e inaſpettato, non ſo ſe da altri avvertito, che *una ſuperficie sferica raggiante, comunque ſia piccola o grande, produce la medeſima illuminazione in un punto dovunque ſituato dentro la cavità; e tale illuminazione non è altro che quella, che ſi prende per unità, moltiplicata per quattro volte il rapporto della periferia circolare al diametro*. Per altro queſto Teorema ſi preſenta immantinente allo ſpirito, qualora il punto dato ſia collocato nel centro della sfera cava, eſſendo evidente, che allora l'illuminazione in eſſo eccitata debb'eſſere uguale al prodotto dell'unità d'illuminazione moltiplicata per la ſuperficie sferica, e diviſa pel quadrato della diſtanza, cioè del ſemidiametro, il che dà appunto $4I\pi$, come preſcrive il Teorema.

Confrontando pertanto l'eſpreſſione $\frac{2I\pi r}{a}\ \log.\ \frac{a+r}{r-a}$ ricavata nell'ordinaria ipoteſi Euleriana coll'eſpreſſione $4I\pi$ avutaſi dall'ipoteſi di *Lambert*, ſi conoſce qual inſigne divario producano ne' riſultati queſte due ipoteſi, le quali nel ſolo caſo, che il punto irradiato ſia ſituato nel centro della sferica cavità, conducono sì l'una che l'altra a ritrovare la medeſima illuminazione. Imperciocchè ſebbene in tal caſo l'eſpreſſione $\frac{2I\pi r}{a}\log.\frac{a+r}{r-a}$ diventi eguale alla quantità indeterminata e vaga $\frac{0}{0}$, ſe per evitare queſto valore indeterminato ſi ſuppone a infiniteſimo, ſi trova $\frac{r+a}{r-a}=1+\frac{2a}{r}$ traſcurando i termini, che contengono le potenze di a. Dunque $\frac{2I\pi r}{a}\log.\frac{r+a}{r-a}=\frac{2I\pi r}{a}\log.\left(1+\frac{2a}{r}\right)$, e ſiccome $\log.\left(1+\frac{2a}{r}\right)=\frac{2a}{r}$, diſprezzati gli altri termini come dianzi, perciò naſce $\frac{2I\pi r}{a}\log.\left(1+\frac{2a}{r}\right)=4I\pi$, come appunto ſi è trovato nell'ipoteſi di *Lambert*, e come eſſer doveva per la natura della coſa col puro diſcorſo metafiſico.

E qui parmi di ſcorgere un inconveniente nell'ipoteſi Euleriana, ed è di offerire un'illuminazione infinita, allorchè il punto ſi prende ſulla ſteſſa ſuperficie interna, vale a dire $r=a$, nel qual caſo l'illuminazione diventa $2I\pi\log.\frac{2r}{0}=\infty$. Queſta illuminazione infinita ha un non ſo che di aſpro, perchè ſebbene eſſa può ſembrare non ripugnante a motivo della diſtanza evaneſcente del punto dato dalla ſuperficie sferica, ſi ha però quivi un compenſo per parte della ſuperficie, da cui il punto ha una diſtanza evaneſcente, perchè anche la grandezza di tal ſuperficie è evaneſcente, ed a tale grandezza è ſempre proporzionale *cæteris paribus* l'illuminazione. Io non ſo ſe m'inganno, ma io trovo una certa armonica ſemplicità ed eleganza nell' uguaglianza d' illuminazione per tutti i punti della cavità sferica, come eſige il Teorema precedentemente dimoſtrato, che non poſſo non creder vera l' ipoteſi, che ſomminiſtra un tal riſultato.

Oſſervo finalmente, che prendendo una ſuperficie piana infiniteſima in ambedue le dimenſioni fuori d'una sfera raggiante del ſemidiametro $= r$ ad una grandiſſima diſtanza dal di lei centro $= a$ ſi trova (come ho moſtrato precedentemente) l' illuminazione prodotta in detta ſuperficie $= \frac{I\pi r^2}{a^2}$ nell' ipoteſi di *Lambert*, ed $= \frac{2I\pi r^2}{a^2}$ nell' ipoteſi di *Eulero*; e poichè πr^2 è l' area del cerchio maſſimo della sfera raggiante, e $2\pi r^2$ è la ſuperficie emisferica, ne viene in conſeguenza, che l' illuminazione generata in quel piano infinitamente picciolo viene eſpreſſa dall' area del cerchio maſſimo ſecondo *Lambert*, e dalla ſuperficie emisferica ſecondo *Eulero*. Ora non par egli più veriſimile, che piuttoſto quell' area che queſta ſuperficie debba miſurare la quantità d' illuminazione, giacchè nelle grandiſſime diſtanze non ſi vede altro che l' area ſuddetta, oſſia il diſco, e non compariſce punto la ſuperficie dell' emisfero?

Proſeguendo queſta diſamina in alcun altro ſolenne e nuovo Problema ſpettante alla miſura della luce, mi porto a calcolare nell' ipoteſi Euleriana l' illuminazione generata dalla circonferenza circolare raggiante RMS (*fig.* 5) in un punto F preſo dentro l' area del circolo. Si guidi per F il diametro RB, e da un punto M qualunque della circonferenza ſi conducano MC al centro, MF al punto dato, MN perpendicolare al diametro. Si ponga l' angolo $MCB = \phi$, il raggio $CM = r$, $CF = a$: ſarà dunque $FM^2 = r^2 + a^2 - 2ar \text{ coſ. } \phi$, l' archetto infiniteſimo $Mm = rd\phi$, e l' illuminazione in F

generata dal archetto *Mm* ſarà $= \frac{Ird\phi}{r^2 + a^2 - 2ar\ \text{coſ.}\ \phi}$ prendendo per *I* l'unità d'illuminazione. Paſſo ora all'integrazione di queſta formola, e per meglio riuſcirvi faccio $r^2 + a^2 = f^2$, $2ar = g^2$, e la formola diventa $\frac{Ird\phi}{f^2 - g^2\ \text{coſ.}\ \phi}$. Quindi aſſumo coſ. $\phi = \frac{1-u^2}{1+u^2}$; ond'è ſen. $\phi = \frac{2u}{1+u^2}$, $d\phi\ \text{coſ.}\ \phi = \frac{2du\,(1-u^2)}{(1+u^2)^2}$, e però $d\phi = \frac{2du}{1+u^2}$. Dunque eſſendo $f^2 - g^2\text{coſ.}\ \phi = \frac{f^2-g^2+(f^2+g^2)u^2}{1+u^2}$, ne viene $\frac{Ird\phi}{f^2-g^2\ \text{coſ.}\phi} = \frac{2Irdu}{f^2-g^2+(f^2+g^2)u^2} = \frac{2Irdu}{(r-a)^2+(r+a)^2u^2}$

$$= \frac{2Ir}{(r-a)^2} \times \frac{du}{1+\left(\frac{r+a}{r-a}\right)^2 u^2} = \frac{2Ir}{(r-a)^2} \times \frac{r-a}{r+a}$$

$$\times \frac{\frac{r+a}{r-a} \times du}{1+\left(\frac{r+a}{r-a}\right)^2 u^2} = \frac{2Ir}{r^2-a^2} \times \frac{\frac{r+a}{r-a} \times du}{1+\left(\frac{r+a}{r-a}\right)^2 u^2}$$

Queſt'ultima formola eſprime viſibilmente la quantità $\frac{2Ir}{r^2-a^2}$ moltiplicata per l'elemento dell'arco circolare deſcritto col raggio 1, e colla tangente $\frac{r+a}{r-a}u$. Dunque l'illuminazione generata nel punto *F* dall'arco luminoſo indefinito *BM* è $= \frac{2Ir}{r^2-a^2}$ Arc. tang. $\frac{r+a}{r-a}u$ $+$ coſt. E poichè ſi è fatto coſ. $\phi = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, cioè u^2

$= \frac{1-\text{coſ.}\,\varphi}{1+\text{coſ.}\,\varphi}$, cioè $u=\sqrt{\frac{1-\text{coſ.}\,\varphi}{1+\text{coſ.}\,\varphi}}$, ſarà la predetta illuminazione $= \frac{2Ir}{r^2-a^2}$ Arc. tang. $\frac{r+a}{r-a}\sqrt{\frac{1-\text{coſ.}\,\varphi}{1+\text{coſ.}\,\varphi}} +$ coſt. Siccome poi l'illuminazione ſvaniſce in un coll' angolo φ, cioè quando coſ. $\varphi = 1$, nel qual caſo Arc. tang. $\frac{r+a}{r-a}\sqrt{\frac{1-\text{coſ.}\,\varphi}{1+\text{coſ.}\,\varphi}}$ diventa Arc. tang. 0, cioè Arc. $= 0$; perciò non vi è coſtante da aggiungere all' integrale ritrovato. Per ottenere preſentemente l'illuminazione della ſemicirconferenza *BMR* nel punto dato *F* conviene prendere $\varphi = 180°$, e perciò coſ. $\varphi = -1$; il che ſomminiſtra la formola $\frac{2Ir}{r^2-a^2}$ Arc. tang. $\infty = \frac{2Ir}{r^2-a^2} \times \frac{1}{2}\pi$, chiamando π la ſemicirconferenza del circolo deſcritto col raggio 1. Dunque l'illuminazione prodotta dalla ſemicirconferenza nel punto *F* è $= \frac{Ir\pi}{r^2-a^2}$, e l'illuminazione generata da tutta la circonferenza (che è un'illuminazione doppia dell'altra come è chiaro) è $= \frac{2Ir\pi}{r^2-a^2}$, cioè uguale alla ſteſſa circonferenza moltiplicata per l'unità d'illuminazione, e diviſa pel quadrato dell'ordinata al diametro nel dato punto *F*.

Se ora ſi vuol trovare l'illuminazione del punto *F* nell'ipoteſi di *Lambert*, converrà moltiplicare $\frac{Ird\varphi}{a^2+r^2-2ar\,\text{coſ.}\,\varphi}$ pel ſeno dell'angolo di emanazione *FMO* fatto dal raggio lucido *MF* colla tangente *MO* in *M*, il qual angolo è $= FMN + NMO = FMN + MCB = FMN + \varphi$. Dunque ſen. $FMO =$ ſen. FMN coſ. φ

$$+ \text{coſ.}\ FMN\ \text{ſen.}\ \phi = \frac{FN\,\text{coſ.}\,\phi}{FM} + \frac{MN\,\text{ſen.}\,\phi}{FM}$$
$$= \frac{(CN - CF)\,\text{coſ.}\,\phi}{FM} + \frac{r\,\text{ſen.}\,\phi^2}{FM} = \frac{(r\,\text{coſ.}\,\phi - a)\,\text{coſ.}\,\phi + r\,\text{ſen.}\,\phi^2}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\,\text{coſ.}\,\phi)}}$$
$$= \frac{r - a\,\text{coſ.}\,\phi}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\,\text{coſ.}\,\phi)}}$$. Laonde l'illuminazione generata nel punto F dall' archetto Mm farà $\frac{Ir(r - a\,\text{coſ.}\,\phi)\,d\phi}{(a^2+r^2-2ar\,\text{coſ.}\,\phi)^{3:2}}$
$$= \frac{Ir(r - a\,\text{coſ.}\,\phi)\,d\phi}{(a^2+r^2)^{3:2}\left(1 - \frac{2ar}{a^2+r^2}\,\text{coſ.}\,\phi\right)^{3:2}} = \frac{Ir(r - a\,\text{coſ.}\,\phi)\,d\phi}{h^{3:2}(1 - m\,\text{coſ.}\,\phi)^{3:2}}$$
aſſumendo $h = a^2 + r^2$, $m = \frac{2ar}{a^2+r^2}$. Trovata pertanto l'illuminazione generata dall' archetto $Mm = \frac{Ir}{h^{3:2}}$ $(r - a\,\text{coſ.}\,\phi)\ (1 - m\,\text{coſ.}\,\phi)^{-3:2}\,d\phi$, io riduco in ſerie l'eſpreſſione $(1 - m\,\text{coſ.}\,\phi)^{-3:2}$, ed ho la detta eſpreſſione $= 1 + \frac{1}{2} m\ \text{coſ.}\ \phi + \frac{3\,.\,5}{2\,.\,4} m^2\ \text{coſ.}\ \phi^2 + \frac{3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6} m^3\,\text{coſ.}\ \phi^3 + \frac{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} m^4\ \text{coſ.}\ \phi^4 + \frac{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10}\ m^5\ \text{coſ.}\ \phi^5 +$ ecc.

Dunque l'illuminazione dell' archetto farà
$$\frac{Ir}{h^{3:2}}\Big(r\,d\phi + \frac{1}{2} mr\,\text{coſ.}\,\phi\,d\phi - a\,\text{coſ.}\,\phi\,d\phi + \frac{3\,.\,5}{2\,.\,4} rm^2\ \text{coſ.}\ \phi^2\,d\phi - \frac{3}{2} am\,\text{coſ.}\ \phi^2\,d\phi + \frac{3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6} rm^3\ \text{coſ.}\ \phi^3\,d\phi - \frac{3\,.\,5}{2\,.\,4} am^2\ \text{coſ.}\ \phi^3\,d\phi$$
$$+ \frac{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} rm^4\ \text{coſ.}\ \phi^4\,d\phi - \frac{3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6} am^3\ \text{coſ.}\ \phi^4\,d\phi$$
$$+ \frac{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10}\ rm^5\ \text{coſ.}\ \phi^5\,d\phi - \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} am^4\,\text{coſ.}\,\phi^5\,d\phi + \text{ecc.}$$

$$= \frac{Ir}{h^{3:2}} \left\{ \begin{pmatrix} rd + \frac{3}{2} mr \\ - a \end{pmatrix} \text{coſ.}\,\varphi\, d\varphi \begin{pmatrix} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} rm^2 \\ - \frac{3}{2} am \end{pmatrix} \text{coſ.}\,\varphi^2\, d\varphi \right.$$

$$\begin{pmatrix} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} rm^3 \\ - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} am^2 \end{pmatrix} \text{coſ.}\,\varphi^3\, d\varphi \begin{pmatrix} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} rm^4 \\ - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} am^3 \end{pmatrix} \text{coſ.}\,\varphi^4\, d\varphi$$

$$\left. \begin{pmatrix} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} rm^5 \\ - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} am^4 \end{pmatrix} \text{coſ.}\,\varphi^5\, d\varphi \pm \text{ecc.} \right\} .$$

Chiamo A il coefficiente di coſ. $\varphi d\varphi$, B quello di coſ. $\varphi^2 d\varphi$, C quello di coſ. $\varphi^3 d\varphi$, D ecc. Perlochè la predetta illuminazione ſarà $\frac{Ir}{h^{3:2}} (rd\varphi + Ad\varphi\, \text{coſ.} + Bd\varphi\, \text{coſ.}\, \varphi^2 + C d\varphi\, \text{coſ.}\, \varphi^3 + Dd\varphi\, \text{coſ.}\, \varphi^4 + Ed\varphi\, \text{coſ.}\, \varphi^5 + \text{ecc.})$ Ora ſi ſa dal calcolo integrale, che

I.

$$A \int d\varphi\, \text{coſ.}\, \varphi = A\, \text{ſen.}\, \varphi$$

II.

$$B \int d\varphi\, \text{coſ.}\, \varphi^2 = \tfrac{1}{2} B\, \text{ſen.}\, \varphi\, \text{coſ.}\, \varphi + \tfrac{1}{2} B\varphi$$

III.

$$C \int d\varphi\, \text{coſ.}\, \varphi^3 = \tfrac{1}{3} C\, \text{ſen.}\, \varphi\, \text{coſ.}\, \varphi^2 + \tfrac{2}{3} C\, \text{ſen.}\, \varphi$$

IV.

$$D \int d\varphi\, \text{coſ.}\, \varphi^4 = \tfrac{1}{4} D\, \text{ſen.}\, \varphi\, \text{coſ.}\, \varphi^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} D\, \text{ſen.}\, \varphi\, \text{coſ.}\, \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} D\, \varphi$$

V.

$$E\int d\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi^5 = \frac{1}{5}\,E\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi^4 + \frac{1.4}{3.5}\,E\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi^2 + \frac{2.4}{3.5}\,E\,\text{ſen.}\,\varphi$$

VI.

$$F\int d\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi^6 = \frac{1}{6}\,F\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi^5 + \frac{1.5}{4.6}\,F\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,F\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi + \frac{1.3.5}{1.4.6}\,F\varphi$$

VII.

ecc.

Conſeguentemente integrando la precedente eſpreſſione dell' illuminazione dell' archetto, ſi avrà quella dell' arco indefinito $BM = \frac{Ir}{b^{3:2}}\Big(r\varphi + \frac{1}{2}B\varphi + \frac{1:3}{2.4}D\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}F\varphi + \text{ecc.}\ldots\ldots\ldots + A\,\text{ſen.}\,\varphi + \frac{2}{3}C\,\text{ſen.}\,\varphi + \frac{2.4}{3.5}E\,\text{ſen.}\,\varphi + \text{ecc.}\ldots\ldots + \frac{1}{2}B\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi + \frac{1.3}{2.4}D\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}F\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi + \text{ecc.}\ldots + \frac{1}{3}C\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi^2 + \frac{1.4}{3.5}E\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi^2 + \text{ecc.}\ldots\ldots \frac{1}{4}D\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi^3 + \frac{1.5}{4.6}F\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi^3 + \text{ecc.}\ldots\ldots + \frac{1}{5}E\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi^4 + \text{ecc.}\ldots\ldots + \frac{1}{6}F\,\text{ſen.}\,\varphi\,\text{coſ.}\,\varphi^5 + \text{ecc.}\ldots\ldots\Big) + \text{coſt.}$ E ſiccome l' illuminazione diventa

venta nulla quando l' arco pure diventa nullo, naſce perciò coſt. $= 0$. Poſto ora $\varphi = 360° = 2\pi$, prendendo π per la ſemicirconferenza del cerchio deſcritto col raggio 1, riſulta tutta l'illuminazione generata nel dato punto F dall' intera circonferenza raggiante $BMRS$

$$= \frac{2Ir\pi}{(a^2+r^2)^{3:2}}\left(r + \frac{1}{2}B + \frac{1.3}{2.4}D + \frac{1.3.5}{2.4.6}F + \text{ecc.}\right)$$

Se ſi voleſſe ora conoſcere l' illuminazione generata dalla periferia lucida in un punto ſituato ſulla medeſima, baſterà aſſumere $a = r$, e quindi $b = 2r^2$, $m = 1$,

$$B = \frac{3.5}{2.4}r - \frac{3}{2}r = \frac{3(5-4)}{2.4}r = \frac{3}{2.4}r, D = \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}r$$

$$- \frac{3.5.7}{2.4.6}r = \frac{3.5.7(9-8)}{2.4.6.8}r = \frac{3.5.7}{2.4.6.8}r,$$

$$F = \frac{3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10.12}r - \frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10}r = \frac{3.5.7.9.11(13-12)}{2.4.6.8.10.12}r$$

$= \frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}r$, ecc., ed avraſſi la detta illuminazione $= \frac{I\pi}{r\sqrt{2}}\left(1 + \frac{3}{2.2.4} + \frac{3.3.5.7}{2.2.4.4.6.8}\right.$

$$\left. + \frac{3.3.5.5.7.9.11}{2.2.4.4.6.6.8.10.12} + \text{ecc.}\right).$$

Paſſo ora a calcolare l' illuminazione generata da un cerchio luminoſo FGO (*fig.* 6) ſopra un punto A ſituato nella retta CA, che dal ſuo centro ſi conduce perpendicolare al piano del cerchio. Dal centro C deſcrivendo i due cerchj infinitamente proſſimi MER, SNm, egli è evidente, che l' illuminazione prodotta in A dalla zona infiniteſima racchiuſa tralle loro circonferenze s' agguaglia all' unità d' illuminazione moltiplicata per detta zona, e diviſa pel quadrato della diſtanza AM nell' ipoteſi Euleriana, e moltiplicata nuovamente pel ſeno dell' angolo di emanazione CMA nell' ipoteſi di *Lambert*. Dunque nominando il raggio *CF* del dato cerchio r, a la diſtanza *AC* del punto dato dal centro, x il raggio *CM*, $1 : \pi$ il rapporto del diametro alla circonferenza del cerchio, ſi trova la zona luminoſa $= 2\pi x dx$, $AM^2 = a^2 + x^2$, e l' illuminazione generata dalla zona in $A = \frac{2I\pi x dx}{a^2+x^2}$. Dunque integrando ſarà l' illuminazione prodotta dal cerchio *RME* $= \int \frac{2I\pi x dx}{a^2+x^2} = I\pi \log. (a^2 + x^2) + \text{coſt}$: e ſiccome l' illuminazione ſvaniſce col ſemidiametro x; quindi è coſt. $= - I\pi \log. a^2$; onde la detta illuminazione ſi fa $= I\pi \log. \frac{a^2+x^2}{a^2}$. Laonde per tutto il dato cerchio *OFG* ſarà l' illuminazione ricercata $= I\pi \log. \frac{a^2+r^2}{a^2}$ nell' ipoteſi Euleriana.

Nell' ipoteſi di *Lambert* conviene moltiplicare l' eſpreſſione $\frac{2I\pi x dx}{a^2+x^2}$ pel ſeno dell' angolo *AMC*, cioè per $\frac{AC}{AM}$, oſſia per $\frac{a}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ ad effetto di ottenere l' illuminazione prodotta dalla zona circolare, la quale illuminazione ſarà in conſeguenza $= \frac{2I\pi a x dx}{(a^2+x^2)^{3:2}}$. L' integrale di queſta formola è $= - \frac{2I\pi a}{\sqrt{(a^2+x^2)}} + \text{coſt.}$ $= 2I\pi \left(1 - \frac{a}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\right)$. Onde l' illuminazione prodotta dall' area circolare indefinita *RME* è $= \frac{2I\pi(\sqrt{(a^2+x^2)}-a)}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$, e quella che è generata dal cerchio dato *FOG* è $= \frac{2I\pi\left(\sqrt{(a^2+r^2)}-a\right)}{\sqrt{(a^2+r^2)}}$

$= 2I\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{(a^2+r^2)}}\right)$.

Pongaſi ora al confronto queſta eſpreſſione $2I\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{(a^2+r^2)}}\right)$ colla prima $I\pi \log. \frac{a^2+r^2}{a^2}$, e ſi giudichi quanto eſſenzialmente differiſcono l' una dall' altra. Queſta differenza arriva a tal ſegno, che ſe il cerchio luminoſo ſi ſuppone infinito, cioè $r = \infty$, l'illuminazione da eſſo prodotta nel dato punto ſecondo l' ipoteſi di *Lambert* e *Bouguer* diventa $2I\pi$, cioè determinata e finita, ma nell' ipoteſi comune Euleriana ſi ſcuopre $= 2I\pi \log. \infty$, cioè a dire infinita.

Un ſoggetto degno dell' attenzione de' fiſici e geometri in queſta ſcienza della miſura del Lume è quello, che ſpetta a' varj gradi d' illuminazione, che la terra riceve dal ſole nelle ſue diverſe altezze ſopra l' orizzonte, e ſingolarmente dalle parti ſucceſſivamente viſibili del diſco ſolare allorchè attraverſa l' orizzonte così nel naſcere, come nel tramontare. Volendo entrare in queſta delicata ricerca, convien prima premettere il Problema di ritrovare l' illuminazione, che da una data ſuperficie in tutti i ſuoi punti *egualmente luminoſa* viene prodotta in un elemento o porzione infiniteſima di un' altra data ſuperficie eſpoſta ai raggi della prima. A tal effetto ſia *PMQ* (*fig.* 7) la ſuperficie raggiante di qualunque forma, ugualmente luminoſa in tutte le ſue parti; ed *EF* ſia la ſuperficie eſpoſta a ricevere i raggi di quella; cercaſi l' illuminazione prodotta da *PQ* nell' elemento, o porzioncella infiniteſima *Aa*. Piglisi nella ſuperficie illuminante l'elemento *Mm*, che tramanda in *A* la piramide luminoſa *MAm* ſotto l' angolo d' incidenza $MAa = b$, e ſotto l' angolo di emanazione $mMA = e$. Ciò poſto, l' illuminazione eccitata nell' elemento *Aa* da *Mm* ſi avrà con moltiplicare la parte illuminatrice *Mm* pel ſeno dell' angolo *b* d' incidenza, e pel ſeno dell' angolo *e* di emanazione, e con dividere il prodotto pel quadrato della diſtanza *MA*, cioè ſarà $= \frac{Mm.\ \text{ſen.}\ b\ \text{ſen.}\ e}{MA^2}$. Si concepiſca tagliata la piramide luminoſa da un piano *mi* perpendicolare ai lati di lei; e per la Geometria ſarà come il ſeno tutto al ſeno dell' angolo *mMA*, così la baſe infiniteſima *Mm* della piramide al piano ſecante *mi*; onde $mi = Mm.\ \text{ſen.}\ e$; e quindi l' illuminazione prodotta $= \frac{mi.\ \text{ſen.}\ b}{MA^2}$. Se ora intorno ad *A* come centro col ſemidiametro $AC = 1$ ſi deſcrive una ſuperficie sferica, di cui *BNC* ſia la porzione compreſa fra la piramide luminoſa *PAQ* tramandata in *A* da tutta la ſuperficie raggiante *PQ*, ed *Nn* ſia la porzioncella ſerrata fra la piramidetta *Mam*; egli è noto, che le due minime ſuperficie *mi*, *Nn* ſtanno fra loro come i quadrati di *Ai*, ovvero *AM*, ed *AN*; e però *Nn* $= \frac{mi.\ AV^2}{AM^2} = \frac{mi}{AM^2}$; e queſto valore ſoſtituito nella precedente eſpreſſione dell' illuminazione rende queſta $= Nn.\ \text{ſen.}\ b$, per modo che chiamata *I* l' illuminazione prodotta da una porzione finita della ſuperficie raggiante *PMQ*, ed $Nn = d\omega$, riſulta $dI = d\omega\ \text{ſen.}\ b$, ed $I = \int d\omega\ \text{ſen.}\ b$.

Di qui è facile l' inferire, che ſe la ſuperficie sferica *BNC* foſſe ancor eſſa una ſuperficie raggiante, ed ugualmente luminoſa in tutte le ſue parti, come lo è la *PMQ*, l' illuminazione da eſſa prodotta in *Aa* ſarebbe preciſamente la ſteſſa che quella prodotta da *PMQ*. Imperciocchè eſſendo l' illuminazione in *A* dell' elemento *Nn* uguale al prodotto di detto elemento nel ſeno dell' angolo di emanazione nNA, e nel ſeno dell' angolo d'incidenza b, diviſo pel quadrato della diſtanza NA, ed eſſendo $= 1$ così queſto quadrato, come il ſeno dell' angolo retto nNA, ne viene l' illuminazione generata dall' elemento $Nn = d\omega$ ſen. b, qual'è appunto (come ſi è veduto) l' illuminazione generata dall' elemento Mm; e con ſimil diſcorſo ſi prova, che l' illuminazione eccitata in Aa da tutta la data ſuperficie PMQ è uguale all' illuminazione fatta dal ſegmento sferico BNC rinſerrato fra i lati della piramide lucida PAQ.

Per venire ora alla determinazione dell' illuminazione del ſole nelle ſue diverſe altezze ſopra l' orizzonte, ſia Cc (*fig.* 8) una ſuperficie piana orizzontale infinitamente piccola in tutte le dimenſioni, e intorno ad eſſa come centro la ſuperficie sferica $AOBZ$ col ſemidiametro $= 1$, la quale dal piano Cc prodotto viene tagliata nel cerchio maſſimo orizzontale ALB. Il cono luminoſo DCE, che partendo da tutto il diſco ſolare va ad irradiare la ſuperficie data infiniteſima Cc, ed ha per aſſe CP, taglia nella ſuperficie sferica il ſegmente $DQEP$ avente per baſe il cerchio DQE, e per polo P; e conſeguentemente, per ciò che ſi è dimoſtrato, tanta ſarà l' illuminazione, che produrrebbe in Cc la ſuperficie concava $DQEP$, ſe ſi ſupponeſſe ugualmente lucida che il diſco ſolare, quanta è l' illuminazione eccitata dal diſco medeſimo, ſicchè per conoſcer queſta baſterà ritrovar quella. Tiriſi pertanto la verticale CZ, ed il piano ZCP diſteſo ſegni nella ſuperficie sferica il cerchio verticale $ZAOE$; e per un punto M preſo ad arbitrio nel predetto ſegmento ſi faccia paſſare il parallelo FNG appartenente al polo P, conducendoſi pure il parallelo infinitamente vicino fmg. Ciò fatto pel polo P, e pel punto M ſi concepiſca guidato l' arco PMm di circolo maſſimo, e l' arco PNn ſotto un angolo infiniteſimo col primo: finalmente pel vertice Z, e per M ſi faccia paſſare il cerchio verticale $ZMKO$, che incontri in K il cerchio orizzontale. Si faccia la diſtanza di M dal vertice, cioè $ZM = \Delta$, la diſtanza dal polo, oſſia $PM = p$, l'angolo al polo $ZPM = \phi$; e ſarà il ſemidiametro del parallelo $FMG = \text{ſen.}\, p$, $MN = d\phi\, \text{ſen.}\, p$, $Mm = dp$. Laonde l'elemento $MmnN$, che ſi ha con moltiplicare MN per Mm, ſi trova $= d\phi dp\, \text{ſen.}\, p$, e queſto moltiplicato pel ſeno dell' angolo d' incidenza MCK, ovvero per coſ. Δ dà per l' illuminazione prodotta dall' elemento $MmnN$ la formola $d\phi dp\, \text{ſen.}\, p\, \text{coſ.}\, \Delta$. Poſta ora la diſtanza del polo dal vertice, ovvero $PZ = a$, ſi ha nel triangolo ſferico ZPM dalla Trigonometria $\text{coſ.}\, \Delta = \text{coſ.}\, p\, \text{coſ.}\, a + \text{ſen.}\, p\, \text{ſen.}\, a\, \text{coſ.}\, \phi$, e ſurrogato nella formola precedente queſto valore naſce l' eſpreſſione $d\phi dp\, \text{ſen.}\, p\, \text{coſ.}\, p\, \text{coſ.}\, a + d\phi\, d\, p\, \text{ſen.}\, p^2\, \text{ſen.}\, a\, \text{coſ.}\, \phi$, la quale rappreſenta l' illuminazione del ſuddetto elemento. Si avverta preſentemente, che l' integrazione di queſta formola, nel ſuppoſto che ſi faccia variare la ſola ϕ, ſomminiſtra l' illuminazione prodotta dalla parte indeterminata $FfmM$ della zona infiniteſima $FfgG$, e queſta illuminazione trovaſi $= \phi dp\, \text{ſen.}\, p\, \text{coſ.}\, p\, \text{coſ.}\, a + dp\, \text{ſen.}\, p^2\, \text{ſen.}\, a\, \text{ſen.}\, \phi$: ſiffatta quantità dee pur eſſa integrarſi, ma in ipoteſi che ſi cangi la ſola p; e ſiccome è noto, che $\int dp\, \text{ſen.}\, p\, \text{coſ.}\, p = \frac{1}{2}\, \text{ſen.}\, p^2$, e $\int dp\, \text{ſen.}\, p^2 = \frac{1}{2} p - \frac{1}{2}\, \text{ſen.}\, p\, \text{coſ.}\, p$; quindi ſarà $\int \phi dp\, \text{ſen.}\, p\, \text{coſ.} p\, \text{coſ.}\, a + \int dp\, \text{ſen.}\, p^2\, \text{ſen.}\, \phi\, \text{ſen.}\, a = \frac{1}{2} \phi\, \text{ſen.}\, p^2\, \text{coſ.}\, a + \frac{1}{2} p\, \text{ſen.} \phi\, \text{ſen.} a - \frac{1}{2}\, \text{ſen.}\, p\, \text{coſ.}\, p\, \text{ſen.}\, \phi\, \text{ſen.}\, a = \frac{1}{2} \phi\, \text{ſen.}\, p^2\, \text{coſ.}\, a + \frac{1}{2} \text{ſen.}\, \phi\, \text{ſen.}\, a\, (p - \text{ſen.}\, p\, \text{coſ.}\, p)$, che eſprime l' illuminazione fatta dalla parte indefinita FMP del ſegmento FGP; ſicchè preſo $\phi = 360° = 2\pi$, riſulta l' illuminazione eccitata da tutto quel ſegmento $=\pi$ ſen. p^2 coſ. a; e facendoſi poi eſprimere da p la diſtanza PR del polo dalla baſe dell' intero ſegmento DEP rinſerrato fra i raggi del cono ſolare luminoſo, la ſteſſa formola ſempliciſſima π ſen. p^2 coſ. a rappreſenta l' illuminazione di eſſo ſegmento, e conſeguentemente quella del diſco ſolare, che è in tutto equivalente alla prima.

Per mezzo di queſta formola rieſce ora faciliſſima la coſtruzione di una Tavola, la quale rappreſenti le varie illuminazioni del ſole nelle differenti diſtanze del ſuo centro dal zenit, ovvero nelle differenti altezze del centro ſolare ſopra l' orizzonte, facendo $=1$ l' illuminazione corriſpondente all' altezza di 90°.

TAVOLA.

Altezze del centro ſolare ſopra l' orizzonte.	Illuminazioni prodotte dal ſole in un piano orizzontale.	64°	0,8987940	33°	0,5446390	2°	0,0348995
		63°	0,8910065	32°	0,5299193	1°	0,0174524
		62°	0,8829470	31°	0,5150381		
		61°	0,8746197	30°	0,5000000		
		60°	0,8660254	29°	0,4848096		
90°	1,0000000	59°	0,8571673	28°	0,4694716		
89°	0,9998477	58°	0,8480481	27°	0,4539905		
88°	0,9993908	57°	0,8386706	26°	0,4383712		
87°	0,9986295	56°	0,8290376	25°	0,4226183		
86°	0,9975640	55°	0,8191521	24°	0,4067366		
85°	0,9961947	54°	0,8090170	23°	0,3907311		
84°	0,9945218	53°	0,7986355	22°	0,3746066		
83°	0,9925462	52°	0,7880107	21°	0,3583679		
82°	0,9902680	51°	0,7771460	20°	0,3420202		
81°	0,9876883	50°	0,7660444	19°	0,3255682		
80°	0,9848077	49°	0,7547096	18°	0,3090170		
79°	0,9816271	48°	0,7431448	17°	0,2923717		
78°	0,9781476	47°	0,7313537	16°	9,2756374		
77°	0,9743701	46°	0,7193398	15°	0,2588190		
76°	0,9702957	45°	0,7071068	14°	0,2419219		
75°	0,9659258	44°	0,6946584	13°	0,2249511		
74°	0,9612617	43°	0,6819984	12°	0,2079117		
73°	0,9563048	42°	0,6691306	11°	0,1908090		
72°	0,9510565	41°	0,6560590	10°	0,1736482		
71°	0,9455185	40°	0,6427876	9°	0,1564345		
70°	0,9396926	39°	0,6293204	8°	0,1391731		
69°	0,9335804	38°	0,6156615	7°	0,1218693		
68°	0,9271839	37°	0,6018150	6°	0,1045285		
67°	0,9205040	36°	0,5877853	5°	0,0871527		
66°	0,913545	35°	0,5735764	4°	0,0697565		
65°	0,9063078	34°	0,5591929	3°	0,0523360		

Siccome

Siccome inoltre è noto dall' Aſtronomia, che l' angolo ſotteſo dal ſemidiametro ſolare, ovvero l' arco *PD*, oppure *p* è uguale a 16′, il lembo inferiore del diſco ſolare non giugne a toccare l' orizzonte ſe non allorquando il centro del ſole ſi trova a 16′ di altezza. Conſeguentemente per le altezze del centro ſolare minori di un grado riſulta la ſeguente

TAVOLA.

Altezze del centro ſolare minori di un grado.	Illuminazioni prodotte da tutto il diſco ſolare ſopra un piano orizzontale.
59′	0, 0171616
58′	0, 0168707
57′	0, 0165799
56′	0, 0162802
55′	0, 0159982
54′	0, 0157073
53′	0, 0154165
52′	0, 0151256
51′	0, 0148348
50′	0, 0145439
49′	0, 0142530
48′	0, 0139622
47′	0, 0136713
46′	0, 0133805
45′	0, 0130896
44′	0, 0127987
43′	0, 0125079
42′	0, 0122170
41′	0, 0119261
40′	1, 0116353
39′	0, 0113444
38′	0, 0110535
37′	0, 0107627
36′	0, 0104718
35′	0, 0101809
34′	0, 0098900
33′	0, 0095992
32′	0, 0093083
31′	0, 0090174
30′	0, 0087265
29′	0, 0084357
28′	0, 0081448
27′	0, 0078539
26′	0, 0075630
25′	0, 0072721
24′	0, 0069813
23′	0, 0066904
22′	0, 0063995
21′	0, 0061086
20′	0, 0058177
19′	0, 0055268
18′	0, 0052360
17′	0, 0049451
16′	0, 0046542

Colle dottrine finqui eſpoſte ſi può ora dare il giuſto valore a quell' oſſervazione cardinale di *Bouguer*, ſulla quale quel celebre Geometra fonda tutta la ſua teoria dell' indebolimento del lume degli aſtri nell' attraverſare l' atmosfera terreſtre, e coſtruiſce la ſua Tavola delle forze del lume dopo il paſſaggio per l' atmosfera nelle differenti altezze dell' aſtro. Paragona egli l' intenſità della luce lunare nell' altezza di 19° 16' con quella che corriſponde all' altezza di 66°. 11', e dopo un' attenta oſſervazione ſtabiliſce il rapporto delle due intenſità in quello di 1681 : 2500, cioè a dire ſecondo *Bouguer* la luna all' altezza apparente di 19°. 16' ſopra l' orizzonte ſparge ſulla terra una luce un terzo più debole di quella che vi manda nell' altezza di 66°. 11'.

Ma ſe ſi applica a queſto caſo la noſtra formola π ſen. p^2 coſ. a, ſi trova ſubito il rapporto di quelle due intenſità eſpreſſo da 32996 : 91484; e però la luna ſenza l' alterazione prodotta dall' atmosfera (da cui la noſtra formola preſcinde) getta ſulla terra una luce quaſi tre volte più debole all' altezza di 19°. 16', che all' altezza di 66°. 11'; e ſiffatto indebolimento dee poi creſcere molto più avendo riguardo alla diminuzione del lume nel paſſaggio per l' atmosfera, diminuzione tanto maggiore, quanto è più lungo il viaggio della luce per l' atmosfera, oſſia quanto è più vicina la luna all'orizzonte. Quindi può farſi giudizio, qual poco conto dee farſi di quell' oſſervazione fondamentale di *Bouguer*, ed a qual inſtabile principio ſi appoggia tutta la ſua teoria della diſperſione e del diſſipamento, che ſoffre il lume nel tragittare l' atmosfera terreſtre.

Finalmente il maneggio della predetta formola ci fa conoſcere un' altra verità poco o nulla atteſa, ed è la notabiliſſima diverſità nella forza della luce ſolare, e conſeguentemente nella chiarezza del giorno dall' una all' altra ſtagione dell' anno. Per cagion d' eſempio qui in Pavia, dove l' altezza meridiana del centro del ſole nel giorno del ſolſtizio d' eſtate è di $68^\circ.\ 17'$, e nel ſolſtizio d' inverno è di $21^\circ.\ 21'$, ſi ſcuopre, che la chiarezza del giorno in ſul meriggio nel primo ſolſtizio ſta a quella dell' altro ſolſtizio come 92902 : 36406, cioè il meriggio del giorno ſolſtiziale eſtivo è oltre il doppio più chiaro e luminoſo del meriggio del giorno ſolſtiziale iemale, ed una tal proporzione fra lo ſplendore meridiano de' due ſolſtizj creſce poi maggiormente pel diſſipamento della luce ſolare nel ſuo tragitto attraverſo l' atmosfera, il qual diſſipamento è ſempre vie minore quanto è maggiore l' altezza del ſole ſull' orizzonte.

Reſta ora per ultimo da indagare l' illuminazione di qualunque parte viſibile del diſco ſolare nell' atto che attraverſa l' orizzonte. La formola eſprimente l' illuminazione prodotta da qualunque parte indeterminata del diſco del ſole ſopra un piano orizzontale ſi è trovata $= \frac{\varphi}{2\pi}\,\text{coſ.}\,a + \frac{\text{ſen.}\,\varphi\ \text{ſen.}\,a\,(p - \text{ſen.}\,p\ \text{coſ.}\,p)}{2\pi\ \text{ſen.}\,p^2}$, nella quale p è l' angolo ſotteſo dal ſemidiametro del ſole, cioè $p = 16'$; 2π è la circonferenza del cerchio deſcritto col raggio 1, cioè $2\pi = 6,28318530$; a è la diſtanza del centro del ſole dal zenit; φ è l' angolo al polo del ſegmento luminoſo ecc. Siccome in queſta formola è invariabile la quantità $\frac{p - \text{ſen.}\,p\ \text{coſ.}\,p}{2\pi\ \text{ſen.}\,p^2}$ in tutte le differenti altezze del centro ſolare ſopra l' orizzonte, ſia bene determinarla anticipatamente. Eſſendo dunque $2\pi = 360^\circ = 21600'$, $p = 16'$, ſtarà $21600' : 16' :: 6,28318530$: al quarto, che ſarà p eſpreſſo in parti del raggio 1. Sicchè

log. $6,28318530 = 0,7981799$
log. $16'$ . . . . . . $= 1,2041200$
$2,0022999$
log. $21600'$ . . . . $= 4,3344537$
$7,6678462$ numero $= 0,0046542$

Dunque $p = 0,0046542$

Parimente per trovare ſen. p coſ. p, che dee ſottrarſi da p ſi fa

$$
\begin{array}{ll}
\text{log. ſen. } p \ldots\ldots = & 7,6678445 \\
\text{log. coſ. } p \ldots\ldots = & 9,9999953 \\
\hline
& 7,6678398 \text{ numero} = \underline{0,0046541}
\end{array}
$$

Perciò $p - \text{ſen. } p \text{ coſ. } p \ldots\ldots\ldots = 0,0000001$

Si trova ora log. $\dfrac{2\pi \text{ ſen. } p^2}{p - \text{ſen. } p \text{ coſ. } p}$ così:

$$
\begin{array}{ll}
\text{log. } 2\pi \ldots\ldots\ldots & = 0,7981799 \\
2 \text{ log. ſen. } p \ldots\ldots & = 5,3356890 \\
\hline
\text{log. } 2\pi \text{ ſen. } p^2 \ldots & = 6,1338689 \\
\text{log. } \dfrac{1}{p - \text{ſen.} p \text{ coſ.} p} \ldots & = 7,0000000 \\
\text{log. } \dfrac{2\pi \text{ ſen. } p^2}{p - \text{ſen.} p \text{ coſ.} p} \ldots & = 3,1338689
\end{array}
$$

, che è il logaritmo da ſottrarſi da log. ſen. φ ſen. a per avere il logaritmo del ſecondo termine della formola, cioè di $\dfrac{\text{ſen. } \varphi \text{ ſen. } a \, (p - \text{ſen. } p \text{ coſ.} p)}{2\pi \text{ ſen. } p^2}$. Ecco dunque il proſpetto

$2\pi' = 21600'$ log. $2\pi' = 4,3344537$

$2\pi = 6,28318530$ log. $\dfrac{2\pi \text{ ſen. } p^2}{p - \text{ſen. } p \text{ coſ. } p} = 3,1338689$

PARTE I.

Altezze del centro ſolare ſopra l'orizzonte.

CASO I.

Altezza del centro del ſole ſopra l'orizzonte $= 15'$; onde $a = 89°.45'$; e così $\varphi = 90° + \text{arc. ſen. } \frac{15}{16}$. Ma log. $\frac{15}{16} = 9,\ 9719713$, a cui corriſponde arc. $= 69^\circ.\ 38'$.

Dunque $\varphi = 90^\circ + 69^\circ\ 38' = 159^\circ.\ 38' = 9578'$.

Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{9578}{21600}$ ſen. $15'$. Perciò

$$\begin{array}{ll}
\text{log. } 9578 = & 3,\ 9812748 \\
\text{log. ſen. } 15' \ldots = & \underline{7,\ 6398160} \\
 & 1,\ 6210908 \\
\text{log. } 21600 \ldots = & \underline{4,\ 3344537} \\
 & 7,\ 2860371 \text{ num.} \ldots = 0,\ 0019348
\end{array}$$

ſen. $\varphi =$ ſen. $159^\circ.\ 38' =$ ſen. $20^\circ.\ 22'$

$$\begin{array}{ll}
\text{log. ſen. } \varphi \ldots = & 9,\ 5416126 \\
\text{log. ſen. } a \ldots = & \underline{9,\ 9999959} \\
 & 9,\ 5416085 \\
 & \underline{-3,\ 1338689} \\
 & 6,\ 4077396 \text{ num.} \ldots = \underline{0,\ 0002557}
\end{array}$$

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento ſuperiore all'orizzonte .... $= 0,\ 0021905$

e l'illuminazione di tutto quel ſegmento ſuperiore all'orizzonte eſſendo doppia, è .... $= 0,\ 0043810$

(*A*)

CASO II.

Altezza del centro ſolare ſopra l'orizzonte $= 14'$; perciò $a = 89^\circ.\ 46'$; onde $\varphi = 90^\circ +$ arc. ſen. $\frac{14}{16} =$ $90^\circ +$ arc. ſen. $\frac{7}{8}$. Ma log. $\frac{7}{8} = 9,\ 9420080$, a cui corriſponde arc. $= 61^\circ.\ 3'$.

Dunque $\varphi = 151^\circ.\ 3' = 9063'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi}$ coſ. $a = \frac{9063}{21600}$ ſen. $14'$. Perciò

log. 9063 = 3, 9572720
log. ſen. 14′ = 7, 6098530
1, 5671250
log. 21600 = 4, 3344537
7, 2326713 num. = 0, 0017087

ſen. φ = ſen. 151°. 3′ = ſen. 28°. 57′

log. ſen. φ .... = 9, 6848868
log. ſen. a ... = 9, 9999964
9, 6848832
— 3, 1338689
6, 5510143 num. = 0, 0003556

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è = 0, 0020643
e però l'illuminazione doppia, cioè di
tutto il ſegmento è .... = 0, 0041286
(B)

CASO III.

Altezza del centro ſolare = 13′, quindi a = 89°. 47′; e però $\varphi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{13}{16}$. Ma log. $\frac{13}{16}$ = 9, 9098233, a cui corriſponde arc. = 54°. 21′. Dunque φ = 144°. 21′ = 8661′. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$, coſ. a = $\frac{8661}{21600}$ ſen. 13′. Sicchè

log. 8661 ... = 3, 9375680
log. ſen. 13′ .. = 7, 5776686
1, 5152366
log. 21600 = 4, 3344537
7, 1807829 num. = 0, 0015163
ſen. φ = ſen. 144°. 21′ = ſen. 35°. 39′

log. ſen. φ = 9, 7655436
log. ſen. a = 9, 9999969
9, 7655405
— 3, 1338689
6, 6316716 num. = 0, 0004282

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento
è . . . . = 0, 0019445
e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0038890
(*C*)

CASO IV.

Altezza del centro ſolare = 12′; cioè $a = 89°. 48'$; onde $\varphi = 90° + \text{arc. ſen.} \frac{3}{4}$. Ma log. $\frac{3}{4} = 9{,}8750612$, a cui corriſponde arc. = 48°. 35′; perciò $\varphi = 138°. 35' = 8315'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{8315}{21600}$ ſen. 12′. Sicchè

log. 8315 = 3, 9198623
log. ſen. 12′ = 7, 5429065
1, 4627688
log. 21600 = 4, 3344537
7, 1283151 num. = 0, 0013437

ſen. φ = ſen. 138°. 35′ = ſen. 41°. 25′. Onde
log. ſen. φ = 9, 8205496
log. ſen. a = 9, 9999974
9, 8205470
— 3, 1338689
6, 6866781 num. = 0, 0004860

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0018297
e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0036594
(*D*)

Caso V.

Altezza del centro ſolare = 11′, ovvero $a = 89°.\ 49'$; onde $\varphi = 90° + \text{arc. ſen.}\ \frac{11}{16}$. Ma log. $\frac{11}{16} = 9,8372727$, a cui corriſponde arc. 43°. 26′. Sicchè $\varphi = 133°.\ 26' = 8006'$. Perciò $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{8006}{21600}$ ſen. 11′.

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. } 8006 & = & 3,9034156 \\
\text{log. ſen. } 11' & = & 7,5051181 \\ \cline{3-3}
 & & 1,4085337 \\
\text{log. } 21600 & = & 4,3344537 \\ \cline{3-3}
 & & 7,0740800 \quad \text{num.} = 0,0011860
\end{array}$$

ſen. φ = ſen. 133°, 26′ = ſen. 46°. 34′. Dunque

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. ſen. } \varphi & = & 9,8610412 \\
\text{log. ſen. } a & = & 9,9999978 \\ \cline{3-3}
 & & 9,8610390 \\
 & - & 3,1338689 \\ \cline{3-3}
 & & 6,7271701 \quad \text{num.} = \underline{0,0005335}
\end{array}$$

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0,0017195
e l' illuminazione totale . . . . . = 0,0034390
(*E*)

Caso VI.

Altezza del centro ſolare = 10′, ovvero $a = 89°.\ 50'$., onde $\varphi = 90° + \text{arc. ſen.}\ \frac{5}{8}$. Ma log. $\frac{5}{8} = 9,7958800$, a cui corriſponde arc. = 38°. 41′.

Dunque

Dunque $\varphi = 128°.\ 41' = 7721'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. a $= \frac{7721}{21600}$ ſen. $10'$. Dunque

$$\begin{array}{lrl} \log.\ 7721 = & 3,\ 8876736 & \\ \log.\ \text{ſen.}\ 10' = & 7,\ 4637255 & \\ \hline & 1,\ 3513991 & \\ \log.\ 21600 = & 4,\ 3344537 & \\ \hline & 7,\ 0169464 & \text{num.} = 0,\ 0010398 \end{array}$$

ſen. φ = ſen. $108°.\ 41'$ = ſen. $51°.\ 19'$. Onde

$$\begin{array}{lrl} \log.\ \text{ſen.}\ \varphi = & 9,\ 8924354 & \\ \log.\ \text{ſen.}\ a = & 9,\ 9999982 & \\ \hline & 9,\ 8924336 & \\ - & 3,\ 1338689 & \\ \hline & 6,\ 7585647 & \text{num.} = \underline{0,\ 0005735} \end{array}$$

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0016133

e l'illuminazione totale . . . . . . = 0, 0032266

(*F*)

CASO VII.

Altezza del centro ſolare $= 9'$, cioè $a = 89°.\ 51'$; onde $\varphi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{9}{16}$. Ma log. $\frac{9}{16} = 9,7531225$, a cui corriſponde arc. $= 34°.\ 30'$. Dunque $\varphi = 124°.\ 30' = 7470'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{7470}{21600}$ ſen. $9'$; quindi

$$\begin{array}{lrl} \log.\ 7470 = & 3,\ 8733206 & \\ \log.\ \text{ſen.}\ 9' = & 7,\ 4179681 & \\ \hline & 1,\ 2912887 & \\ \log.\ 21600 = & 4,\ 3344537 & \\ \hline & 6,\ 9568350 & \text{num.} = 0,\ 0009054 \end{array}$$

ſen. ϕ = ſen. 124°. 30′ = ſen. 55°. 30′

log. ſen. ϕ = 9, 9159937
log. ſen. a = 9, 9999985
9, 9159922
− 3, 1338689
6, 7821233 num. = 0, 0006055

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0015109
e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0030218
(G)

CASO VIII.

Altezza del centro ſolare = 8′, cioè $a = 89°.\ 52'$; onde $\phi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{1}{2} = 90° + 30° = 120° = 7200'$.
Dunque $\frac{\phi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{7200}{21600}$ ſen. 8′. Sicchè

log. 7200 = 3, 8573325
log. ſen. 8′ = 7, 3668157
1, 2241482
log. 21600 = 4, 3344537
6, 8896945 num. = 0, 0007757

ſen. ϕ = ſen. 120° = ſen. 60°. Dunque

log. ſen. ϕ = 9, 9375306
log. ſen. a = 9, 9999988
9, 9375294
− 3, 1338689
6, 8036605 num. = 0, 0006363

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0014120
e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0028240
(H).

CASO IX.

Altezza del centro ſolare $= 7'$; ovvero $a = 89°.\ 53'$; onde $\phi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{7}{16}$. Ma log. $\frac{7}{16} = 9,6409780$, a cui corriſponde arc. $= 25°.\ 56'$. Dunque $\phi = 115°.\ 56' = 6956'$. Dunque $\frac{\phi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{6956}{21600}$ ſen. $7'$. Sicchè

log. 6956 = 3, 8423596

log. ſen. 7' = 7, 3088239

1, 1511835

log. 21600 = 4, 3344537

6, 8167298 num. = 0, 0006557

ſen. ϕ = ſen. 115°. 56' = ſen. 64°. 4'. Sicchè

log. ſen. ϕ = 9, 9539063

log. ſen. a = 9, 9999991

9, 9539054

— 3, 1338689

6, 8200365 num. = 0, 0006608

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0013165

e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0026330

(*I*)

CASO X.

Altezza del centro ſolare $= 6'$, cioè $a = 89°.\ 54'$; onde $\phi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{3}{8}$. Ma log. $\frac{3}{8} = 9,\ 5740312$, a cui corriſponde arc. $= 22°.\ 1'$. Dunque $\phi = 112°.\ 1' = 6721'$. Sicchè $\frac{\phi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{6721}{21600}$ ſen. $6'$. Onde

log. 6721 = 3, 8274339
log. ſen. 6′ = 7, 2418771
1, 0693110
log. 21600 = 4, 3344537
6, 7348573 num. = 0, 0005431

ſen. ϕ = ſen. 112°. 1′ = ſen. 67°. 59′. Sicchè

log. ſen. ϕ = 9, 9671148
log. ſen. a = 9, 9999993
9, 9671141
— 3, 1338689
6, 8332452 num. = 0, 0006811

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0012242
e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0024484
(L)

Caso XI.

Altezza del centro ſolare = 5′, cioè $a = 89°. 55'$; onde $\phi = 90° + \text{arc. ſen.} \frac{5}{16}$ Ma log. $\frac{5}{16} = 9,4948500$, a cui corriſponde arc. = 18°. 13′. Dunque $\phi = 108°. 13' = 6493'$. Sicchè $\frac{\phi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{6493}{21600}$ ſen. 5′.

log. 6493 = 3, 8124454
log. ſen. 5′ = 7, 1626960
0, 9751414
log. 21600 = 4, 3344537
6, 6406877 num. = 0, 0004372

ſen. ϕ = ſen. 108°. 13′ = ſen. 71°. 47′. Onde

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. ſen. } \phi & = & 9,9776693 \\
\text{log. ſen. } a & = & 9,9999995 \\
\hline
 & & 9,9776688 \\
 & - & 3,1338689 \\
\hline
 & & 6,8437999 \quad \text{num.} = \underline{0,0006979}
\end{array}$$

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0011351
e l'illuminazione intera . . . . = 0, 0022702
(*M*)

CASO XII.

Altezza del centro ſolare $= 4'$, cioè $a = 89°.\ 56'$; onde $\phi = 90°. + \text{arc. ſen.} \frac{1}{4}$. Ma log. $\frac{1}{4} = 9,3979400$, a cui corriſponde arc. $= 14°.\ 29'$. Dunque $\phi = 104°.\ 29' = 6269'$. Sicchè $\frac{\phi'}{2\pi'} \text{coſ.}\, a = \frac{6269}{21600}$ ſen. $4'$. Perciò

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. } 6269 & = & 3,7971983 \\
\text{log. ſen. } 4' & = & 7,0657860 \\
\hline
 & & 0,8629843 \\
\text{log. } 21600 & = & 4,3344537 \\
\hline
 & & 6,5285306 \quad \text{num.} = 0,0003377
\end{array}$$

ſen. ϕ = ſen. 104°. 29′ = ſen. 75°. 31′. Dunque

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. ſen. } \phi & = & 9,9859742 \\
\text{log. ſen. } a & = & 9,9999997 \\
\hline
 & & 9,9859739 \\
 & - & 3,1338689 \\
\hline
 & & 6,8521050 \quad \text{num.} = \underline{0,0007114}
\end{array}$$

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0010491
e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0020982
(*N*)

CASO XIII.

Altezza del centro ſolare $= 3'$, cioè $a = 89°.\ 57'$; onde $\phi = 90° + \text{arc. ſen.}\ \frac{3}{16}$. Ma log. $\frac{3}{16} = 9,2730012$, a cui corriſponde arc. $= 10°.\ 48'$; onde $\phi = 100°.\ 48' = 6048'$. Sicchè $\frac{\phi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{6048}{21600}$ ſen. $3'$. Onde

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. } 6048 & = & 3,7816118 \\
\text{log. ſen. } 3' & = & \underline{6,9408473} \\
 & & 0,7224591 \\
\text{log. } 21600 & = & \underline{4,3344537} \\
 & & 6,3880054 \quad \text{num.} = 0,0002443
\end{array}$$

ſen. $\phi =$ ſen. $100°.48' =$ ſen. $79°.\ 12'$. Dunque

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. ſen. } \phi & = & 9,9922385 \\
\text{log. ſen. } a & = & \underline{9,9999998} \\
 & & 9,9922383 \\
 & - & \underline{3,1338689} \\
 & & 6,8583694 \quad \text{num.} = \underline{0,0007217}
\end{array}$$

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . $= 0,0009660$

e l'illuminazione totale . . . . $= 0,0019320$

(O)

CASO XIV.

Altezza del centro ſolare $= 2'$, cioè $a = 89°.\ 58'$; onde $\phi = 90° + \text{arc. ſen.}\ \frac{1}{8}$. Ma log. $\frac{1}{8} = 9,0969100$, a cui corriſponde arc. $= 7°.\ 11'$. Dunque $\phi = 97°.\ 11' = 5831'$. Perciò $\frac{\Phi'}{2\pi}$ coſ. $a = \frac{5831}{21600}$ ſen. $2'$. Onde

$$\begin{array}{lcl}
\text{log. } 5831 & = & 3,\ 7657430 \\
\text{log. ſen. } 2' & = & 6,\ 7627561 \\
\cline{3-3}
 & & 0,\ 5284991 \\
\text{log. } 21600 & = & 4,\ 3344537 \\
\cline{3-3}
 & & 6,\ 1940454 \quad \text{num.} = 0,\ 0001563
\end{array}$$

ſen. ϕ = ſen. $97°.\ 11'$ = ſen. $82°.\ 49'$. Sicchè

$$\begin{array}{lcl}
\text{log. ſen. } \phi & = & 9,\ 9965778 \\
\text{log. ſen. } a & = & 9,\ 9999999 \\
\cline{3-3}
 & & 9,\ 9965777 \\
 & - & 3,\ 1338689 \\
\cline{3-3}
 & & 6,\ 8627088 \quad \text{num.} = \underline{0,\ 0007290}
\end{array}$$

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0008853
e l' illuminazione totale . . . . = 0, 0017706
(P).

CASO XV.

Altezza del centro ſolare = 1′, cioè $a = 89°.\ 59'$. Onde $\phi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{1}{16}$. Ma log. $\frac{1}{16} = 8,7958800$, a cui corriſponde arc. $= 3°.\ 35'$. Dunque $\phi = 93°.\ 35' = 5615'$. Perciò $\frac{\phi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{5615}{21600}$ ſen. 1′; vale a dire

$$\begin{array}{lcl}
\text{log. } 5615 & = & 3,\ 7493498 \\
\text{log. ſen. } 1' & = & 6,\ 4637261 \\
\cline{3-3}
 & & 0,\ 2130759 \\
\text{log. } 21600 & = & 4,\ 3344537 \\
\cline{3-3}
 & & 5,\ 8786222 \quad \text{num.} = 0,\ 0000756
\end{array}$$

ſen. ϕ = ſen. $93°.\ 35'$ = ſen. $86°.\ 25'$. Dunque

log. ſen. φ = 9, 9991501
log. ſen. a = 9, 9999999

9, 9991500
— 3, 1338689

6, 8652811 num. = 0, 0007333

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0008089
e l' illuminazione intera . . . . = 0, 0016178
(Q).

CASO XVI.

Altezza del centro ſolare = 0, cioè $a = 90°$, onde $\varphi = 90° +$ arc. ſen. $o = 90°$. Perciò eſſendo in tal caſo coſ. $a = 0$, ſvaniſce il primo termine della formola, e reſta il ſecondo, che è come ſegue

log. ſen. φ = 10, 0000000
log. ſen. a = 10, 0000000

20, 0000000
— 3, 1338689

6, 8661311 num. = 0, 0007347

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0007347
e l' illuminazione intera . . . . = 0, 0014694
(R).

PARTE II.

Depreſſione del centro ſolare ſotto l' orizzonte.

CASO I.

Altezza negativa del centro ſolare, cioè depreſſione = 1'; dunque $a = 90°.\ 1'$. In tutti queſti caſi ſi troverà

verà il valore di $\phi = 90° - \text{arc. ſen.}\,\frac{1}{16} = 90° - 3°.\ 35'$ (n°. xv) $= 86°.\ 25' = 5185'$. Dunque $\frac{\phi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{5185}{21600} \times -\text{ſen.}\ 1' = -\frac{5185}{21600}\,\text{ſen.}\ 1'$. Sicchè

$$\begin{array}{lcll} \log.\ 5185 & = & 3,7147488 & \\ \log.\ \text{ſen.}\ 1' & = & 6,4637261 & \\ \hline & & 0,1784749 & \\ \log.\ 21600 & = & 4,3344537 & \\ \hline & & 5,8440212 & \text{num.} = -0,0000698 \end{array}$$

Ora è manifeſto, che il ſecondo termine
della formola è preciſamente quello
ſteſſo che ſi è trovato al n°. xv, cioè $\underline{0,0007333}$
da cui ſottratto il precedente ſi ha
l' illuminazione del ſemiſegmento = 0,0006635
e l' illuminazione totale . . . . . . = 0,0013270
(*A*).

CASO II.

Depreſſione del centro ſolare = 2'; dunque $a = 90°.\ 2'$; onde $\phi = 90° - \text{arc. ſen.}\,\frac{1}{8} = 90° - 7°.\ 11'$ (n° xiv) $= 82°.\ 49' = 4969'$. Dunque $\frac{\phi'}{2\pi'}$ coſ. $a = -\frac{4969}{21600}\,\text{ſen.}\ 2'$. Sicchè

$$\begin{array}{lcll} \log.\ 4969 & = & 3,6962690 & \\ \log.\ \text{ſen.}\ 2' & = & 6,7627561 & \\ \hline & & 0,4590251 & \\ \log.\ 21600 & = & 4,3344537 & \\ \hline & & 6,1245714 & \text{num.} = -0,0001332 \end{array}$$

Il ſecondo termine della formola è lo ſteſſo, che ſi è trovato al n°. XIV; cioè 0, 0007290

Dunque ſarà l' illuminazione del ſemiſegmento . . . . = 0, 0005958
e l' illuminazione totale . . . . = 0, 0011916
(*B*).

Caso III.

Depreſſione del centro ſolare $= 3'$, cioè $a = 90^\circ.\, 3'$, onde $\varphi = 90^\circ - \text{arc. ſen.} \frac{3}{16} = 90^\circ - 10^\circ.\, 48' = 79^\circ.\, 12' = 4752'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{coſ.}\, a = - \frac{4752}{21600}$ ſen. $3'$, cioè

$$\begin{array}{lcl} \log.\ 4752 & = & 3,\ 6768764 \\ \log.\ \text{ſen.}\ 3' & = & 6,\ 9408473 \\ \hline & & 0,\ 6177237 \\ \log.\ 21600 & = & 4,\ 3344537 \\ \hline & & 6,\ 2832700\ \text{num.} = -0,\ 0001919 \end{array}$$

Il ſecondo termine coincide con quello del n°. XIII, cioè ſi trova . . . . . = 0, 0007217

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento . . . . = 0, 0005298
e l' illuminazione totale . . . . = 0, 0010596
(*C*).

Caso IV.

Depreſſione del centro ſolare $= 4'$, cioè $a = 90^\circ.\, 4'$; onde $\varphi = 90^\circ - \text{arc. ſen.} \frac{1}{4} = 90^\circ - 14^\circ.\, 29' = 75^\circ.\, 31' = 4531'$. Perciò $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{coſ.}\, a = - \frac{4531}{21600}$ ſen. $4'$, cioè

log. 4531 = 3, 6561941
log. ſen. 4′ = 7, 0657860
0, 7219801
log. 21600 = 4, 3344537
6, 3875264 num. = — 0, 0002441

Il ſecondo termine coincide con quello del n°. XII, cioè ſi trova . . . . . = 0, 0007114

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento . . . . = 0, 0004673
e l' illuminazione intera . . . . = 0, 0009346
(*D*).

CASO V.

Depreſſione del centro ſolare = 5′, cioè $a = 90°. 5'$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen. } \frac{5}{16} = 90° - 18°. 13' = 71°. 47' = 4307'$. Onde $\frac{\varphi'}{2\pi'}$, coſ. $a = -\frac{4307}{21600}$ ſen. 5′; perciò

log. 4307 = 3, 6341749
log. ſen. 5′ = 7, 1626960
0, 7968709
log. 21600 = 4, 3344537
6, 4624172 num. = — 0, 0002900

Il ſecondo termine coincide con quello del n°. XI; cioè ſi trova . . . . . = 0, 0006979

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0004079
e quindi ſarà l' illuminazione intera = 0, 0008158
(*E*).

CASO VI.

Depreſſione del centro ſolare $=6'$, cioè $a=90°.\ 6'$. Onde $\varphi=90° -$ arc. ſen. $\frac{3}{8}=90° - 22°.\ 1'=67°.\ 59'$ $=4079'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a=-\frac{4079}{21600}$ ſen. $6'$. Perciò

log. 4079 = 3, 6105537
log. ſen. $6'$ = 7, 2418771
0, 8524308
log. 21600 = 4, 3344537
6, 5179771 num. $= -$ 0, 0003296

Il ſecondo termine è lo ſteſſo che quello del n°. x, cioè ſi trova . . . . . . = 0, 0006811

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento ſarà . . . . = 0, 0003515
e quindi ſi ricava l' illuminazione intera . . . . = 0, 0007030
(F).

CASO VII.

Depreſſione del centro ſolare $=7'$, cioè $a=90°.\ 7'$; quindi $\varphi=90° -$ arc. ſen. $\frac{7}{16}=90° - 25°.\ 56'=64°.\ 4'$ $=3844'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a=-\frac{3844}{21600}$ ſen. $7'$. Dunque

log. 3844 = 3, 5847834
log. ſen. $7'$ = 7, 3088239
0, 8936073
log. 21600 = 4, 3344537
6, 5591536 num. $= -$ 0, 0003624

Il ſecondo termine coincide con quello
del n°. IX, cioè ſi trova . . . . . $=$, 0, 0006608

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . $=$ 0, 0002984
e però naſce l' illuminazione intera $=$ 0, 0005968
(G).

Caso VIII.

Depreſſione del centro ſolare $= 8'$, cioè $a = 90°.\ 8'$;

onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen.}\ \frac{1}{2} = 90° - 30° = 60° = 3600'$.

Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}\ \text{coſ.}\ a = -\frac{3600}{21600}\ \text{ſen.}\ 8'$. Sicchè

log. 3600 $=$ 3, 5563025
log. ſen. 8' $=$ 7, 3668157
0, 9231182
log. 21600 $=$ 4, 3344537
6, 5886645 num. $= -$ 0, 0003879

Il ſecondo termine coincide con quello
del n°. VIII prec., e però ſi trova $=$ 0, 0006363

Dunque ne verrà, che l' illuminazione
del ſemiſegmento ſarà . . . . $=$ 0, 0002484
onde l' illuminazione intera . . . . $=$ 0, 0004968
(H).

Caso IX.

Depreſſione del centro ſolare $= 9'$, cioè $a = 90°.\ 9'$;

onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen.}\ \frac{9}{16} = 90° - 34°.\ 30' = 55°.\ 30'$

$= 3330'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}\ \text{coſ.}\ a = -\frac{3330}{21600}\ \text{ſen.}\ 9'$, cioè

log. 3330 = 3, 5224442
log. ſen. 9′ = 7, 4179681
0, 9404123
log. 21600 = 4, 3344537
6, 6059586 num. = — 0, 0004036

Il ſecondo termine coincide con quello del n.° VII Parte prima, onde ſi trova . . = 0, 0006055

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0002019
e però l'illuminazione intera . . . . = 0, 0004038
(*I*)

CASO X.

Depreſſione del centro ſolare = 10′, cioè $a = 90°.\ 10′$, onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen.}\ \frac{5}{8} = 90° - 38°.\ 41′ = 51°.\ 19′ = 3079′$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = -\frac{3079}{21600}$ ſen. 10′; quindi

log. 3079 = 3, 4884097
log. ſen. 10′ = 7, 4637255
0, 9521352
log. 21600 = 4, 3344537
6, 6176815 num. = — 0, 0004146

Il ſecondo termine coincide con quello del n.° VI. della prima Parte, onde ſi trova = 0, 0005735

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0001589
e però l'illuminazione intera . . . = 0, 0003178
(*L*)

CASO XI.

Depreſſione del centro ſolare $= 11'$, cioè $a = 90°. 11'$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen.} \frac{11}{16} = 90° - 43°. 26' = 46°. 34' = 2794'$. Dunque $\frac{\Phi'}{2\pi'} \text{coſ.}\, a = -\frac{2794}{21600}$ ſen. $11'$; quindi

log. 2794 $= 3, 4462264$
log. ſen. $11' = 7, 5051181$
$0, 9513445$
log. 21600 $= 4, 3344537$
$6, 6168908$ num. $= -0, 0004139$

Il ſecondo termine coincide con quello del n.° v della Parte prima, ond'è . . . . $= 0, 0005335$

Sicchè l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . $= 0, 0001196$
e l'illuminazione intera . . . . $= 0, 0002392$
(M)

CASO XII.

Depreſſione del centro ſolare $= 12'$, cioè $a = 90°. 12'$, onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen.} \frac{3}{4} = 90° - 48°. 35' = 41°. 25' = 2485'$. Dunque $\frac{\Phi'}{2\pi'} \text{coſ.}\, \text{a} = -\frac{2485}{11600}$ ſen. $12'$, cioè

log. 2485 $= 3, 3953264$
log. ſen. $12' = 7, 5429065$
$0, 9382329$
log. 21600 $= 4, 3344537$
$6, 6037792$ num. $= -0, 0004016$

Il ſecondo termine coincide con quello del n.° IV. della prima Parte, cioè . . . $= 0,\ 0004860$

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . $= 0,\ 0000844$

Dunque l'illuminazione intera . . . . $= 0,\ 0001688$

(*N*)

Caso XIII.

Depreſſione del centro ſolare $= 13'$, cioè $a = 90°.\ 13'$; onde $\phi = 90° - \text{arc. ſen.} \frac{13}{16} = 90° - 54°.\ 21' = 35°.\ 39' = 2139'$. Sicchè $\frac{\phi'}{2\pi'} \text{coſ.}\ a = -\frac{2139}{21600} \text{ſen.}\ 13'$; cioè.

log. 2139 $= 3,\ 3302108$
log. ſen. 13' $= 7,\ 5776686$
$0,\ 9078794$
log. 21600 $= 4,\ 3344537$
$6,\ 5734275$ num. $= -0,\ 0003745$

Il ſecondo termine coincide con quello del n.° III. Parte prima, onde ſi trova $= 0,\ 0004282$

Sicchè l'illuminazione del ſemiſegmento $= 0,\ 0000537$
e però l'illuminazione intera . . . . $= 0,\ 0001074$

(*O*)

Caso XIV.

Depreſſione del centro ſolare $= 14'$, cioè $a = 90°.\ 14'$; onde $\phi = 90° - \text{arc. ſen.} \frac{7}{8} = 90° - 61°.\ 3' = 28°.\ 57' = 1737'$. Dunque $\frac{\phi'}{2\pi'} \text{coſ.}\ a = -\frac{1737}{21600} \text{ſen.}\ 14'$, cioè

log.

log. 1737 = 3, 2397998
log. ſen. 14′ = 7, 6098530
0, 8496528
log. 21600 = 4, 3344537
6, 5151991 num. = — 0, 0003275

Il ſecondo termine ſi ha dal n.° II. della prima Parte, cioè ſi trova . . . . = 0, 0003556

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0000281
e l'illuminazione intera . . . . = 0, 0000562
(*P*)

CASO XV.

Depreſſione del centro ſolare = 15′, cioè $a = 90°. 15'$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{15}{16} = 90° - 69°. 38' = 20°. 22' = 1222'$; onde $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = -\frac{1222}{21600}$ ſen. 15′, cioè

log. 1222 = 3, 0870712
log. ſen. 15′ = 7, 6398160
0, 7268872
log. 21600 = 4, 3344537
6, 3924335 num. = — 0, 0002468

Il termine ſecondo della formola ſi ha dal n.° I. della Parte prima, cioè ſi trova = 0, 0002557

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0000089
e l' illuminazione totale . . . . . . = 0, 0000178
(*Q*)

Per ritrovare l'illuminazione del ſemidiſco ſolare ſuperiore al diametro orizzontale quando il diſco tocca col lembo inferiore l'orizzonte, convien riflettere, che in tal caſo è $a = 89^\circ.\ 44'$, ed inoltre $\varphi = 90^\circ = \frac{2}{4}\pi$. Quindi il primo termine della formola, cioè $\frac{\varphi}{2\pi}$ coſ. a ſi cangia in $\frac{1}{4}$ coſ. $a = \frac{1}{4} \times 0,\ 0046542 = 0,\ 0011635$. Il ſecondo termine poi della formola è il ſeguente

$$\begin{array}{rl} \text{log. ſen. } a = & 9,\ 9999953 \\ - & 3,\ 1338689 \\ \hline & 6,\ 8661264 \quad \text{num.} = 0,\ 0007347 \end{array}$$

Dunque l' illuminazione del quadrante ſuperiore è $= 0,\ 0018982$, e l' illuminazione del ſemidiſco ſuperiore al diametro orizzontale è $= 0,\ 0037964$.

Se ora ſi ſottrae queſta illuminazione del ſemidiſco ſuperiore da quella dell' intero diſco, che è $0,\ 0046542$, il reſiduo dà l' illuminazione del ſemidiſco inferiore al diametro orizzontale, la quale in conſeguenza ſarà $= 0,\ 0008578$. Dunque (n.° XVI parte I.) ſta l' illuminazione del ſemidiſco inferiore (nel caſo che tocchi l'orizzonte) all' illuminazione del medeſimo roveſciato, cioè avente il diametro ſull' orizzonte come ſta 8578 a 14694. Ciò preſenta una ſpecie di paradoſſo, perchè quando il ſemidiſco ha il ſuo diametro ſull' orizzonte tramanda più obbliqui que' raggi, che ſono più copioſi, cioè quelli che emanano dalle ſue parti più baſſe e più larghe, e meno obliqui i raggi meno copioſi, ovvero emananti dalle ſue parti più alte e più anguſte; ed il contrario preciſamente ſuccede nel ſemidiſco inverſo avente il ſemidiametro orizzontale in alto; perlochè ſembrerebbe, che queſto e non quello doveſſe produrre una maggiore illuminazione; ed è anche aſſai ſtrano, che queſto eccеſſo ſia più di tre quarti dell' illuminazione minore.

Un paradoſſo così nuovo ed inaſpettato merita, che vi ci fermiamo un po' ſopra, ed eſaminiamo, ſe anche nelle maggiori altezze del ſole ſopra l'orizzonte ſi trovi eſſer vero, che il ſemidiſco diritto del ſole mandi più luce ſulla terra, che non ne manda il ſemidiſco inverſo, intendendo per ſemidiſco diritto il ſuperiore al diametro orizzontale in tale data altezza del centro ſolare, e per ſemidiſco inverſo l'inferiore al diametro orizzontale quando il centro del ſole ſi è già inoltrato ad un'altezza maggiore della precedente di ſedici minuti.

I.

Suppongo adunque in primo luogo, che l'altezza del centro ſolare = 89°. 44′, cioè $a = 16'$, e quindi per ottenere l'illuminazione del quadrante ſuperiore al diametro orizzontale prendo $\phi = 90°$. Laonde $\frac{\phi}{2\pi}$ coſ. a $= \frac{1}{4}$ ſen. 89°. 44′ $= \frac{1}{4} \times 0,9999892 = 0,2499973$.

Parimente

$$\begin{array}{lll} \text{log. ſen. } a & = & 7,6678445 \\ & - & \underline{3,1338689} \\ & & 4,5339756 \quad \text{num.} = 0,0000034 \end{array}$$

Dunque l'illuminazione del quadrante = 0,2500007, e però l'illuminazione del ſemidiſco *diritto* = 0,5000014. Alzatoſi il centro ſolare di altri 16′, cioè giunto al zenit, è evidente, che in tal ſituazione ogni ſemidiſco del ſole illumina l'orizzonte terreſtre egualmente, e conſeguentemente l'illuminazione del ſemidiſco *inverſo* è la metà di quella del diſco intero, cioè = 0,5000000, che è un poco minore della ritrovata pel ſemidiſco *diritto*. Suſſiſte adunque il paradoſſo di prima.

II.

Paſſo all' altezza del centro ſolare $= 45°$, cioè $a = 45°$, e piglio come prima $\phi = 90°$. Sicchè $\frac{\phi}{2\pi}$ coſ. $a = \frac{1}{4}$ ſen. $45° = \frac{1}{4} \times 0,7071068 = 0,1767767$. Inoltre

$$\begin{array}{rrl} \text{log. ſen. } a = & 9,8494850 & \\ - & 3,1338689 & \\ \hline & 6,7156161 & \text{num.} = 0,0005195 \end{array}$$

Onde l' illuminazione del quadrante ſuperiore $= 0,1772962$, e l' illuminazione del ſemidiſco *diritto* $= 0,3545924$.

Aſcenda ora il centro del ſole per altri $16'$, e trovisi in queſto ſtato l' illuminazione del ſemidiſco ſuperiore al diametro orizzontale, e queſta ſottraggaſi dall' illuminazione già nota di tutto il diſco; il reſiduo sarà l' illuminazione del ſemidiſco inferiore, che è appunto l' *inverſo* riſpettivamente al ſemidiſco dianzi conſiderato. Fatta pertanto l' altezza del centro ſolare $= 45°.\,16'$, cioè $a = 44°.\,44'$; $\phi = 90°$; ſi deduce $\frac{\phi}{2\pi}$ coſ. $a = \frac{1}{4}$ ſen. $45°.\,16' = \frac{1}{4} \times 0,7103901 = 0,1775975$. Inoltre

$$\begin{array}{rrl} \text{log. ſen. } a = & 9,8474542 & \\ - & 3,1338689 & \\ \hline & 6,7135853 & \text{num.} = 0,0005171 \end{array}$$

Dunque l' illuminazione del quadrante ſuperiore $= 0,1781146$, e l' illuminazione del ſemidiſco ſuperiore $= 0,3562292$. Ora queſta dee ſottrarſi da quella di tutto il diſco, la quale ſi trova immantinente con cercare il valore di coſ. a, a cui unicamente ſi riduce la noſtra formola generale con aſſumere $\phi = 2\pi$. Sicchè l'illuminazione di tutto il diſco ſi rinviene $= 0,7103901$, e fatta quindi l'indicata ſottrazione proviene 0, 3541609 per l'illuminazione del ſemidiſco inferiore, cioè dell'*inverſo* riſpetto a quel di prima nell'altra ſtazione del centro ſolare. E qui pure ſi ſcorge, che il ſemidiſco *diritto* illumina più che l'*inverſo*.

Reſta finalmente a vedere, ſe ciò pur ſi verifica riguardo ad un ſegmento del diſco ſolare compreſo fra il diametro ed una corda parallela, conſiderando un tal ſegmento in due ſituazioni, prima col diametro giacente ſull'orizzonte terreſtre, che chiameremo ſegmento *diritto*, poi colla corda ſull'orizzonte e col diametro in alto, che diremo ſegmento *inverſo*. Suppongo la corda parallela diſtante dal diametro per la metà del raggio, ed eſſendoſi già ritrovata l'illuminazione generata dal ſemidiſco viſibile quando l'orizzonte taglia per mezzo il diſco ſolare, ſottraggo da eſſa l'illuminazione prodotta da quel ſegmento di detto ſemidiſco, che ha per ſaetta la metà del raggio, e col reſiduo ottengo l'illuminazione eccitata dal ſegmento *diritto* propoſto. Ma per avere in tal ſuppoſto l'illuminazione nata dal ſegmento della ſaetta $= \frac{1}{2}$, divenendo $a = 90°$, $\varphi = 60°$, ed annullandoſi il primo termine della noſtra formola, ſi ritrova pel valore del ſecondo termine

$$\begin{array}{rl} \text{log. ſen. } \varphi = & 9,\ 9375306 \\ - & 3,\ 1338689 \\ \hline & 6,\ 8036617 \quad \text{num.} = 0,\ 0006363 \end{array}$$

il qual numero duplicato, cioè 0, 0012726 eſprime l'illuminazione proveniente dal detto ſegmento, e queſta ſottratta dall'illuminazione 0, 0014694 del ſemidiſco viſibile laſcia un reſiduo 0, 0001968, che rappreſenta l'illuminazione del ſegmento *diritto* di cui ſi tratta. Per ritrovar poi quella del ſegmento *inverſo* è manifeſto che baſta dall'illuminazione del ſegmento viſibile, quando il centro del ſole ha $8'$ di altezza ſopra l'orizzonte, ſottrarre l'illuminazione del ſemicerchio ſuperiore, e ſe quella, come è ſtato già dimoſtrato, è $= 0,0028240$, queſta ſi determina come ſegue: Diventa in queſt'ipoteſi $a = 89^\circ.52'$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{\varphi}{2\pi}$

$\text{coſ.}\, a = \frac{1}{4}\,\text{coſ.}\, a = \frac{1}{4}\,\text{ſen.}\, 8' = \frac{1}{4} \times 0,0023271 = 0,0005818$, che ſarà il valore del primo termine della noſtra formola. Pel valore del ſecondo ſi ha

$$\begin{array}{rl} \text{log. ſen.}\, a = & 9,9999973 \\ - & \underline{3,1338689} \\ & 6,8661284 \quad \text{num.} = 0,0007347. \end{array}$$

Dunque l'illuminazione del quadrante ſuperiore $= 0,0013165$, e del ſemicerchio $= 0,0026330$. Sottraendo queſt'ultima da $0,0028240$ reſta $0,0001910$ per l'illuminazione del ſegmento *inverſo*, la quale in conſeguenza è minore che non è quella del ſemidiſco *diritto*. Ed ecco, che l'indicato paradoſſo anche in queſto caſo s'incontra.

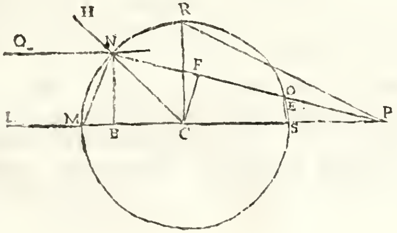
Chiuderò queſto breve Scritto con un famoſo Problema relativo alla miſura della luce propoſto da *Newton* nel ſuo Trattato delle *Fluſſioni e Serie Infinite* in queſti termini: *To determine ſuch a part of a Spherical Superficies, which can be illuminated, in its farther part, by light coming from a great diſtance, and which is refracted by the nearer Hemiſphere.* Siccome nè egli, nè altri ch' io ſappia ha data la ſoluzione d' un tal Problema, non eccettuando neppure il rinomato *Colſon*, che illuſtrò con un ampio comento quell' operetta di *Newton*, ho creduto eſſer pregio dell'opera d'intraprenderne la diſamina, e di metter qui ſotto gli occhi del Pubblico il ſeguente ſcioglimento.

PROBLEMA.

Determinare quella tal parte poſteriore d' una ſuperficie sferica, che può eſſere illuminata dalla luce vegnente da gran lontananza e rotta nell' emisfero anteriore.

Soluzione.

Sia QN uno de' raggi ſcagliati da lungi contro il globo MNS, i quali per l' immenſa diſtanza, da cui partono, ſi conſiderano come tra sè paralleli. Tagliato il globo con un piano, che paſſa pel ſuo centro C e pel raggio QN, e nella ſezione circolare MNS condotto il diametro SM parallelo ai raggi di luce, ſi ſupponga, che il raggio QN rompendoſi in N pieghi nella direzione NP, ed incontri la circonferenza del cerchio in O, ed in P il diametro prolungato; ſicchè guidato il ſemidiametro CN prodotto in H ſia QNH, ovvero NCM l' angolo d' incidenza, e CNP l' angolo di rifrazione. Se ora ſi mena la perpendicolare NB ſul diametro SM, e le ſotteſe SO, MN; e ſi aſſume $= n$ il rapporto del ſeno dell' angolo d' incidenza al ſeno dell' angolo di refrazione; il ſemidiametro $= r$; la retta $CP = x$; è



facile accorgerſi, che SO è la corda della metà di quel ſegmento sferico, la di cui ſuperficie curva viene illuminata da tutti que' raggi, che cadendo ſull' emisfero anteriore occupano di qua e di là dal punto di mezzo M una larghezza doppia dell' arco MN. Siccome poi allorchè il raggio QN è eſtremamente vicino al diametro SM, la corda SO rieſce piccoliſſima, e queſta va poi creſcendo quando il raggio QN ſi fa più lontano da MS, e ciò ſino ad un certo limite, oltre il quale la detta corda decreſce ſeguitando a creſcere la diſtanza del raggio; quindi appariſce, che la queſtione ſi riduce a ritrovare il *maſſimo* ſegmento della ſuperficie poſteriore, il quale in tali circoſtanze poſſa ricevere la luce rotta nell' emisfero anteriore. Oſſervo pertanto, che nel triangolo CNP il lato NP ſta a CP come il ſeno dell' angolo NCP, ovvero anche del ſuo ſupplemento NCM al ſeno dell' angolo CNP, cioè come $n:1$; e però $PN = nx$. Per la proprietà del triangolo ſi ha pure $CN^2 = CP^2 + PN^2 - 2PC.PB$, ovvero $r^2 = x^2 + n^2x^2 - 2x.PB$; e quindi $PB = \frac{x^2 + n^2x^2 - r^2}{2x}$, $MB = PM - PB = r + x + \frac{r^2 - n^2x^2 - x^2}{2x}$

$= \frac{r^2 + 2rx + x^2 - n^2x^2}{2x}$. E poichè per la proprietà del cerchio $MN^2 = SM.MB$, ſurrogato il valore or ritrovato ne deriva $MN^2 = \frac{r^3 + 2r^2x + rx^2 - n^2rx^2}{x}$. Eſſendo inoltre ſimili i due triangoli PSO, PNM a motivo del comune angolo P, e degli eguali angoli POS, PMN miſurati dalla metà dell' arco SON, ſi ha l' analogia $PN^2 : NM^2 :: PS^2 : SO^2$, vale a dire

$n^2x^2 : \frac{r^3 + 2r^2x + rx^2 - n^2rx^2}{x} :: (x - r)^2 : SO^2$. Dunque

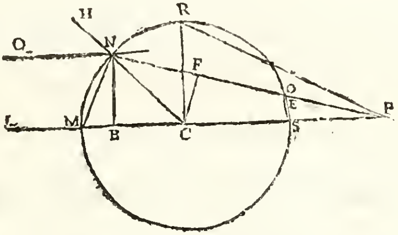
$SO^2 =$

$SO^2 = \frac{(x-r)^2}{n^2x^3}\left(r^3+2r^2x+rx^2-n^2rx^2\right)$. Ora dovendo eſſere maſſimo il ſegmento della ſuperficie illuminata, e conſeguentemente maſſima la corda SO del ſemiſegmento, come pure il quadrato di eſſa corda, ſi uguaglierà a zero il differenziale di queſto quadrato, e ſi otterrà $\left(\frac{2(x-r)x-3(x-r)^2}{n^2x^4}\right)\left(r^3+2r^2x+rx^2-n^2rx^2\right)dx$ $+\frac{(x-r)^2}{n^2x^3}\left(2r^2+2rx-2n^2rx\right)dx = 0$, la qual eſpreſſione diviſa per $\frac{(x-r)rdx}{n^2x^3}$ ſi cangia in

$$\left(\frac{3r-x}{x}\right)\left(r^2+2rx+x^2-n^2x^2\right)+(x-r)\left(2r+2x-2n^2x\right)$$

$=0$, e queſta ſi riduce all' equazione cubica x^3+rx^2 $-\frac{3r^2}{n^2-1}x-\frac{3r^3}{n^2-1}=0$. Baſtano pochi momenti di rifleſſione per accorgerſi, che tal equazione ſi riſolve nelle due $x+r=0$

$$x^2-\frac{3r^2}{n^2-1}=0;$$



dalle quali ſi ricavano le tre ſeguenti radici

$$1^\circ.\ x = -r$$

$$2^\circ.\ x = -r\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$$

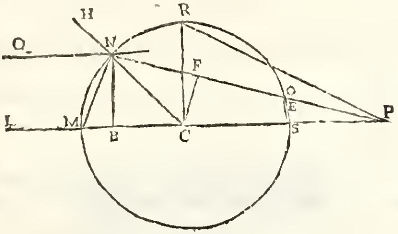
$$3^\circ.\ x = \ \ r\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$$

Le due prime radici non appartengono alla queſtione attuale, atteſo che la retta CP nelle preſenti circoſtanze non può eſſere che poſitiva: e però queſta retta viene appunto eſpreſſa dalla terza radice poſitiva $x = r\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$. Surrogato poi queſto valore in quello di SO dianzi trovato, ſi giugne a conoſcere la corda del ſemiſegmento illuminato, e quindi l' ampiezza o l' arco di tutto il ſegmento. Il che era ecc.

Se il globo rifrangente ſarà di vetro, ſicchè il *rapporto della refrazione*, ovvero n ſia preſſo a poco $= \frac{3}{2}$, naſcerà $x = r\sqrt{\frac{12}{5}} = 1,5492r$; $x^2 = 2,4r^2$; $n^2x^2 = 5,4r^2$; $(x-r)^2 = 0,30162064r^2$; $x^3 = 3,7181$; $n^2x^3 = 8,3657$. Laonde ſoſtituendo queſti valori nell'eſpreſſione di $SO^2 = \frac{(x-r)^2}{n^2x^3}(r^3 + 2r^2x + rx^2 - n^2rx^2)$ ſi ritrae $SO^2 = 0,039602185 1r^2$, ed eſtraendo la radice quadrata naſce finalmente $SO = 0,199r$. Dunque l' arco $SEO = 11^\circ.\ 26'$, e conſeguentemente l' ampiezza della cupola sferica illuminata dalla luce refratta nell' emiſfero anteriore ha per miſura un arco di $22^\circ.\ 52'$.

Non voglio qui tacere una ſingolarità, che nella ſoluzione di queſto Problema può facilmente incontrarſi, e che può eſſere cagione d' inciampo, come lo fu per me in ſulle prime. Tiriſi il perpendicolo CF ſopra il raggio refratto NP; ed eſſendo $CN^2 = CP^2 + PN^2 -$

$2NP.PF$, cioè $r^2 = x^2 + n^2x^2 - 2nx.PF$, ſe ne deduce $PF = \frac{x^2+n^2x^2-r^2}{2nx}$; e perciò $CF^2 = CP^2 - PF^2 = x^2 - \left(\frac{x^2+n^2x^2-r^2}{2nx}\right)^2$
$$= \frac{2r^2x^2+2n^2r^2x^2+2n^2x^4-x^4-n^4x^4-r^4}{4n^2x^2}.$$
E poichè NB, e CF ſono i ſeni degli angoli d'incidenza e di refrazione riferiti al ſeno tutto CN, naſce quindi $NB^2 = n^2.CF^2$
$$= \frac{2r^2x^2+2n^2r^2x^2+2n^2x^4-x^4-n^4x^4-r^4}{4x^2};$$
e però CB^2
$$= r^2 - NB^2 = \frac{x^4+n^4x^4+r^4+2r^2x^2-2n^2r^2x^2-2n^2x^4}{4x^2}.$$



Prendo la radice quadrata di queſta quantità, e ritrovo $CB = \frac{\pm n^2x^2 \mp x^2 \mp r^2}{2x}$, nella qual eſpreſſione ſi dee far uſo o dei ſoli ſegni ſuperiori in tutti i termini, o dei ſoli inferiori. Eſſendo poi $BM = r - CB$
$$= \frac{2rx \mp n^2x^2 \pm x^2 \pm r^2}{2x},$$
ed $MN^2 = SM.MB$, fatte le ſoſtituzioni de' valori di SM, ed MB, ſi otterrà MN^2

$= \frac{2r^2x \mp n^2rx^2 \pm rx^2 \pm r^3}{x}$. Ma i triangoli ſimili PSO, PMN ſomminiſtrano l' analogia $PN : NM :: PS : SO$, cioè $nx : \sqrt{\left(\frac{2r^2x \mp n^2rx^2 \pm rx^2 \pm r^3}{x}\right)} :: x - r : SO$; e conſeguentemente $SO^2 = \left(\frac{x-r}{nx}\right)^2 \left(\frac{2r^2x \mp n^2rx^2 \pm rx^2 \pm r^3}{x}\right)$: dunque differenziando queſta eſpreſſione, annullando il differenziale, e poſcia dividendo per $\frac{(x-r)rdx}{n^2x^2}$ naſcerà il riſultato $\frac{2}{x}\left(2r \mp n^2rx \pm rx \pm \frac{r^3}{x}\right) + (x-r)\left(\pm 1 \mp n^2 \mp \frac{r^2}{x^2}\right) = 0$, da cui proviene l' equazione cubica di queſta forma $x^3 + rx^2 - \frac{(4 \mp 1)r^2}{\pm n^2 \mp 1}x \mp \frac{3r^3}{\pm n^2 \mp 1} = 0$.

Se ora ne' termini di queſta affetti dal ſegno doppio ſi adopera il ſegno ſuperiore, compariſce l' equazione precedentemente ritrovata $x^3 + rx^2 - \frac{3r^2x}{n^2-1} - \frac{3r^3}{n^2-1} = 0$; ma ſe all' oppoſto ſi vuole aver riguardo al ſegno inferiore l' equazione ſi cangia in queſt' altra $x^3 + rx^2 + \frac{5r^2x}{n^2-1} - \frac{3r^3}{n^2-1} = 0$, la quale riſoluta dà tutt' altre radici che la precedente.

Queſta ſingolarità imbarazzante parmi che ammetta la ſeguente interpretazione. Si meni al diametro MS il ſemidiametro CR perpendicolare, e ſi congiunga RP; ſicchè $RP^2 = r^2 + x^2$. Se pertanto nel valore biforme di $CB = \frac{\pm n^2x^2 \mp x^2 \mp r^2}{2x}$ ſi fa uſo del ſegno inferiore, riſulta CB di valor negativo, poichè NP^2 oſſia n^2x^2 è manifeſtamente maggiore di PR^2, ovvero di $r^2 + x^2$.

Siccome poi per conſeguire il valore di *BM* ſi è ſottratto dal ſemidiametro *CM* il valore di *CB*; dovrà *BM* riſultar maggiore del ſemidiametro qualora *CB* ſia negativo. Ma nelle circoſtanze del preſente Problema è viſibilmente aſſurdo, che *MB* ſuperi il ſemidiametro della sfera rifrangente. Dunque non dee recar maraviglia, che da un tal aſſurdo ſia derivata un' equazione, le di cui radici non poſſono ſomminiſtrare che un' erronea ſoluzione del Problema.

SOPRA LA DISCESA

DE' GRAVI

Per la conveſſità de' Canali curvilinei.

Del P. GREGORIO FONTANA Delle Scuole Pie Profeſſore di Matematica ſublime nell' Univerſità di Pavia.

LA conſiderazione degli accidenti del moto ne' gravi diſcendenti per la concavità delle curve, o de' canali curvilinei ſituati in piani verticali ha arricchito la Scienza generale del moto di molto belle ed inaſpettate verità, che ora formano nelle opere de' moderni Geometri una parte non ultima della Dinamica. Ma la diſceſa de' gravi non per la concavità, ma per la conveſſità delle curve, o de' canali curvilinei giacenti in piani verticali non ſembra fino ad ora eſſere ſtata l'oggetto delle ſpeculazioni de' Geometri, e indarno ſi cercherebbe di ciò alcun cenno ne' Trattati di Meccanica anche più eſteſi. Comunque però voglia interpretarſi un tal ſilenzio degli Scrittori, queſto genere di moto ha alcune proprietà che lo diſtinguono, e che pajono meritare l'eſame e lo ſtudio de' coltivatori della Dinamica. La principale di queſte proprietà conſiſte nel diſtaccarſi che ordinariamente fa un corpo dalla conveſſità della curva o del canale dopo aver traſcorſo un certo ſpazio, il quale trovaſi più o meno grande ſecondo la diverſità della curva per cui il grave diſcende, e del punto da cui comincia la diſceſa. Frutto di picciolo ſtudio intorno a sì curioſo argomento ſono i ſeguenti Teoremi, de' quali ommetto per ora la dimoſtrazione.

Ognuno intenderà, che qui ſi preſcinde dalle reſiſtenze del mezzo, e dallo sfregamento, e che ſi concepiſce la maſſa del grave ridotta e concentrata in un punto.

TEOREMA I.

Se in un cerchio verticalmente eretto per la ſua conveſſità ſcavata in forma di canale nella ſemicirconferenza ſuperiore al diametro orizzontale diſcende un grave partendo dalla quiete da qualunque punto del canale, queſto ſi diſtacca dal canale dopo aver deſcritto un arco, la di cui altezza (cioè la verticale compreſa tra le due orizzontali guidate per gli eſtremi dell'arco) è ſempre un terzo dell'altezza di detto arco continuato ſino al diametro orizzontale.

TEOREMA II.

Nella parabola conica ſituata coll'aſſe verticale, un grave diſcendente per la ſua conveſſità ſcanalata, e che incomincia a muoverſi da un punto qualunque del canale parabolico, ſeguita ſempre a muoverſi lungo il canale ſenza mai diſtaccarſene o abbandonarlo.

TEOREMA III.

Situata l'elliſſe conica coll'aſſe maggiore verticale, ed eſſendo quell'aſſe $= 2a$, il ſuo parametro $= 2p$, un grave, che partendo dal vertice diſcende per la ſua conveſſità ſcanalata, ſe ne diſtacca dopo aver traſcorſo un arco, la di cui altezza viene rappreſentata dalla radice della ſeguente equazione $x^3 - 3ax^2 - \frac{3a^2p}{a-p}x + \frac{pa^3}{a-p} = 0$. La ſteſſa equazione cubica ſi ritrova anche quando l'aſſe verticale dell'elliſſe è il minore, e il corpo parte dal vertice di queſt'aſſe, col ſolo divario, che in queſto caſo a indica il ſemiaſſe minore, p il ſemiparametro di queſt'aſſe, x l'aſciſſa del medeſimo.

Se poi il grave invece di cominciare il ſuo moto dal vertice dell'elliſſe ſi ſpicca da un punto più baſſo diſtante per l'intervallo b dalla orizzontale che paſſa pel vertice, convien riſolvere l'equazione $x^3 - 3ax^2 - \frac{3a^2px}{a-p} + \frac{pa^3+2a^3b}{a-p} = 0$ per ottenere il valore dell'aſciſſa corriſpondente a quel punto dell'elliſſe, che è il punto del diſtacco.

TEOREMA IV.

Per l'iperbola conica tenuta col ſuo aſſe traverſo verticale, con un procedere affatto ſimile a quello del Teorema precedente, s'incontra l'equazione cubica $x^3 + 3ax^2 + \frac{3a^2px}{a+p} + \frac{pa^3}{a+p} = 0$, la di cui radice x ſarà l'aſciſſa dell'arco iperbolico, deſcritto il quale il corpo, che incomincia a diſcendere dal vertice, ſi diſtacca dalla conveſſità del canale. Ma qui un tal diſtacco non può mai aver luogo, come pure avviene nella parabola, avvegnachè eſſendo poſitivi tutti i termini della predetta equazione, il valor reale di x non può eſſere che negativo; il che nell'ipoteſi, in cui ſiamo, è un aſſurdo. Dunque il grave che diſcende per la conveſſità d'un canale iperbolico reſta ſempre unito al canale anche protratto in infinito ſenza ſtaccarſene mai. Lo ſteſſo accade anche quando il corpo comincia a diſcendere da un punto più baſſo del vertice.

TEOREMA

TEOREMA V.

Se la figura del canale è quella d' una parabola di genere ſuperiore rappreſentata dall' equazione $y^m = x$, eſſendo m un numero intero > 2, il grave che ſi ſpicca dal vertice, e ſi rotola giù pel conveſſo del perimetro parabolico, ſi diſtacca allor quando ha ſcorſo un arco, che ha per altezza o aſciſſa la linea $\left(\frac{1}{m(m-2)}\right)^{\frac{m}{2m-2}}$, la quale altezza nella parabola di terzo grado è $= \frac{1}{\sqrt[4]{(27)}}$, in quella di quarto grado è $= \frac{1}{4}$, ed in quella di quinto è $= \frac{1}{\sqrt[8]{759375}}$, e così diſcorrendo.

Che ſe il grave in vece di ſpiccarſi dalla ſommità del canale partirà da un punto più baſſo, ſicchè la diſtanza di queſto punto dalla retta orizzontale che paſſa per la ſommità ſia $= a$, allora per determinare il punto del diſtacco converrà riſolvere queſt' equazione $x^{\frac{2m-2}{m}} - \frac{2(m-1)a}{m-2}x^{\frac{m-2}{m}} - \frac{1}{m(m-2)} = 0$, la di cui radice rappreſenta l' altezza dell' arco parabolico, dal quale ſottratto l' arco dell' altezza a reſta quello che il grave traſcorre ſenza ſtaccarſene.

TEOREMA VI.

Se la figura del canale è una delle parabole eſpreſſe dall' equazione $y^m = x^n$ ancora più generale della precedente, e ſuppoſto che il corpo incominci a rotolare dalla ſommità dell' aſſe verticale giù per la conveſſità ſi trova $\left(\frac{n^2}{m(m-2n)}\right)^{\frac{m}{2m-2n}}$ per l' altezza di quell' arco, finito il quale il corpo, che lo ha percorſo diſcendendo, ſi diſtacca dal canale.

Qualora poi il grave incominci il ſuo moto da un punto più baſſo del vertice, e ſia a la depreſſione verticale di queſto luogo, ſi ritrova il punto del diſtacco mediante la riſoluzione dell' equazione $x^{\frac{2m-2n}{m}} - \frac{2(m-n)a}{m-2n}x^{\frac{m-2n}{m}} - \frac{n^2}{m(m-2n)} = 0$, dalla di cui radice ſottraendo la quantità a ſi ottiene l' altezza dell' arco, al termine del quale giunto che ſia il corpo, queſto abbandona il canale.

TEOREMA VII.

In tutte le elliſſi, ed iperbole ſuperiori rappreſentate dall' equazione generaliſſima $y^{m+n} = f(a\mp x)^n x^m$, ove a eſprime l' aſſe traverſo, f una grandezza coſtante dipendente dalla proprietà di queſte curve, il corpo che parte dalla ſommità dell' aſſe verticale, e diſcende per la conveſſità della curva, non ſe ne diſtacca ſe non dopo aver paſſato un arco, il quale ha per altezza la radice dell' equazione $2mn(m+n)a^2x^{\frac{2n}{m+n}}(a\mp x)^{\frac{m-n}{m+n}}$, $= \left(ma\mp(m+n)x\right)\left((m+n)^2x^{\frac{2n}{m+n}}(a\mp x)^{\frac{2m}{m+n}} + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2\right)$, e proſegue poi liberamente il ſuo moto in una parabola conica ſecondo la nota legge dei projetti.

TEOREMA VIII.

Sia l'iperbola equilatera (*fig. IX*) FOM fra gli aſintoti ortogonali AC, AB, de' quali AC ſia verticale, AB orizzontale, e guidata per la ſommità O la verticale ON parallela all'aſintoto AC, ſi piglino in eſſa le aſciſſe $OH = x$, e ſi ponga il lato della potenza dell' iperbola OS ovvero $SA = 1$. Un grave, che ſi ſpicca dalla ſommità O, e diſcende per la conveſſità OEF dell' iperbola, non ſi diſtacca da eſſa ſe non dopo aver corſo per un arco, la di cui altezza viene rappreſentata dalla radice dell'equazione di quarto grado

$$x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 * - \frac{2}{3} = 0.$$

Che ſe il grave in vece di ſpiccarſi dal vertice incomincia a diſcendere da un punto più baſſo diſtante per l'intervallo a dalla orizzontale che paſſa pel vertice, ſi preſenta queſt'altra equazione biquadratica da riſolverſi $x^4 + \frac{8-4a}{3}x^3 + (2-4a)x^2 - 4ax - \left(\frac{2+4a}{3}\right) = 0$, la di cui radice dà l'altezza di quell'arco iperbolico, dal quale togliendoſi il primo arco di altezza a il reſiduo è appunto quello, al di cui termine giunto che ſia il corpo, ſi diſimpegna dalla curva, e proſegue il ſuo cammino con moto libero.

TEOREMA IX.

Nella parabola Apolloniana (*fig. X*) ANM deſcritta col parametro p, e ſituata in un piano verticale, ma coll'aſſe MO orizzontale, dal punto dato A, da cui il grave ſi laſcia cadere giù pel perimetro conveſſo ANM, condotta la verticale $AB = \lambda$, e preſe ſu queſta le aſciſſe $AF = x$, è meſtieri riſolvere l'equazione cubica

$x^3 - 3\lambda x^2 + \left(3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2\right)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0$ per determinare l'altezza *AF* di quel tal arco *AN*, al di cui eſtremo *N* giunto che ſia il grave partito da *A*, ſi libera dalla curva, ed abbandona il canale, che ſi ſuppone ſempre aperto eſteriormente.

Qualunque volta il grave parte da un punto più baſſo di *A*, e diſtante per l'intervallo *a* dalla retta orizzontale guidata per *A*, ritrova l'equazione

$$\begin{array}{l} x^3 - 3\lambda x^2 + \left(3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2\right)x - \lambda^3 \qquad = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{1}{4}\lambda p^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{1}{2}p^2 a \end{array}$$

e la radice di queſta dà l'altezza dell'arco, dal quale ſottratto l'arco di altezza *a* il reſiduo è appunto il ricercato, vale a dire quello, il di cui punto infimo è il punto del diſtacco.

Se nell'ipoteſi della gravità coſtante ſi vuole collocato il corpo nella conveſſità della parabola in punto infinitamente diſtante dal vertice *M*, per modo che la verticale λ condotta da quel punto all'aſſe orizzontale acquiſti un valore infinito, allora ſi fa manifeſto, che nell'equazione

$x^3 - 3\lambda x^2 + \left(3\lambda x^2 + \frac{3}{4}p^2\right)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0$ il valore della radice x non può eſſere che infinito, altrimenti verrebbe l'aſſurdo, che $-\lambda^3 = 0$, ovvero $\lambda = 0$, cioè l'infinito ſarebbe uguale a zero. Perlochè il corpo, che parte da un punto infinitamente lontano dalla ſommità della parabola verticalmente collocata, ma coll'aſſe orizzontale, e diſcende per la conveſſità, corre uno ſpazio infinito prima di ſtaccarſi dal canale, o piuttoſto non ſi diſtacca mai.

TEOREMA X.

Nella Cicloide ſituata coll' aſſe verticale il grave, che dalla ſua ſommità diſcende per la conveſſità ſcanalata, ſe ne diſtacca dopo eſſere arrivato al punto, che reſta ſotto il vertice un ſemidiametro del circolo generatore. E generalmente da qualunque punto incominci il corpo a diſcendere, eſſo abbandona il canale cicloidale dopo aver deſcritto un arco, la di cui altezza è la metà di quella dello ſteſſo arco continuato ſino alla baſe orizzontale della Cicloide.

TEOREMA XI.

Se vuolſi che il corpo partendo (*fig. XI*) dal vertice *A* diſcenda lungo la conveſſità ſcanalata della Ciſſoide *ACO* riferita all' aſſe *AM* parallelo all' aſintoto verticale *FN*, e ſi chiamano al ſolito x, y le coordinate ortogonali *AB*, *BC*, a il ſemidiametro *AP* del cerchio generatore; il punto del diſtacco del corpo ſi trova eſſer quello, a cui corriſponde $y = \frac{8}{9}a$, oſſia il corpo ſi diſtacca dal canale dopo aver paſſato un arco, che ha per ordinata otto noni del raggio del cerchio generatore.

E ſe il corpo parte da un punto inferiore al vertice *A*, e diſtante dalla orizontale *AF* d'una data quantità b, la radice dell' equazione cubica $y^3 - \frac{16a}{9}y^2 + \frac{64a^2+36b^2}{81}y - \frac{8ab^2}{9} = 0$ dà il valore dell' ordinata appartenente a quell' arco di ciſſoide, dal quale ſe ſi ſottrae l' arco compreſo fra il vertice ed il principio del moto ſi ha l'arco ricercato, al di cui termine giunto che ſia il grave, abbandona la curva.

TEOREMA XII.

Sia (*fig. XII*) OBS la logaritmica ſituata in un piano verticale, col ſuo aſintoto MN al di ſopra di eſſa ed orizzontale. Si ſupponga la ſottangente coſtante $= 1$, e la FB normale all' aſintoto ed eguale alla ſottangente ſi produca indefinitamente in P, e ſi prendano le ordinate ortogonali $BI = x$, $IS = y$. Ciò ſtante, un corpo, che incomincia a diſcendere dal punto B (che chiameremo vertice) lungo la conveſſità BS della logaritmica, ſi allontana dalla curva dopo aver percorſo un arco, la di cui altezza o aſciſſa $x = \sqrt{2}$, cioè uguaglia la diagonale del quadrato deſcritto ſopra la ſottangente.

Qualora poi il mobile parta da un punto inferiore al vertice B, e la diſtanza di tal punto dalla retta orizzontale guidata per B ſia $= a$, il mobile ſi diſtacca dalla curva dopo eſſer caduto da un arco, che ha per altezza $x - a = \sqrt{\left(1 + (a+1)^2\right)}$, cioè l' ipotenuſa d'un triangolo rettangolo, un cateto del quale è la ſottangente della logaritmica, l' altro cateto è la ſomma di queſta ſottangente e della diſtanza del principio del detto arco dalla orizzontale guidata pel vertice.

# SOPRA I LOGARITMI
DELLE QUANTITA' NEGATIVE;
E SOPRA GL' IMMAGINARJ.

Del P. GREGORIO FONTANA Delle Scuole Pie Profeſſore di Matematica ſublime nell' Univerſità di Pavia.

LA gran controverſia intorno alla qualità del valore de' logaritmi delle quantità negative, che tiene tuttora diviſi i più inſigni Geometri del ſecolo, è ſtata dall' immortale Sig. *Euler* preſſochè fiſſata e deciſa mercè il famoſo Teorema da eſſo dimoſtrato, che *il logaritmo di qualunque quantità negativa ha un' infinità di valori, de' quali uno ſolo è reale, e tutti gli altri immaginarj; ed il logaritmo di qualſivoglia quantità negativa ha un numero infinito di valori ma ſolamente immaginarj*. Siccome però un tal Teorema, veramente originale, e degno della penetrazione di quel ſommo Geometra, viene da lui dimoſtrato nella ſua profonda Diſſertazione ſopra l' indicata controverſia con un metodo aſſai lungo e proliſſo, il quale inoltre procedendo per eſponenti infiniti ed infiniteſimi laſcia perciò nello ſpirito del leggitore non ſo qual nebbia e dubbietà, che dà luogo a mille ſcrupoli ed equivoci non così facili a dileguarſi, e rimane anco eſpoſto alle eccezioni e agli attacchi del Sig. *D' Alembert;* quindi è, che non ſi giudicherà per avventura coſa affatto inutile ed intempeſtiva il proporre qui con un metodo il più ſemplice e rigoroſo, che mai poſſa deſiderarſi, tre differenti breviſſime dimoſtrazioni del ſuddetto Teorema, e dedurne poſcia come tanti Corollarj tutte le principali proprietà delle formole immaginarie ed eſponenziali. Sia dunque

TEOREMA.

Il logaritmo di qualunque quantità poſitiva ha un' infinità di valori, de' quali uno ſolo è reale, e tutti gli altri immaginarj; ed il logaritmo di qualſivoglia quantità negativa ha un numero infinito di valori ma ſolamente immaginarj.

DIMOSTRAZIONE I.

I. Deſcritto un cerchio col ſemidiametro $= 1$, dicaſi ϕ l'arco, a cui corriſponde l'aſciſſa o il ſenoverſo $= x$; e ſi avrà, come è noto, $d\phi = \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 2x)}}$, cioè $d\phi\sqrt{-1} = \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 2x)}}$

$$= \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 2x)}}\left(\frac{x - 1 + \sqrt{(x^2 - 2x)}}{x - 1 + \sqrt{(x^2 - 2x)}}\right) = \frac{\frac{xdx - dx}{\sqrt{(x^2 - 2x)}} + dx}{x - 1 + \sqrt{(x^2 - 2x)}}.$$

Oſſervo, che il numeratore di queſta frazione è il differenziale del denominatore; e però paſſando agl' integrali naſce $\phi\sqrt{-1} = \log.\left(x - 1 + \sqrt{(x^2 - 2x)}\right) + \text{coſt.}$ E perchè ſvaniſcono inſieme ϕ ed x, riſulta $\text{coſt.} = -\log. -1$. Dunque $\phi\sqrt{-1} = \log.\left(1 - x - \sqrt{(x^2 - 2x)}\right)$. Piglio ora il ſeno verſo x uguale a tutto il diametro 2, e nominando π la ſemicirconferenza del cerchio, oſſervo, che al ſeno verſo $= 2$ corriſpondono tutti gli archi ſeguenti $\pm\pi$; $\pm 3\pi$; $\pm 5\pi$; $\pm 7\pi$; ecc. in infinito, rappreſentati generalmente da $\pm(2n - 1)\pi$, dove n è un numero intero qualunque dal zero ſino all' infinito. In queſta ipoteſi adunque ſi ha $\pm(2n - 1)\pi\sqrt{-1} = \log. -1$. E però poſta A una qualſivoglia grandezza, il di cui

logaritmo

logaritmo naturale ſia $=a$, ſiccome ſi ha log. $-A=$ log. $A+$ log. -1, ſarà quindi log. $-A=a\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$; che è una parte del Teorema.

II. Per dimoſtrare l' altra parte, ſi ponga mente, che qualora ſi prende il ſeno verſo $x=0$, l' arco ϕ acquiſta un' infinità di valori, cioè $0;\pm2\pi;\pm4\pi;\pm6\pi$; ecc. in infinito, eſpreſſi generalmente da $\pm2n\pi$, dove n rappreſenta qualunque numero intero dal zero ſino all' infinito. In queſto ſuppoſto adunque ſi otterrà $\pm2n\pi\sqrt{-1}=$ log. 1. Eſſendo poi log. $A=$ log. $A+$ log. $1=a+$ log. 1, ſarà in conſeguenza log. $A=a\pm2n\pi\sqrt{-1}$. Dal che ſi ſcorge, che degl' infiniti valori $a\pm2n\pi\sqrt{-1}$ uno ſolo è reale, cioè quello che corriſponde ad $n=0$, e tutti gli altri infiniti ſono immaginarj; che era l' altra parte del Teorema.

DIMOSTRAZIONE II.

I. Prendaſi x pel coſeno dell' arco ϕ, e ſi avrà dalla nota proprietà del cerchio $d\phi=-\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$

$$=-\frac{dx}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}};\text{ onde } d\phi\sqrt{-1}=-\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}}$$

$$=-\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}}\left(\frac{x+\sqrt{(x^2-1)}}{x+\sqrt{(x^2-1)}}\right)=\frac{\dfrac{xdx-dx}{\sqrt{(x^2-1)}}}{x+\sqrt{(x^2-1)}}.$$

Laonde pigliando gl' integrali ſarà $\phi\sqrt{-1}=-$ log. $\left(x+\sqrt{(x^2-1)}\right)$ ſenza aggiunta di coſtante, perchè ſi annullano i due membri dell' ugualtà quando $x=1$. Sicchè proviene $\phi\sqrt{-1}=-$ log. $\left(x+\sqrt{(x^2-1)}\right)=$ log. $\frac{1}{x+\sqrt{(x^2-1)}}=$ log. $\left(x-\sqrt{(x^2-1)}\right)$. Se pertanto ſi aſſume il coſeno $x=-1$, acquiſta l' arco corriſpondente ϕ tutti i ſeguenti infiniti valori $\pm\pi;\pm3\pi;\pm5\pi$; ecc.

in infinito eſpreſſi da $\pm(2n-1)\pi$. Ma nell' ipoteſi di $x=-1$ diventa log. $\left(x-\sqrt{(x^2-1)}\right)=$ log. -1. Dunque log. $-1=\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$. E però log. $-A=$ log. $A+$ log. $-1=a+$ log. $-1=a\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$; che è un valore infinitiforme, ma ſempre immaginario.

II. Qualora poi pigliaſi il coſeno $x=1$, è noto, che a tal coſeno corriſpondono gli archi $0;\pm2\pi;\pm4\pi;\pm6\pi$; ecc. in infinito, che vengono rappreſentati dall' eſpreſſione $\pm2n\pi$, nella quale n ſignifica qualunque numero dal zero fino all' infinito. Ma in queſto aſſunto di $x=1$, trovaſi log. $\left(x-\sqrt{(x^2-1)}\right)=$ log. 1. Dunque $\pm2n\pi\sqrt{-1}=$ log. 1. Quindi log. $A=$ log. $A+$ log. $1=a\pm2n\pi\sqrt{-1}$, valore infinitiforme, ed unicamente reale nel ſolo caſo di $n=0$, ed in tutti gli altri caſi immaginario.

DIMOSTRAZIONE III.

Chiamo φ l' arco di cerchio deſcritto col raggio 1, t la tangente, s il ſeno, c il coſeno. Avremo pertanto $d\varphi=\dfrac{dt}{1+t^2}=\dfrac{dt}{(1+t\sqrt{-1})(1-t\sqrt{-1})}=\dfrac{\frac{1}{2}dt}{1+t\sqrt{-1}}+\dfrac{\frac{1}{2}dt}{1-t\sqrt{-1}}$; ed integrando $\varphi=\dfrac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\dfrac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}}$ ſenza coſtante, perchè poſto $t=0$, ſi annullano inſieme i due membri dell' ugualtà. Poſto in luogo di t il ſuo valore $\dfrac{s}{c}$, ſi ha $\varphi=\dfrac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\dfrac{c+s\sqrt{-1}}{c-s\sqrt{-1}}$, e moltiplicando il numero di queſto logaritmo ſotto e ſopra per $c+s\sqrt{-1}$ naſce $\varphi=\dfrac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\left(c+s\sqrt{-1}\right)^2$ $=\dfrac{1}{\sqrt{-1}}\log.\left(c+s\sqrt{-1}\right)$. Dunque finalmente $\varphi\sqrt{-1}$ $=\log.(c+s\sqrt{-1})$. Prendo ora $c=1$, $s=0$, e chiamo

π la ſemicirconferenza del cerchio: è principio notiſſimo della Trigonometria, che al coſeno 1, e ſeno *zero* corriſpondono tutti gli archi ſeguenti $0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi$; ecc. in infinito, ovvero $0; \pm 2n\pi$, denotando n tutti i numeri naturali poſitivi. Dunque in queſt' ipoteſi la noſtra formola diventerà $\log. 1 = 0$, e $\log. 1 = \pm 2n\pi\sqrt{-1}$. Dunque eſſendo A qualunque grandezza poſitiva, e il ſuo logaritmo $= a$, ſi avrà $\log. A = \log. 1A = \log. A + \log. 1 = a + 0$

$$a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$$

cioè il logaritmo di A avrà infiniti valori, uno ſolo reale a, e tutti gli altri immaginarj $a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$, che è il primo punto. Paſſo al ſecondo, e fiſſo $c = -1$, $s = 0$, e rifletto, che al coſeno -1 e al ſeno *zero* corriſpondono infiniti archi, che ſono i ſeguenti $\pm\pi; \pm 3\pi; \pm 5\pi; \pm 7\pi$; ecc., ovvero $\pm(2n-1)\pi$. In queſta nuova ipoteſi di $c = -1$, $s = 0$, la noſtra formola adunque ſi trasforma in queſt' altra $\log. -1 = \pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$. Quindi eſſendo $\log. -A = \log. -1A = \log. A + \log. -1 = a \pm (2n-1)\pi\sqrt{-1}$, ſi vede tantoſto, che il logaritmo della quantità negativa $-A$ ha un' infinità di valori tutti immaginarj rappreſentati dalla forma $a \pm (2n-1)\pi\sqrt{-1}$; che era il ſecondo punto. Dunque I. $\log. A = a$

$$a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$$

$$\text{II. } \log. -A = a \pm (2n-1)\pi\sqrt{-1}.$$

Per ritrovare poi con queſto ſteſſo metodo i logaritmi di qualſivoglia grandezza immaginaria baſta por mente alla forma $a + b\sqrt{-1}$, alla quale il Sig. *D' Alembert* ha dimoſtrato il primo ridurſi tutte le quantità immaginarie più complicate, denotando a e b grandezze reali. Si ha dunque a determinare il valore di $\log. (a + b\sqrt{-1})$: Si deſcriva un cerchio col raggio $= 1$, e ſi prenda in eſſo l'arco θ, la di cui tangente ſia $\frac{b}{a}$, e però la ſecante $=\sqrt{(1+\frac{b^2}{a^2})}=\frac{1}{a}\sqrt{(a^2+b^2)}$, il ſeno $=\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, il coſeno $=\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Dunque ſen. $\theta=\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $b=\sqrt{(a^2+b^2)}\,\text{ſen.}\,\theta$; e così coſ. $\theta=\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $\sqrt{(a^2+b^2)}\,\text{coſ.}\theta=a$. Dunque log. $(a+b\sqrt{-1})$ $=\log.\,(\text{coſ.}\,\theta+\text{ſen.}\,\theta\sqrt{-1})\,(\sqrt{(a^2+b^2)})=\frac{1}{2}\log.\,(a^2+b^2)$ $+\log.\,(\text{coſ.}\,\theta+\text{ſen.}\,\theta\sqrt{-1})$. Ma ſi è precedentemente fatto vedere log. $(\text{coſ.}\,\theta+\text{ſen.}\,\theta\sqrt{-1})=\theta\sqrt{-1}$. Dunque finalmente ſi avrà log. $(a+b\sqrt{-1})=\frac{1}{2}\log.\,(a^2+b^2)$ $+\theta\sqrt{-1}$, eſſendo θ l' arco di cerchio deſcritto col raggio 1, e dotato della tangente $\frac{b}{a}$. Qui pure oſſervo, che eſſendo infiniti gli archi dotati della tangente $\frac{b}{a}$, cioè θ; $\theta\pm\pi$; $\theta\pm2\pi$; $\theta\pm3\pi$; $\theta\pm4\pi$; $\theta\pm5\pi$; ecc. oſſia in generale $\theta\pm n\pi$, ne viene in conſeguenza, che infiniti ſono i valori di log. $(a+b\sqrt{-1})$ tutti rappreſentati dall' eſpreſſione infinitiforme $\frac{1}{2}\log.\,(a^2+b^2)+(\theta\pm n\pi)\sqrt{-1}$. Con eguale facilità e ſpeditezza io dimoſtro i famoſi Teoremi ſugl' immaginarj eſprimenti le funzioni degli archi circolari. In fatti

I. Preſo log. $e=1$, ed eſſendoſi già trovato log. $(\text{coſ.}\,\theta+\text{ſen.}\,\theta\sqrt{-1})=\theta\sqrt{-1}$, ne viene in conſeguenza coſ. $\theta+\text{ſen.}\,\theta\sqrt{-1}=e^{\theta\sqrt{-1}}$; e però pigliato l' arco negativo naſce coſ. $-\theta+\text{ſen.}-\theta\sqrt{-1}$, cioè

$\text{coſ.}\,\theta - \text{ſen.}\,\theta\sqrt{-1} = e^{-\theta\sqrt{-1}}$: onde aggiunta queſt' equazione alla prima ſi ottiene $\text{coſ.}\,\theta = \frac{e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2}$; che è il primo Teorema.

II. Delle predette due equazioni ſottraggo la ſeconda dalla prima, e divido il reſiduo per $2\sqrt{-1}$; e quindi ricavo $\text{ſen.}\,\theta = \frac{e^{\theta\sqrt{-1}} - e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; che è il ſecondo Teorema.

III. Nell' equazione $\text{coſ.}\,\theta \pm \text{ſen.}\,\theta\sqrt{-1} = e^{\pm\theta\sqrt{-1}}$ ſe in vece dell' arco θ ſi ſoſtituiſce l' arco $n\theta$, ſi raccoglie $\text{coſ.}\,n\theta \pm \text{ſen.}\,n\theta\sqrt{-1} = e^{\pm n\theta\sqrt{-1}}$. Ma $e^{\pm n\theta\sqrt{-1}}$ è la poteſtà n: eſima di $e^{\pm\theta\sqrt{-1}}$, ovvero di $\text{coſ.} \pm \text{ſen.}\,\theta\sqrt{-1}$: Dunque $(\text{coſ.}\,\theta \pm \text{ſen.}\,\theta\sqrt{-1})^n = \text{coſ.}\,n\theta \pm \text{ſen.}\,n\theta\sqrt{-1}$; che è il terzo Teorema.

IV. Eſſendo $\text{coſ.}\,n\theta + \text{ſen.}\,n\theta\sqrt{-1} = (\text{coſ.}\,\theta + \text{ſen.}\,\theta\sqrt{-1})^n$, e $\text{coſ.}\,n\theta - \text{ſen.}\,n\theta\sqrt{-1} = (\text{coſ.}\,\theta - \text{ſen.}\,\theta\sqrt{-1})^n$, ſommate queſte due equazioni ſi ritrova $\text{coſ.}\,n\theta$

$$= \frac{1}{2}(\text{coſ.}\,\theta + \text{ſen.}\,\theta\sqrt{-1})^n + \frac{1}{2}(\text{coſ.}\,\theta - \text{ſen.}\,\theta\sqrt{-1})^n,$$

che è il quarto Teorema.

V. Sottratta la ſeconda delle due medeſime equazioni dalla prima, e diviſo il reſiduo per $2\sqrt{-1}$ ſi ritrova $\text{ſen.}\,n\theta = \frac{(\text{coſ.}\,\theta + \text{ſen.}\,\theta\sqrt{-1}) - (\text{coſ.}\,\theta - \text{ſen.}\,\theta\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$;

che è il quinto Teorema.

Potrebbe ſorgere in mente a taluno una difficoltà ſul numero de' valori

$$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+\theta\sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm\pi)\sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm 2\pi)\sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm 3\pi)\sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm 4\pi)\sqrt{-1}$$

ecc. . . . . . .
ecc. . . . . . .
ecc. . . . . . .

che competono a $\log.(a+b\sqrt{-1})$, ne' quali valori gli archi $\theta;\theta\pm\pi;\theta\pm 2\pi;$ ecc. ſpettano tutti alla tangente $\frac{b}{a}$. Imperciocchè ſe in vece della tangente $\frac{b}{a}$ ſi vuole aver riguardo al ſeno $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, e al coſeno $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, non ſi ha che la metà del numero de' predetti archi, cioè $\theta;\theta\pm 2\pi;\theta\pm 4\pi;\theta\pm 6\pi;$ ecc. e conſeguentemente anche la metà del numero de' valori di $\log.(a+b\sqrt{-1})$; il che poco ſi accorda coll'eſattezza e rigore. Ma convien riflettere, che quel ſeno e coſeno hanno eſſenzialmente il doppio ſegno ± al radicale quadrato del denominatore, e gli archi corriſpondenti al ſeno $\frac{b}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$, e al coſeno $\frac{a}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$ ſono $\theta\pm\pi;\theta\pm 3\pi;\theta\pm 5\pi;$ ecc., che formano appunto l' altra metà de' valori di $\log.(a+b\sqrt{-1})$ trovati dapprima; e così tutto cammina d' accordo.

Con non minore prontezza e facilità io dimoſtro il famoſo Teorema Alemberziano $(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$ $=M+N\sqrt{-1}$, eſſendo M, N quantità reali, il quale ſuole comunemente dimoſtrarſi mercè la ſuppoſizione un po' ſtravagante di dover concepire varianti le quantità a, b, M, N, che non variano. Io dico così: Abbiamo $\log.(a+b\sqrt{-1})=\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+\theta\sqrt{-1}$: Dunque $\log.(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}=(g+h\sqrt{-1})$ $\log.(a+b\sqrt{-1})=\frac{1}{2}g\log.(a^2+b^2)-h\theta$ $+\left(\frac{1}{2}h\log.(a^2+b^2)+g\theta\right)\sqrt{-1}$. Dunque paſſando dai logaritmi ai numeri ſarà $(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$

$$=e^{\log.(a^2+b^2)^{\frac{g}{2}}-h\theta+\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right)\sqrt{-1}}$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{g}{2}}\times e^{-h\theta+(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta)\sqrt{-1}}.$$

Ma prendendo $\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta$ per un arco di cerchio deſcritto col raggio 1 ſi è dimoſtrato eſſere

$$e^{\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right)\sqrt{-1}}=\text{coſ.}\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right)$$
$$+\text{ſen.}\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right)\sqrt{-1}.$$

Dunque

$$(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}=(a^2+b^2)^{\frac{g}{2}}e^{-h\theta}\left\{\text{coſ.}\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right)+\text{ſen.}\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right)\sqrt{-1}\right\}.$$

E però poſta $M=(a^2+b^2)^{\frac{g}{2}} e^{-b\theta} \cos.\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{b}{2}}+g\theta\right)$, ed $N=(a^2+b^2)^{\frac{g}{2}} e^{-b\theta} \,\text{ſen.}\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{b}{2}}+g\theta\right)$, ſi ha $M+N\sqrt{-1}=(a+b\sqrt{-1})^{g+b\sqrt{-1}}$.

Se pertanto reca meraviglia, che una quantità immaginaria $\frac{1}{2}e^{\theta\sqrt{-1}}$ aggiunta ad un' altra immaginaria $\frac{1}{2}e^{-\theta\sqrt{-1}}$ coſtituiſca, come ſi è veduto, un valore affatto reale, è però incomparabilmente più mirabile, che anche ſenza queſta aggiunta una quantità qualunque reale a elevata ad un eſponente immaginario $b\sqrt{-1}$ perſiſta in infiniti caſi ad eſſer reale. Paragonata in fatti l'eſpreſſione $a^{b\sqrt{-1}}$ colla precedente più generale $(a+b\sqrt{-1})^{g+b\sqrt{-1}}$, ſi trova ſubito, che annullati b e g nel valore di queſta, diventa $a^{b\sqrt{-1}}=\cos.(b\log.a)+\text{ſen.}(b\log.a)\sqrt{-1}$. Ora tutte le volte che ſarà $b=\pm\frac{m\pi}{\log.a}$ (eſſendo m un numero intero qualunque), egli è evidente che naſcerà $a^{b\sqrt{-1}}=\pm 1$, ſecondo che m ſarà pari o diſpari, e però in tutti queſti caſi il valore ſarà ſempre reale.

Parevami una volta di aver ritrovato un argomento inſolubile contro l' opinione *Euleriana* circa il valore immaginario de' logaritmi delle quantità negative, cui propoſi a qualche Geometra ſenza ottenerne lo ſcioglimento, il quale però ſi ottiene colla più luminoſa evidenza dal premeſſo principio. Io diſcorreva dunque così: Preſo e pel numero, che ha per logaritmo iperbolico

lico l'unità, ſe queſto s'inalza ad un eſponente x, e così elevato e^{x} perſiſte ad avere un valor reale, non può non eſſere l'eſponente x reale ancor eſſo. Sia pertanto $x = \log. -a$; e poichè $e^{\log. -a} = -a$, ed il valore di $-a$ è viſibilmente reale; tale ſarà in conſeguenza anche quello di $\log. -a$. La riſpoſta è faciliſſima: e^{x} può eſſer reale, quand'anche l'eſponente x non lo ſia; baſta in fatti, che l'eſponente x ſia $= \pm m\pi\sqrt{-1}$, perchè allora $e^{x} = e^{\pm m\pi\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\, m\pi \pm \text{ſen.}\, m\pi\sqrt{-1} = \pm 1$, che è un valore affatto reale. Ed eſſendoſi dimoſtrato $\log. -a = \pm(2n-1)\pi\sqrt{-1} + \log. a$, ne viene $e^{\log. -a} = e^{\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1} + \log. a} = a e^{\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}} = a\left(\text{coſ.}\,(2n-1)\pi \pm \text{ſen.}\,(2n-1)\pi\sqrt{-1}\right) = a \times -1 = -a$, come appunto eſſer dee. L'inganno naſce dal falſo ſuppoſto, che a primo aſpetto può ſedurre chicheſſia, che una quantità reale elevata ad un eſponente immaginario debba ſempre diventare immaginaria.

Un Teorema importante, che non mi ſovviene di aver trovato preſſo alcun Geometra, ſi ricava dalla formola $a^{h\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\,(h \log. a) + \text{ſen.}\,(h \log. a)\sqrt{-1}$, nella quale ſe ſi prende $h = \pm x\sqrt{-1}$, ſi ha il riſultato $a^{\mp x} = \text{coſ.}\left(x\sqrt{-1}\,.\log. a\right) \pm \text{ſen.}\left(x\sqrt{-1}\,.\log. a\right)\sqrt{-1}$; che è quanto dire ogni quantità eſponenziale $a^{\mp x}$, che ha un eſponente x reale, e la baſe logaritmica a qualunque, ſi riduce ad una forma, che ſebbene all'aſpetto immaginaria è però indubitatamente reale. Ed ecco pertanto, che ſe la quantità eſponenziale $a^{\pm b\sqrt{-1}}$ ſi riduce alla nota forma coſ. $(b \log. a) \pm$ ſen. $(b \log. a)\sqrt{-1}$, la eſponenziale $a^{\mp b}$ ſi riduce alla forma non per anco avvertita coſ. $(b\sqrt{-1} \log. a) \pm$ ſen. $(b\sqrt{-1} . \log. a)\sqrt{-1}$.

Dall' eſſerſi finalmente dimoſtrato, che la generaliſſima eſpreſſione $(a+b\sqrt{-1})^{g+b\sqrt{-1}}$ ſi converte in un ſemplice binomio, una parte del quale è il prodotto d' una certa quantità pel coſeno di un arco idoneo circolare, e l' altra parte è il prodotto della ſteſſa quantità pel ſeno di quell' arco e per la ſpecie immaginaria $\sqrt{-1}$, ne viene in conſeguenza il famoſo Teorema di *Cotes*, non meno che l' altro più generale di *Moivre*, come pure l' invenzione delle radici di qualunque grado d' una propoſta quantità; coſe tutte di troppo facile deduzione da' premeſſi principj per non dover eſſere qui ſminuzzate.

Un celebratiſſimo Oltramontano Geometra ha voluto recentemente ſpiegare onde avvenga, che i ſettori reali del cerchio vengano eſpreſſi dai ſettori immaginarj dell' iperbola, e viceverſa i reali dell' iperbola dagl' immaginarj del cerchio, e non diſſimula la ſua meraviglia, che nè *Giovanni Bernoulli* primo autore della riduzione degli uni negli altri, nè i Geometri poſteriori abbiano di ciò recata ragione alcuna. Siccome però queſta propoſizione non pare che aſſolutamente ſuſſiſta, non ſarà qui fuor di luogo il rettificarne il ſignificato, e dimoſtrare all' oppoſto, che non altrimenti i ſettori reali del cerchio, ma bensì gl' immaginarj vengono rappreſentati dai ſettori immaginarj dell' iperbola, e viceverſa.

Chiamo r il ſemiaſſe traverſo dell' iperbola conica equilatera, per la retta condotta dal centro dell' iperbola ad un punto qualunque del ſuo perimetro, φ l'angolo compreſo da queſta retta e dal ſemiaſſe traverſo: è manifeſto, che il ſettore contenuto dai lati di queſt' angolo e dall' arco iperbolico ha per elemento $\frac{1}{2}z^2\,d\varphi$; e ſiccome facilmente ſi dimoſtra $z^2 = \frac{r^2(1+\text{tang.}\,\varphi^2)}{1-\text{tang.}\,\varphi^2}$, trovaſi il detto elemento $= \frac{r^2(1+\text{tang.}\,\varphi^2)\,d\varphi}{2(1-\text{tang.}\,\varphi^2)}$. Ma ſi ſa dover eſſere $d\varphi = \frac{d\,.\,\text{tang.}\,\varphi}{1+\text{tang.}\,\varphi^2}$; dunque l'elemento del ſettore iperbolico ſi traſforma in $\frac{r^2\,d\,.\,\text{tang.}\,\varphi}{2(1-\text{tang.}\,\varphi^2)}$, ovvero in $\frac{r^2\,d\,.\,\text{tang.}\,\varphi}{4(1+\text{tang.}\,\varphi)} + \frac{r^2\,d\,.\,\text{tang.}\,\varphi}{4(1-\text{tang.}\,\varphi)}$. L'integrale di queſta quantità, cioè il ſettore iperbolico indefinito riſulta $= \frac{1}{4}r^2 \log.\frac{1+\text{tang.}\,\varphi}{1-\text{tang.}\,\varphi}$.

Ora il ſettore d'un circolo deſcritto col ſemidiametro r, e compreſo dall'angolo φ ha per ſuo elemento

$$\frac{r^2\,d\,.\,\text{tang.}\,\varphi}{2(1+\text{tang.}\,\varphi^2)} = \frac{r^2\,d\,.\,\text{tang.}\,\varphi}{4(1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1})} + \frac{r^2 d\,.\,\text{tang.}\,\varphi}{4(1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1})},$$

e queſta eſpreſſione ridotta ad integrazione ſomminiſtra pel valore del ſettore indeterminato $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}\log.$ $\frac{1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}$. Ma queſta eſpreſſione non è punto immaginaria, come a prima viſta potrebbe apparire: in fatti eſſa ſi riſolve in due parti $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}\log.$

$(1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}) - \frac{r^2}{4\sqrt{-1}}\,\text{log.}\,(1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1})$, la prima delle quali ſi converte nella ſerie $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}$ $\left(\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\,\text{tang.}\,\varphi^2-\frac{1}{3}\,\text{tang.}\,\varphi^3\sqrt{-1}-\frac{1}{4}\,\text{tang.}\,\varphi^4+\text{ecc.}\right)$, la ſeconda nella ſerie $\frac{-r^2}{4\sqrt{-1}}\,(-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}$ $+\frac{1}{2}\,\text{tang.}\,\varphi^2+\frac{1}{3}\,\text{tang.}\,\varphi^3\sqrt{-1}-\frac{1}{4}\,\text{tang.}\,\varphi^4-\text{ecc.}\,)$: laonde raccogliendo i termini proviene $\frac{1}{2}\,r^2\,(\,\text{tang.}\,\varphi$ $-\frac{1}{3}\,\text{tang.}\,\varphi^3+\frac{1}{5}\,\text{tang.}\,\varphi^5-\text{ecc.}\,)$, che è viſibilmente tutta reale.

La realità dell' anzidetta eſpreſſione ſi dimoſtra ancora mediante il Teorema precedentemente ſtabilito, che $\text{log.}\,(a+b\sqrt{-1})=\frac{1}{2}\,\text{log.}\,(a^2+b^2)+\theta\sqrt{-1}$, dove θ è l' arco circolare, deſcritto col raggio 1, e colla tangente $\frac{b}{a}$: imperciocchè fatto il debito paragone ſi raccoglie $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}\,\text{log.}\,(1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1})=\frac{r^2}{8\sqrt{-1}}\,\text{log.}$ $(1+\text{tang.}\,\varphi^2)+\frac{1}{4}\,r^2\varphi$, e parimente $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}\,\text{log.}$ $(1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1})=\frac{r^2}{8\sqrt{-1}}\,\text{log.}\,(1+\text{tang.}\,\varphi^2)$ $-\frac{1}{4}\,r^2\varphi$, e ſottraendo queſta da quella, naſce $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}$

$\log. \frac{1+\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}} = \frac{1}{2} r^2 \varphi$, che è manifeſtamente l'eſpreſſione reale del ſettore circolare.

Da ciò ſi rende evidente, che l'eſpreſſione apparentemente immaginaria del ſettore reale del cerchio è effettivamente tutta reale, e che eſſa non può in verun modo equivalere all'eſpreſſione d'un ſettore immaginario della iperbola. Siccome poi d'un tal ſettore iperbolico immaginario ſi ha l'eſpreſſione, ſe nel valor generale $\frac{1}{4} r^2 \log. \frac{1+\text{tang.}\varphi}{1-\text{tang.}\varphi}$ ſi ſoſtituiſce in vece dell'angolo φ l'angolo immaginario $\varphi\sqrt{-1}$, il che dà $\frac{1}{4} r^2$ $\log. \frac{1+\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}$ pel valore del detto ſettore immaginario, cioè compreſo da un angolo immaginario; paragonato perciò queſto valore con quello del ſettor reale del cerchio $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}} \log. \frac{1+\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}$, ſi vede ſubito, che l'uno differiſce eſſenzialmente dall'altro, mancando al primo il diviſore $\sqrt{-1}$, per la di cui aſſenza quello reſta impoſſibile, mentre per la ſua preſenza divien reale il ſecondo.

Meglio ancora ciò ſi comprende col ſeguente diſcorſo: Si dica I il ſettore iperbolico, C il circolare, e ſi avrà $dI = \frac{r^2 d.\text{tang.}\varphi}{2(1-\text{tang.}\varphi^2)}$, $dC = \frac{r^2 d.\text{tang.}\varphi}{2(1+\text{tang.}\varphi^2)}$. Si prenda nel ſettor circolare l'angolo immaginario $\varphi\sqrt{-1}$, ritenendo il reale φ pel ſettore iperbolico; e naſcerà $dC = \frac{r^2 d.\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}{2(1-\text{tang.}\varphi^2)} = dI\sqrt{-1}$, e quindi integrando $C = I\sqrt{-1}$, cioè il ſettor impoſſibile C del cerchio, contenuto dall'angolo impoſſibile $\varphi\sqrt{-1}$, è uguale al ſettore iperbolico I moltiplicato per $\sqrt{-1}$, che rende un tal valore impoſſibile. Così nell'eſpreſſione del ſettore iperbolico ſe ſi piglia $\varphi\sqrt{-1}$ in vece di φ, e ſi ritiene φ nel circolare, ſi trova $dI = \frac{r^2 d.\,\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}{2(1+\text{tang.}\,\varphi^2)} = dC\sqrt{-1}$, e quindi $I = C\sqrt{-1}$, e $C = \frac{I}{\sqrt{-1}}$, vale a dire il ſettor reale C del cerchio, corriſpondente al reale angolo φ, è uguale al ſettore impoſſibile I dell'iperbola diviſo per $\sqrt{-1}$, la qual diviſione toglie alla quantità la ſua impoſſibilità; ovvero finalmente il ſettore immaginario I dell'iperbola non equivale punto al ſettor reale C del cerchio, nè può eſſere da queſto rappreſentato, ma viene eſpreſſo per l'oppoſto dal prodotto della quantità immaginaria $\sqrt{-1}$ nel ſettore circolare, vale a dire da una quantità onninamente immaginaria.

Nell'atto di dar compimento a queſta breve Memoria mi accorgo con ſorpreſa, che il famoſo Teorema Euleriano intorno all'infinita moltiplicità de' valori del logaritmo d'una propoſta quantità può dimoſtrarſi indipendentemente dal calcolo Infiniteſimale, e da ogni ipoteſi d'infiniteſimi colla pura Algebra finita; ed in tal occaſione mi avveggo eziandio, che il Teorema Alemberziano intorno alla riduzione di qualſiſia più complicato immaginario alla forma binomiale ſempliciſſima ſi dimoſtra ancor eſſo col ſolo calcolo delle grandezze finite, ed in un modo aſſai ſpedito e rigoroſo. Ecco pertanto la dimoſtrazione del Teorema Euleriano ſenza aſſumere alcun principio del calcolo Infiniteſimale, nè alcuna nozione di grandezze inaſſegnabili o infinite.

Preſa x per rappreſentare qualunque data grandezza, ſi dimoſtra col ritorno delle ſerie, come può vederſi in varj Trattati elementari di Algebra finita, che log.

$\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \text{ecc.}\right)$. Dunque ſe ſi nomina φ l'arco d'un cerchio deſcritto col raggio 1, e ſi fa $x = \text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}$, naſcerà $\log.\frac{1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}$ $= 2\left(\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1} - \frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3\sqrt{-1} + \frac{1}{5}\text{tang.}\,\varphi^5\sqrt{-1}\right.$ $\left.- \frac{1}{7}\text{tang.}\,\varphi^7\sqrt{-1} + \text{ecc.}\right) = 2\sqrt{-1}\left(\text{tang.}\,\phi - \frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3\right.$ $\left.+ \frac{1}{5}\text{tang.}\,\varphi^5 - \frac{1}{7}\text{tang.}\,\varphi^7 + \text{ecc.}\right)$. Ma col ritorno ſteſſo delle ſerie nell'Algebra ordinaria viene dimoſtrato, che la ſerie $\text{tang.}\,\phi - \frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3 + \frac{1}{5}\text{tang.}\,\varphi^5 - \frac{1}{7}\text{tang.}\,\varphi^7 + \text{ecc.}$ rappreſenta il valore dell'arco circolare φ: ſarà dunque $2\varphi\sqrt{-1} = \log.\frac{1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}$, cioè ſoſtituendo $\frac{\text{ſen.}\,\varphi}{\text{coſ.}\,\varphi}$ in luogo di tang. φ, ſarà $2\varphi\sqrt{-1}$ $= \log.\frac{\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1}}{\text{coſ.}\,\varphi - \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1}} = \log.\frac{(\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1})^2}{\text{coſ.}\,\varphi^2 + \text{ſen.}\,\varphi^2}$ $= 2\log.\,(\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1})$, e quindi $\varphi\sqrt{-1} =$ $\log.\,(\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1})$. Se ora ſi prende $\varphi = \pm 2m\pi$, denotando m tutti i numeri naturali dal zero ſino all'infinito, ſi ha $\text{ſen.} \pm 2m\pi = 0$, $\text{coſ.} \pm 2m\pi = 1$: conſeguentemente $\pm 2m\pi\sqrt{-1} = \log.\ 1$, cioè a dire log. 1 ha un'infinità di valori 0, $\pm 2\pi\sqrt{-1}$, $\pm 4\pi\sqrt{-1}$, $\pm 6\pi\sqrt{-1}$, ecc. Pigliato poi $\varphi = \pm(2m-1)\pi$, diventa $\text{ſen.} \pm (2m-1)\pi = 0$, $\text{coſ.} \pm (2m-1)\pi = -1$. Laonde $\pm(2m-1)\pi\sqrt{-1} = \log. -1$, vale a dire $\log. -1$ ha i ſeguenti valori infiniti $\pm\pi\sqrt{-1}$, $\pm 3\pi\sqrt{-1}$, $\pm 5\pi\sqrt{-1}$, $\pm 7\pi\sqrt{-1}$, ecc.

Dimoſtrato in tal guiſa il Teorema Euleriano, ſi deduce ſubito dal primo valore di $\log. -1$ la celebre proporzione Bernoulliana fra il diametro e la circonferenza del cerchio, poichè eſſendo $\log. -1 = \pi\sqrt{-1}$ ne viene $1 : \pi :: \sqrt{-1} : \log. -1$, cioè il diametro alla circonferenza come la radice dell' unità negativa al logaritmo dell' unità negativa.

Dall' ugualtà $\varphi\sqrt{-1} = \log.(\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1})$ ſi ricava, preſo e pel numero che ha per ſuo logaritmo naturale l' unità, $e^{\varphi\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1}$; e quindi $e^{n\varphi\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\,n\varphi + \text{ſen.}\,n\varphi\sqrt{-1} = (\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1})^{n}$.

Che ſe ſupponghiamo $e^{\varphi\sqrt{-1}} = B^{x\sqrt{-1}}$, e conſeguentemente $\varphi\sqrt{-1} = x\sqrt{-1}\,\log. B$, cioè $\varphi = x\log. B$, ne inferiremo $e^{\varphi\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1} = B^{x\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\,(x\log. B) + \text{ſen.}\,(x\log. B)\sqrt{-1}$.

Parimente denotando p, e q due grandezze qualunque ſi ha $\log.(p+q\sqrt{-1}) = \log. p\left(\frac{p+q\sqrt{-1}}{p}\right)$ $= \log. p\left(1+\frac{q}{p}\sqrt{-1}\right) = \log. p$ $+ \log.\left(1+\frac{q}{p}\sqrt{-1}\right)$. Pigliſi φ per l' arco del raggio 1 della tangente $\frac{q}{p}$, ovvero del ſeno $\frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$, e del coſeno $\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$; ed avremo $\log.(p+q\sqrt{-1})$ $= \log. p + \log.(1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}) = \log. p$ $+ \log. \frac{\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1}}{\text{coſ.}\,\varphi} = \log. p - \log. \text{coſ.}\,\varphi + \log.$

(coſ.

$(\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1}) = \log.\,p - \log.\,\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2)}} + \log.\,(\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1}) = \log.\,(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + \log.\,(\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1}) = \log.\,(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + \varphi\sqrt{-1}$.

Da tali Teoremi in sì poche linee dimoſtrati coll' ordinario calcolo finito rieſce ora faciliſſimo l' inferire il famoſo Teorema del Sig. D' *Alembert* $(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = P + Q\sqrt{-1}$. Imperciocchè eſſendoſi trovato $\log.\,(p+q\sqrt{-1}) = \log.\,(p^2+q^2)^{1:2} + \varphi\sqrt{-1}$, poſto φ per l' arco ſopra indicato, ne deriva $\log.\,(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = (m+n\sqrt{-1})\log.\,(p+q\sqrt{-1}) = (m+n\sqrt{-1})\log.\,(p^2+q^2)^{1:2} + (m+n\sqrt{-1})\varphi\sqrt{-1} = \log.\,(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}} + \log.\,(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}n\sqrt{-1}} + m\varphi\sqrt{-1} - n\varphi$. Ma abbiamo dimoſtrato $B^{x\sqrt{-1}} = \text{coſ.}(x\log.\,B) + \text{ſen.}(x\log.\,B)\sqrt{-1}$, e però $(p^2+q^2)^{\frac{2}{2}n\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\left(\frac{1}{2}n\log.\,(p^2+q^2)\right) + \text{ſen.}\left(\frac{1}{2}n\log.\,(p^2+q^2)\right)\sqrt{-1}$; dunque ſoſtituito queſto valore, naſcerà $\log.\,(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = \log.\,(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}} + \log.\left(\text{coſ.}\left(\frac{1}{2}n\log.\,(p^2+p^2)\right) + \text{ſen.}\left(\frac{1}{2}n\log.\,(p^2+q^2)\right)\sqrt{-1}\right) + m\varphi\sqrt{-1} - n\varphi$; e paſſando dai logaritmi ai numeri proviene $(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$

$= e^{m\varphi\sqrt{-1}-n\varphi}(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}\left(\text{coſ.}\left(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\right) + \text{ſen.}\left(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\right)\sqrt{-1}\right)$. Ora $e^{m\varphi\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\,m\varphi + \text{ſen.}\,m\varphi\sqrt{-1}$. Dunque $(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ $= e^{-n\varphi}(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}\left(\text{coſ.}\,m\varphi + \text{ſen.}\,m\varphi\sqrt{-1}\right)\left(\text{coſ.}\left(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\right) + \text{ſen.}\left(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\right)\sqrt{-1}\right)$ $= e^{-n\varphi}(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}\times\left(\text{coſ.}\,m\varphi\,\text{coſ.}\left(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\right) - \text{ſen.}\,m\varphi\,\text{ſen.}\left(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\right) + \text{coſ.}\left(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\right).\text{ſen.}\,m\varphi\sqrt{-1} + \text{coſ.}\,m\varphi\,\text{ſen.}\left(\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\sqrt{-1}\right)\right)$ $= e^{-n\varphi}(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}\times\left(\text{coſ.}\left(m\varphi+\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\right) + \text{ſen.}\left(m\varphi+\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\right)\sqrt{-1}\right)$. Poſto pertanto $P = e^{-n\varphi}(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}\,\text{coſ.}\left(m\varphi+\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\right)$, $Q = e^{-n\varphi}(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}\,\text{ſen.}\left(m\varphi+\tfrac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\right)$, riſulta finalmente $(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = P + Q\sqrt{-1}$.

Fig. II

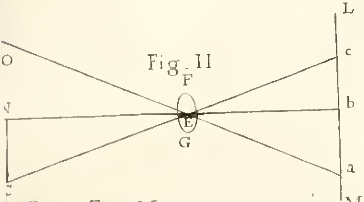

O
F
N
E
G
L
c
b
a
M

Fig. III

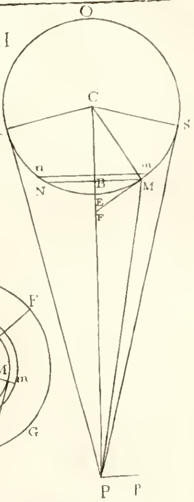

O
C
R
S
n
m
N
B
M
E
F
P
P

Fig. V

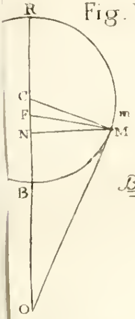


Fig. VI

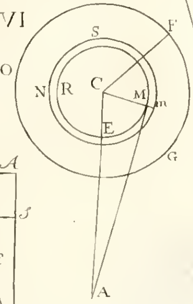
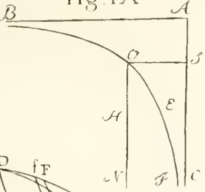

S
F
O
N
R
C
M
m
E
G
A

Fig. IX



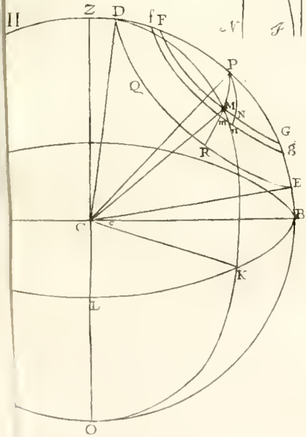

H
Z
D
f
F
P
Q
M
N
m
n
G
g
R
E
B
C
c
K
L
O

Fig. X

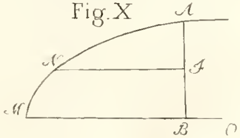
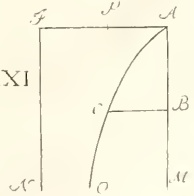


Fig. XI



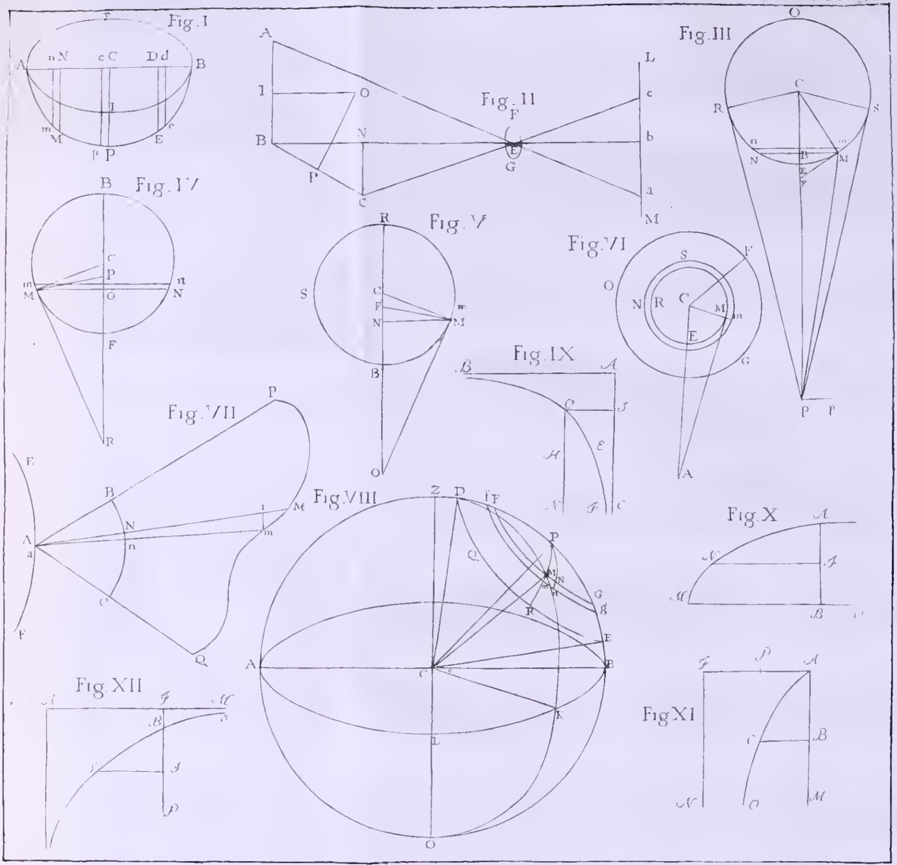


Fig. I
A
B
n N
c C
D d
I
m
M
e
E
p P
Fig. II
A
I
O
B
N
P
C
F
E
G
L
c
b
a
M
Fig. III
O
C
R
S
n
N
B
m
M
E
F
P
p
Fig. IV
B
C
P
m
M
O
n
N
F
R
Fig. V
R
S
C
F
N
m
M
B
O
Fig. VI
S
F
O
N
R
C
M
m
E
G
A
Fig. VII
P
E
B
N
n
A
a
l
M
m
C
F
Q
Fig. VIII
Z
D
f F
P
Q
M
N
m
n
G
g
R
E
A
C
B
e
K
L
O
Fig. IX
B
A
O
I
E
H
N
F
C
Fig. X
A
N
I
M
B
O
Fig. XI
F
P
A
C
B
N
O
M
Fig. XII
A
F
M
B
I
P

DESCRIZIONE
DI UNA
MACCHINA METEREOLOGICA

Per mezzo della quale ſi determina di ora in ora la durata e quantità della pioggia.

Del Sig. Cavaliere Marsilio Landriani.

SEbbene fino dall' erezione delle più antiche e celebri Accademie ſiaſi tenuto eſatto conto della quantità della pioggia caduta ne' diverſi giorni dell' anno, e vi ſia ſtato perſino chi ha miſurato la quantità della pioggia che cade a diverſe altezze; pure per quanto io ſappia alcuno non vi è ſtato ancora che abbia intrapreſo delle oſſervazioni circa alla durata e quantità della pioggia caduta nelle diverſe ore del giorno, e della notte; eſſendoſi ſoltanto limitate le oſſervazioni ed il regiſtro de' giornali di coloro che hanno intrapreſe delle oſſervazioni metereologiche a indicare ſemplicemente, che in un tal giorno era caduta una data quantità di pioggia, e tutto al più fu lodata la diligenza di chi nel riferire i riſultati delle oſſervazioni ſulla quantità della pioggia caduta in un dato giorno vi aggiunſe che la pioggia era ſtata o continua od interrotta.

Eppure la cognizione della durata della pioggia, non meno che della di lei quantità oraria, non è un oggetto ſemplicemente curioſo, eſſendo eſſa certamente utile ed intereſſante per ben conoſcere l' indole e la natura di un clima, e per render ragione di molti fenomeni dell' atmosfera . Imperocchè ſe ſi rifletta che qualunque benchè menoma modificazione del fluido che noi reſpiriamo non può eſſere in alcun modo indifferente al ben eſſere dell' economia animale, e che la durata non meno che la di lei quantità influiſcono moltiſſimo nelle variazioni delle modificazioni dell' atmosfera, neſſuno certamente vi sarà che riſguardar poſſa come una vana e ſterile curioſità l' occuparſi di queſte oſſervazioni coll' ammetterle nel ruolo delle altre oſſervazioni metereologiche.

L' umidità dell' atmosfera, che è uno degli elementi della di lei ſalubrità, non ſolo procede dalla traſpirazione dell' immenſa copia de' vegetabili che coprono la terra, dalla reſpirazione e traſpirazione degli animali, dall' evaporazione delle acque e da ſimili cauſe, ma anche dalla quantità e durata della pioggia; per modo tale che taluno ſi è luſingato di poter determinare l' umidità di un clima e di una ſtagione dalla ſemplice cognizione della quantità dell' acqua piovuta. Ma ſebbene una tale luſinga ſia ſtata dimoſtrata vana dalle oſſervazioni e da' confronti del Sig. *Dobſon* (*a*), non perciò ſi può conchiudere che le pioggie non influiſcono ſull' umidità dell' atmosfera; ma che ſoltanto non è ſempre proporzionale l' umidità dell' aria alla quantità della pioggia.

Per render più giuſto, e meno fallace queſto confronto fra l' umidità dell' aria e la pioggia conviene aver riguardo più alla durata della pioggia che alla di lei quantità, poichè ſtando l' aria per un maggiore ſpazio di tempo in contatto dell' acqua s' imbeve di una maggiore quantità di umido, che non aſſorbiſce sì facilmente nelle dirotte pioggie ſebbene abbondantiſſime.

(*a*) Phil. Tranſactions.

Inoltre l' aria nella caduta delle pioggie ſi deſlogiſtica, ed acquiſta una maggiore ſalubrità; poichè dalle belle ſperienze di *Prieſtley* ſi ſa che uno dei mezzi, che la natura impiega per rendere all' atmosfera l' originaria ſua ſalubrità, è il dilavamento delle pioggie; e ſi ſa altronde che i fanghi, che per mancanza delle acque tramandano de' vapori mofetici, maſſime ſe ſieno percoſſi dai raggi ſolari, non infettano più l' atmosfera qualora ſieno coperti da una notabile quantità di acqua.

Tutto ciò è appoggiato alla giornaliera ſperienza, e baſta dare un' occhiata allo ſtato dell' aria delle campagne paludoſe per convincerſene; imperocchè in quali ſtagioni l' aria è giudicata e trovata inſalubre? in quelle ſtagioni appunto nelle quali le pioggie ſono rare o di breve durata; poichè allora le terre paludoſe, non eſſendo coperte di molte acque, riſcaldate dal ſole fermentano, ed imputridendo eſalano una notabile quantità di vapori aeriformi parte flogiſticati e parte infiammabili che meſcolandoſi coll' atmosfera ne alterano la di lei purezza e ſalubrità. Nè per altra ragione nelle paludi Pontine, nelle maremme Saneſi, ed in alcuni luoghi paludoſi della Lombardia Auſtriaca, dove e pel genere di coltivazione, e per le molte acque ſtagnanti l' aria è quaſi abitualmente inſalubre, noi non temiamo più di reſpirare quelle arie in quelle ſtagioni in cui le frequenti pioggie hanno reſo all' aria una uniforme, e preſſo a poco eguale ſalubrità.

Egli è vero però che talvolta è ſtato oſſervato che dopo lunghe ſiccità la caduta di una breve pioggia è ſtata accompagnata da febri d' indole maligna, perniciosa, che non ſarebbero inſorte ſe la ſiccità foſſe continuata più oltre; ma queſta pur troppo vera oſſervazione non prova che inſalubri ſiano le pioggie, ma che una tale infezione procede da uno ſtato particolare delle terre paludoſe.

Eſſe ſiccome non ſono che un ammaſſo di cadaveri d' inſetti, di foglie, di virgulti infraciditi e ſcompoſti, quando ſono coperte da un notabile ſtrato d'acqua non fermentano, ma vanno lentamente decomponendoſi, e riſolvendoſi ne' loro principj, ſenza tumulto o notabile effervefcenza. Forſe anche i vapori eſalanti da queſte ſoſtanze ſcomponentiſi in vece di meſcolarſi coll' atmosfera, incontrando uno ſtrato d' acqua, da quello ſono come trattenuti ed imprigionati e ſe pur giungono fino alla ſuperficie dell' acqua, hanno in parte perduto il loro veleno, e ſono in qualche modo meno moſetici: ma quando i fanghi ſono ſtati per lungo tempo eſpoſti e percoſſi dal ſole, e ſono reſi aridi, toſtochè una copioſa quantità di acqua improvviſamente li penetra, la fermentazione per così dire ſoſpeſa, od impedita, viene dall' acqua favorita, e promoſſa a ſegno che una vera e tumultuoſa fermentazione quindi ne naſce, ed un copioſo torrente di vapori flogiſtici alkalici, e talvolta infiammabili ſi ſparge nell' atmosfera, e quella ſingolarmente infetta ed avvelena.

Il Sig. *Guglielmo White* ha fatto delle belle ſperienze ed oſſervazioni ſu queſta materia, le quali rendono ragione di queſti ſovraccennati ſingolari fenomeni dell' atmosfera. Poichè egli ha trovato che il fango paludoſo aſciutto poco o niente altera l' aria che gli è in contatto; laddove ſe il fango ſia imbevuto da molta acqua, eſala una tale quantità di vapori flogiſtici, che in poco tempo l' aria è reſa ſingolarmente flogiſticata. Perciò ſe dopo una lunga ſiccità arriva che cada della pioggia di breve durata, l' atmosfera in vece di deflogiſticarſi ſi flogiſtica, e ſi rende inſalubre; perlochè non è da farſi le meraviglie ſe talora dopo la caduta di una pioggia di breve durata ſi ſieno reſe dominanti le malattie di aria cattiva. Ma ſe le pioggie ſono abbondanti, e di una notabile durata, per cui i fanghi ſieno ſtati abbondantemente penetrati e coperti dall' acque, le pioggie anzi che eſſere dannoſe ſalutari ſono, e benefiche, poichè i vapori putridi ſparſi per l' atmosfera ſono dalle pioggie precipitati, e la vegetazione che era prima languente ſi rinvigoriſce, e maggior copia d' aria deflogiſticata quindi eſpirano le foglie di tutte le piante.

Ma ſenza eſtenderci più oltre a ragionare dell' utilità che ci proviene dalle pioggie baſta dare un' occhiata ai riſultati che hanno fornito le Oſſervazioni fatte ſulla durata e quantità della pioggia caduta in tutto l' anno ſcorſo (*a*) per comprendere quali utili e curioſe cognizioni ci ſomminiſtri una macchina che di ora in ora ci indichi la quantità non meno che la durata della pioggia. Poichè toſto ſi comprende quale ſia ſtato il meſe, il giorno, l' ora più piovoſa, ſe di giorno piova aſſai più che di notte, e mille altre utili nozioni che dall' uſo di queſta macchina ne derivano.

La macchina che io ho immaginato e che da più di un anno ho fatto coſtruire tiene conto non ſolo della durata, ma ancora della preciſa quantità oraria della pioggia.

AA è una tavola circolare di legno annerito di circa 20 pollici di diametro (vedi *fig.* 1 *tav.* 1), che ha nel mezzo un cerchio d' ottone *BB* diviſo in 24 parti, ciaſcuna delle quali è ſuddiviſa in 30 parti. Eſſendo il cerchio *BB* di un diametro minore della tavola circolare *AA*, neceſſariamente laſcia tutto all' intorno una zona di legno annerito di due pollici di larghezza, la quale è diviſa in due parti eguali *DD*, *CC* da un anello d' ottone *EE*, incaſtrato nella tavola *AA*. Queſta tavola *AA* è fiſſata a sfregamento ſopra l' albero di una ruota orizzontale, che mediante un movimento

---

(*a*) Queſte Oſſervazioni ſiccome entrano in un piano di oſſervazioni metereologiche fatte in Milano ſaranno dal Sig. *Prof. Moſcati* pubblicate nel primo volume degli Atti della Società Patriotica di Milano.

d' orologeria compie un' intera rivoluzione nello ſpazio di 24 ore (la *fig.* 1 rappreſenta la tavola circolare che ſi vede poſta orizzontalmente nella *fig.* 2).

Sul piano del telajo del movimento d'orologeria ſottopoſto alla tavola *AA* è fiſſato un ſolido braccio d'ottone orizzontale *F* che porta il telajo *GHGH*, che ſeparatamente, e quaſi nella naturale ſua grandezza è diſegnato nella *tav.* 2 *fig.* 2.

In ciaſcuna delle due laſtre piane orizzontali *HH* di queſto telajo evvi una fineſtra quadrangolare *T*, *S*, deſtinata a ricevere l' aſta quadrangolare *MM* rappreſentata ſeparatamente nella ſua naturale grandezza nella *fig.* 5 della *tav.* 2 Acciocchè queſt' aſta poſſa liberamente muoverſi, e ſcorrere nelle ſuddette fineſtre *S*, *T* ha applicate quattro mobili rotelle d' acciajo *P*, *P* ecc. che appoggiando contro l' aſta quadrangolare *MM* la tengono regiſtrata in modo che non ſi può muover che nello ſteſſo piano, e non impediſcono punto, anzi favoriſcono la libertà de' ſuoi movimenti.

La *fig.* 6 della *tav.* 2 eſprime l' aſta *MM* colla rotella *P* applicatale, e la *fig.* 7 della ſteſſa *tav.* eſprime la rotella *P* ſeparata.

L' aſta quadrangolare *MM* porta ſul piano della ſua eſtremità ſuperiore un braccio orizzontale d'ottone *QQ* fiſſato colla vite W, il quale piega ad angolo retto in *S*, ed ha alla di lui eſtremità un porta-matita *N*. (Nella *fig.* 5 della *tav.* 2 è tutto ciò baſtevolmente eſpreſſo.)

Dal piano ſuperiore *H* del telajo *HGHG* ſorge una colonnetta d' ottone *O* ſeparatamente rappreſentata nella *tav.* 2 *fig.* 3, la quale ha ſuperiormente una cerniera *N* in cui ſi muove il braccio d' ottone *YY*, la di cui eſtremità termina in un picciolo imbuto oſſia vaſe conico *R*. Queſto braccio *YY* ha non molto lontano dalla cerniera *N* un picciolo bracciuolo tranſverſale *Z* le *Z* che appoggia e preme ſul braccio *QQ* come è baſtevolmente eſpreſſo nella *fig.* 2 della *tav.* 1.

Una molla ſpirale *RR* fiſſata ad un picciolo parallepipedo *T* che ſorga ſulla laſtra inſeriore *H* (nella *fig.* 4. della *tav.* 1. ſi vede ſeparatamente la molla *RR*, ed il parallepipedo *T*) ſoſtiene tutto il peſo dell' aſta quadrangolare *MM*, del braccio *QQ*, e dell'altro braccio *YY*, poichè eſſo pure preme l'aſta *MM* per eſſere il bracciuolo *Z* appoggiato ſul braccio *QQ*. La forza di queſta molla *RR* deve eſſere tale che baſti a tener ſollevata l'aſta *MM* e tutto ciò che le è anneſſo in modo che l'eſtremità della matita *H* ſia diſtante una buona linea parigina ed anche più dalla zona *CC* della tavola circolare *AA*.

Dalla deſcrizione di queſto apparato facilmente ſi comprende che ſituando ſul colmo del tetto un ampio imbuto *AA* di latta, o di rame inverniciato che abbia più piedi quadrati di area (vedi *fig.* 9 *tav.* 2), l'acqua che pioverà in queſto imbuto cadrà nel picciolo vaſe conico *R*, ed il peſo dell' acqua contenuta in queſto vaſe farà abbaſſare la leva oſſia braccio *YY*, e con eſſo l'altro braccio *QQ*, e la matita *H* ſi abbaſſerà quindi ſulla zona *CC* della tavola circolare *AA*; e continuerà a ſtarvi appoggiata fino a tanto che il vaſe conico *C* ſarà ripieno d'acqua. Poichè per quanto picciola ſia la quantità dell' acqua caduta nel vaſetto *R* premendo ſull'eſtremità della leva *YY* è ſufficiente a deprimere la leva ſuddetta.

Ora dunque ſe col ceſſar della pioggia ſi poteſſe ottenere che il vaſetto conico *R* da sè medeſimo ſi votaſſe, la molla ſpirale *RR* toltole il peſo dell'acqua contenuta nel vaſetto *R* rialzerebbe alla primiera altezza l'aſta *MM*, e ſeco la matita *H*. Ora un tale votamento del vaſetto *R* ſi ottiene per mezzo di un picciolo ſifoncino di criſtallo *NV* (vedi la *fig.* 6. *tav.* 1.) compoſto di un tubo *N* che continua capillare fino alla curvatura dove ſi allarga e termina in *V* a foggia di una penna da ſcrivere.

La capillarità di queſto ſifoncino *NV* e la di lui lunghezza devono eſſere tali, che appena l'acqua tocca l' eſtremità della gamba capillare *N* ſpontaneamente venga attratta, e goccia a goccia fluiſca dall' eſtremità più larga *V* del ſifone *NV*: e ſiccome non è così facile il procurarſi un ſifone che ſia di una tale preciſa capillarità che attragga l' acqua ſenza aſpirar l' aria, e che l' acqua attratta fluiſca dall' altro gambo *V* goccia a goccia, perciò ſoglio procurarmi uno di queſti ſifoni che abbia la gamba *P* di un diametro ſimile a quello dei termometri a ſpirito di vino; indi inſinuando in eſſo diverſe ſetole di cignale facilmente ottengo che l' acqua appena toccato che abbia l' eſtremità del tubo capillare *P* ſia attratta, e goccia a goccia fluiſca dall' altro braccio più largo *V*.

L' uffizio di queſto ſifone *NV*, che è la parte più importante del Croniografo e che deve eſſer adattato al vaſe conico *R*, ſi è di vuotare, ceſſata che ſia la pioggia, tutta l' acqua contenuta nel vaſetto conico *R*; ed è fatto con una gamba capillare acciocchè nelle minute pioggie minore ſia la quantità dell' acqua che fluiſce dal ſifone *NV* di quella che viene raccolta nel vaſe *AA* (*fig. 9 tav.* 2) e che cade nel vaſetto *R*. Poichè anche nelle pioggie minutiſſime il vaſetto *R* è ſempre pieno, conſeguentemente la matita *H* ſta appoggiata alla zona *CC* per tutto quel tempo in cui la pioggia continua a cadere, e laſcia ſulla zona ſuddetta una ſtriſcia bianca per tutto quello ſpazio di tempo in cui è piovuto.

Affinchè la matita *H* ſia pronta a ſcrivere ſulla zona *CC* la durata della pioggia, deve eſſere fatta di una argilla bianca teneriſſima, ed io coll' eſperienza di più di un anno ho trovato ottima quella che volgarmente ſi chiama paſtello bianco de' Pittori.

La gamba *V* del ſifone *NV* è fatta della forma poc'anzi deſcritta, poichè ſe anche la gamba *V* aveſſe un diametro eguale a quello della gamba *N*, non ſempre il ſifone *NV*, ceſſata la pioggia, voterebbe il vaſetto *R*. Imperocchè un ſifone capillare aſpira l' acqua quando tutta la cavità del ſifone ſia intieramente libera; ma ſe una goccia d'acqua all'eſtremità dell' altra gamba che non peſca nel vaſetto *R*, o nella curvatura del ſifone, ſi arreſta, il ſifone più non giuoca. Poichè come è noto dalle ſperienze di *Jurin*, e *Muſſchembroek* un tubo capillare, la di cui eſtremità ſia oſtrutta da una goccia d'acqua o ermeticamente chiuſa, non attrae più l'acqua al diſopra del ſuo livello. Ora ſe ambedue le gambe del ſifone *NV* foſſero di un diametro eguale, frequentemente ed il più delle volte accaderebbe che qualche goccia d'acqua ceſſato il fluſſo del ſifone ſi arreſterebbe o alla eſtremità della gamba più lunga del ſifone, o nella curvatura. Laddove facendo che la gamba più lunga abbia un diametro di tre in quattro linee parigine, e che la di lei eſtremità ſia fatta a foggia di una penna da ſcrivere, giammai l'acqua non può arreſtarſi nè all'eſtremità, nè nella curvatura del ſifone, conſeguentemente l'uffizio del ſifone *NV* non reſta giammai ſoſpeſo, qualunque ſiaſi la circoſtanza della pioggia.

Talvolta accade che l'acqua che piove nel vaſetto *R* porti ſeco qualche grano di ſabbia od altro corpo ſtraniero il quale potrebbe inſinuarſi coll' aſpirazione dell' acqua, introdurſi nel tubo capillare *N*, e rendere inetto l'uſo del ſifone. E certamente di poco ſicuro uſo eſſo ſarebbe ſe non ſi aveſſero varie avvertenze, per cui quand'anche l'acqua che cade nel vaſetto *R* ſia torbida, la di lui funzione non è punto ſoſpeſa. Queſte avvertenze ſono di frammettere al tubo WW (*fig.* 2 *tav.* 2.) che conduce l'acqua che piove nel grande imbuto *AA* ſituato ſul colmo del tetto, un velo che arreſta e trattiene i grani di ſabbia, e di altri corpi ſtranieri che caſualmente cader poteſſero colla pioggia. A queſto oggetto due o tre pollici al diſopra dell'eſtremità di queſto tubo, eſſo è diviſo in *S*, e *T* per potervi frammettere il velo ſuddetto. Inoltre ſebbene la pioggia prima di cadere nel vaſetto conico *R* attraverſi e filtri pel velo or ora deſcritto, ciò non oſtante varie volte a diſpetto di queſto artificio qualche picciolo grano di ſabbia colla pioggia paſſa pel velo frappoſto nel vaſetto *V*. Per impedire che queſti granelli di ſabbia ſieno aſpirati dal tubo capillare, è neceſſario di fare che la lunghezza della gamba capillare *N* del ſifone *NV* ſia tale che applicato il ſifone *NV* al vaſetto *R* l'eſtremità della gamba *N* ſia diſtante due buone linee dal fondo del ſuddetto vaſe *R*. Poichè i grani di ſabbia che dentro vi cadono, eſſendo ſpecificamente più gravi dell' acqua, precipitano nel fondo conico del vaſetto *R*, e non poſſono quindi giammai entrare nel gambo capillare del ſifone *NV*.

Ciò non pertanto accade, e dalla ſperienza di più di un anno che faccio uſo di queſta mia macchina ſono ammaeſtrato, che talvolta, nè di ciò ſaprei aſſegnarne la cagione, ſe è qualche tempo che non ſia piovuto, il ſifone *NV* avvegnachè non contenga alcun corpo ſtraniero fuori delle ſetole di cignale, pure non aſpira l'acqua, inſomma non fa le funzioni per le quali è ſtato immaginato. Forſe cagione di ciò è il diſſeccamento della ſetola inſinuata nel ſifone, la quale nel diſſeccarſi ſi attortiglia più del biſogno, e riſtringe il foro della gamba capillare *N*. Poichè ſe ſi bagni la ſetola, o a quella ſi ſoſtituiſca un'altra eguale, il ſifone *NV* riprende le primiere qualità. Perciò qualora ſia qualche giorno che non ſia piovuto, e che l'aria ſia ſtata molto aſciutta, è neceſſario d'inumidire il ſifone *NV* e la ſetola in eſſo contenuta, e qualche volta ancora ſarà ben fatto di ſoſtituirvi un'altra: così pure è neceſſario di cangiare di tempo in tempo il velo frappoſto alle due parti *SW*, *WT* del tubo W (*fig.* 2 *tav.* 2) e di pulire il fondo del vaſe conico *R* della ſabbia che a diſpetto del velo interpoſto in eſſo cade; altrimenti col tratto del tempo il velo non è più permeabile dall' acqua, ed il gambo capillare del ſifone *NV* s' interriſce.

E' inutile che io avvertiſca che tutti quegli ſpazj che nella zona *CC* della tavola circolare *AA* (*fig.* 1 e 2 della *tav.* 1) ſaranno ſegnati da una ſtriſcia bianca dinoteranno le ore ed i minuti nei quali la pioggia è caduta, e quegli ſpazj, che ſaranno indicati dalla matita *H*, quelle ore e minuti ſegneranno ne' quali non è piovuto. Poichè ſtante la coſtruzione della macchina or ora deſcritta facilmente ſi comprende che fedelmente la matita *H* ſi abbaſſa ſulla zona *CC* al cominciar della pioggia, e continua a ſtar ivi appoggiata fino a tanto che la pioggia continua, ceſſata la quale toſto ſi rialza.

Per regiſtrare i riſultati giornalieri di queſta macchina, oſſia per regiſtrare le oſſervazioni Cronografiche ho immaginato una tavola comodiſſima, mediante la quale in un ſolo colpo d'occhio ſi vede l'andamento della durata della pioggia di meſe in meſe, di giorno in giorno, di ora in ora; ſi conoſce ſubitamente quali ſieno ſtati i giorni e le ore più piovoſe, ſi ſa ſe piove più di giorno che di notte, ſe più avanti il mezzodì che dopo, e mille altri ſimili utiliſſimi riſultati ci forniſce che difficilmente ſi potrebbero altrimenti ricavare. Per dimoſtrare l'uſo di queſta tavola ho creduto di far coſa grata al lettore di preſentargli quella che comprende le oſſervazioni del meſe di Agoſto dell'anno 1781.

Queſta tavola, come ſi vede, è diviſa da linee orizzontali in 33 ſpazj di una grandezza preſſo a poco eguale, ſolo che il primo ſpazio e l'ultimo ſono alquanto più grandi degli altri intermedj . Ciaſcuno di queſti ſpazj orizzontali è diviſo in 26 parti eguali da alcune linee perpendicolari , ſolo che anche in queſto caſo la prima diviſione e l'ultima ſono più grandi delle altre intermedie.

Nel primo ſpazio orizzontale ſi ſcrivono 24 numeri, cioè nella ſeconda caſella ſi ſcrive il numero 1, nella terza il 2, e così nelle altre gli altri numeri fino al 24 cioè le 24 ore di un giorno. Nell'ultima caſella a mano deſtra ſi ſcrive *ſomma dei minuti ne' quali è piovuto*, e nella prima caſella a mano ſiniſtra ſi ſcrive il nome del meſe di cui quella tabella comprende le oſſervazioni. Nelle altre caſelle verticali al diſotto di queſta ſi ſcrivono i numeri dall'uno fino al 31 cioè i giorni di un meſe, e nell'ultima di queſte caſelle ſi ſcrive *ſomma dei minuti ne' quali è piovuto in ciaſcun' ora*.

Poſto ciò ogni intervallo orizzontale eſſendo diviſo in 24 parti rappreſenterà le ſingole ore di ciaſcun giorno, ed ogni ſpazio orizzontale eſprimerà i ſingoli giorni di ciaſcun meſe. Ora trovando io ſulla zona oraria CC (*fig.* 2 *tav.* 1) nel giorno 3 del meſe d'Agoſto nello ſpazio corriſpondente all'ora quinta di quel giorno una ſtriſcia bianca corriſpondente a 15 minuti, perciò nella quinta caſella del giorno 3 ſcrivo il numero 15; e nella ſeſta, ſettima, ottava, e nona caſella di quel giorno ſcrivo i numeri 25, 10, 15, 5 perchè nell'ora ſeſta di quel giorno non piovette che per ſoli 25′, nella ſettima piovette per 10′ ecc. Nè eſſendo piovuto in tal giorno dalle 10 fino alle 16, e nell'ora 16 non eſſendo continuata la pioggia che per ſoli cinque minuti, perciò nella caſella ſotto l'ora 16 del giorno 3 ſcrivo il numero 5, e nell'ultima caſella dopo la 24 ſcrivo il numero 75, perchè appunto in quel giorno la durata della pioggia è ſtata di ſoli 75′.

Nel giorno 4 di Agoſto nella prima e ſeconda ora non piovette, perciò non vi è alcun numero nelle prime due caſelle di un tal giorno; nell' ora terza di un tal giorno la pioggia continuò per 30′, e nell' ora quarta per 40′, e non piovette più alcun' altra ora, perciò nella caſella terza, e quarta vi ſono ſcritti i due numeri 30′ e 40′, e le altre caſelle ſono vuote, e ſolo nell' ultima più grande evvi il numero 70′, cioè la ſomma dei minuti ne' quali è piovuto nel giorno 4.

Senza eſtendermi più oltre ad accennare le altre oſſervazioni Croniografiche che contiene queſta tavola, baſta darle un' occhiata per comprenderne l' uſo, poichè toſto ſi vede che in queſto modo ſi regiſtrano brevemente e nitidamente i riſultati giornalieri del Croniografo, e facilmente ſi poſſono quindi oſſervare gli andamenti della durata della pioggia, e determinare quali ſieno i giorni più piovoſi, e quali i meno piovoſi, ſe ſia piovuto più ne' primi dieci giorni del meſe che ne' ſecondi, ſe più ne' ſecondi che negli ultimi, poichè ſi vede toſto che nel meſe di Agoſto è piovuto aſſai più nei ſecondi dieci giorni del meſe, che nei primi e negli ultimi, e più negli ultimi che nei primi, poichè la durata della pioggia nei ſecondi dieci giorni è ſtata di 610′, negli ultimi di 580′, e nei primi di 225′, ed il totale della durata della pioggia è ſtato in quel meſe di 1415′. Tutta altra diviſione e confronto ſi può facilmente fare, e determinare per eſempio in quali punti lunari ſia maggiore la durata della pioggia ecc.

Per ſapere poi quali ore ſieno le più piovoſe, e quali le meno, ſe piova più di giorno che di notte ecc. ſi ſommano tutti i numeri contenuti in ciaſcuna delle caſelle degl' intervalli verticali, e nelle ultime caſelle più grandi a piedi della tavola ſi ſcrivono le ſomme. Ciaſcuno di queſti numeri ſcritti in ciaſcuna di queſte 24 caſelle rappreſenterà la ſomma dei minuti ne' quali è piovuto in ciaſcun' ora. Dando un' occhiata a queſti numeri ſi vede toſto che le ore più piovoſe nel meſe di Agoſto ſono ſtate la ſeconda, la prima, la quarta, la terza, e la vigeſima; l'ora meno piovoſa è ſtata la diciotteſima, poichè in eſſa non piovette, indi la nona, la diciaſſetteſima, la venteſimaterza, e la venteſimaquarta. Dividendo in tre parti il giorno di 8 in 8 ore ſi trova che le prime otto ore ſono ſtate più piovoſe delle ſeconde e queſte più delle ultime. In ſomma queſta tavola dà in un momento tutti i confronti e paragoni della durata della pioggia ecc.

DELL' IOMETROGRAFO.

Non baſta ſapere la durata della pioggia, conviene anche determinare la quantità dell'acqua che piove di ora in ora. Se la pioggia foſſe ſempre uniforme, tenendo conto della durata ſi avrebbe anche la di lei quantità; ma rare volte anzi quaſi mai ſuccede nel noſtro clima almeno che la pioggia ſia uniforme maſſime nella ſtate e nell'autunno, poichè durante qualche rovinoſo temporale la furia dell'acqua è tale che la quantità dell'acqua che piove uguaglia, e ſupera quella che nello ſpazio d'una ſettimana o di un meſe piove nell'inverno, o nella primavera. Perciò ho penſato di aggiugnere al Croniografo anche l'Iometrografo, una macchina cioè che ſulla tavola circolare *AA* (*fig.* 2 *tav.* 1) ſcrive la preciſa quantità dell'acqua che piove d'ora in ora.

Per avere tutta la pioggia, che cade nel grande imbuto *AA* (*fig.* 9 *tav.* 2) ſenza che ſe ne faccia la menoma diſperſione, è neceſſario che l'apertura dell'imbuto *AA* oſſia il tubetto conico *B*, in cui termina l'imbuto *AA*, entri in un tubo cilindrico *CC* di un diametro per lo meno del doppio maggiore della ſuddetta apertura *B*; poichè l'acqua che raccoglie l'imbuto *AA* ſenza ſtriſciare lungo le pareti del tubo *CC* tutta cade nel mezzo del tubo ſuddetto, e la prima goccia che cade dal tubetto *B* cade nel ſottopoſto vaſetto *R* (*fig.* 2 *tav.* 1).

Inoltre è neceſſario che queſto imbuto oltre all'eſſere di una notabile grandezza ſia ſituato ſulla parte più elevata del tetto acciocchè tutta la pioggia qualunque direzione eſſa abbia ſia in eſſo raccolta. Nel noſtro clima in cui nell'inverno, e nell'autunno le pioggie ſono talvolta sì minute che ſembrano piuttoſto una folta nebbia che precipiti che una pioggia, pure adoperando un imbuto che abbia nove piedi quadrati di area, la quantità dell'acqua che eſſo raccoglie è tale che le goccie che cadono dall'apertura *B* dell'imbuto *AA* (*fig.* 9 *tav.* 2) ſi ſuccedono con tale e tanta prontezza che non vi è fra l'una e l'altra un quarto di minuto ſecondo, come ho avuto occaſione di oſſervare adoperando un orologio che ſegnava i quarti di ſecondo.

Situato un tale imbuto ſul colmo del tetto, l'acqua che da eſſo fluiſce ſi raccoglie nel vaſe Iometrico *OAAO* rappreſentato nella *fig.* 5 della *tav.* 1. Queſto vaſe *AAOO* è formato di un tubo cilindrico *AA* di criſtallo, chiuſo inferiormente da una laſtra d'ottone *PP* e ſuperiormente da un coperchio parimenti d'ottone *TT*, il quale ha nel mezzo un foro circolare *V* di circa una linea e mezzo di diametro; ed ha lateralmente un tubetto d'ottone *SS*, il quale è fatto a forma di cono in tutta la groſſezza della laſtra d'ottone *TT*, indi s'inalza cilindrico fino al labbro del vaſe *OO*.

Io chiamo queſto tubo *SS* il tubo sfiatatore, perchè appunto ſerve a dar uſcita all'aria contenuta nel vaſe *AA* a miſura che eſſa è ſcacciata dall'acqua che cade pel foro *V*; ed affinchè l'apertura di queſto tubo *SS* non venga chiuſa da qualche goccia d'acqua che vi ſi poteſſe fermare, eſſa è fatta eſpreſſamente di una figura conica.

Nel mezzo di queſto vaſe *AA* evvi un ſifone tantalo *DDCCC* di criſtallo compoſto di due bracci di diſegual diametro e lunghezza. Il braccio più corto *DD* ha circa quattro linee di diametro, e conſerva un tal diametro quaſi fino all' origine della curvatura del ſifone dove ſi riſtringe e non ha che due linee poco più di diametro: vale a dire lo ſteſſo diametro dell' altro braccio *CCC*. L'eſtremità di queſto braccio *DD* giugne quaſi fino a radere il fondo *PP* del vaſe *AA*, non lo tocca però, poichè è da quellò diſtante un quarto di linea franceſe. L'altro braccio *CCC* continua cilindrico per quaſi tutta la ſua lunghezza, eſce dal fondo *PP*, e ſi ſcarica nell' imbuto *K* che or ora deſcriverò.

Al diſopra del coperto *TT* evvi ſtabilmente fiſſato un altro tubo di criſtallo *OO* di un diametro maggiore del vaſe *AA*. Queſto ha lateralmente una fineſtra *B* per ricevere le due leve oſſia aſte orizzontali *QQ* *YY*, e i pezzi che loro appartengono.

La *fig.* 4 della *tav.* 2. rappreſenta la ſezione oſſia ſpaccato di queſto vaſe Iometrico, e dimoſtra che il braccio *DD* del ſifone *DDCCC* non arriva a toccare il fondo *PP*, che la ſommità della curvatura del ſuddetto ſifone entra nella groſſezza del coperto *TT*, in cui evvi eſpreſſamente una picciola cavità per riceverla, che il tubetto sfiatatore *SS* è aperto a forma di cono nel vaſe *AA*, e che finalmente nel mezzo del coperchio *TT* evvi un foro circolare *Y*.

Nelle due laſtre orizzontali *HH* del telajo *HGHG* (vedi *fig.* 2 *tav.* 1, e *fig.* 2 *tav.* 2) vi ſono due fineſtre quadrangolari *S*, *T*, nelle quali ſcorre un' aſta quadrangolare *LL* ſimile in tutto all' aſta *MM* ſolo che è alquanto più lunga. Affinchè i movimenti di queſta aſta ſieno liberi e facili, eſſa pure ha applicato quattro rotelle *P*, *P*, ecc. come l' aſta *MM*.

Sul piano dell' eſtremità ſuperiore di queſta aſta *LL* è fiſſata con una vite W un' aſta orizzontale *XX*, che da una parte ha attaccato un porta-matita *K*, e dall' altra porta un tubetto d'ottone *F*, dentro il quale ſi move un'aſta cilindrica *I* che termina in un guancialetto di pelle *L*. L'aſta *I* è attaccata ad una molla ſpirale che la ſoſtiene, come ſi vede nella ſezione di queſto tubetto rappreſentata nella *fig.* 3 della *tav.* 2. In vece della molla ſpirale ſi può fiſſare ſul piano dell'aſta orizzontale *XX* una molla *OO* (*fig.* 10 *tav.* 2), ed attaccare ad eſſa l'aſta cilindrica *I*, poichè queſta molla *OO* fa le veci della molla ſpirale contenuta nel tubetto *F*.

Oltre a ciò l'aſta *LL* ha inferiormente un'aſta d'ottone *FF* verſo l'eſtremità un poco piegata acciocchè il mezzo dell'imbuto *KK* ad eſſa attaccato corriſponda al mezzo della groſſezza dell' aſta quadrangolare *LL*. Il peſo dell'aſta *LL* e di tutti i pezzi che le ſono anneſſi è ſoſtenuto da una molla ſpirale *SS* ſimile a quella che ſoſtiene l'altra aſta *MM*. Anche per queſta aſta *LL* la forza della molla *SS* deve eſſere tale che l'eſtremità della matita *K* ſia tenuta diſtante dalla tavola circolare *AA* circa di due linee parigine.

A miſura che l' acqua pel foro *V* cade nel vaſe *AA* l' aria in eſſo contenuta eſce pel tubo sfiatatore *SS*, e intanto l'acqua va a poco a poco inalzandoſi, e giunta che ſia raſente la linea punteggiata *XX* (*fig.* 4. *tav.* 2) il ſifone tantalo *DDCCC* in pochi ſecondi vota il vaſe *AA*, poichè giunta l' acqua alla ſuddetta linea *XX*, l' altra acqua che ſopravviene non trovando altro ſpazio da occupare fuori che il picciolo ſpazio cilindrico che forma il foro *V* fatto nel coperchio *TT*, in eſſo s' inalza, e baſta il peſo della picciola colonnetta d' acqua contenuta nel foro *V* per obbligare il ſifone *DDCCC* a vuotare il vaſe *AA*; e ſiccome anche nelle pioggie minutiſſime un tale ſpazio *V* appena arrivata che ſia l' acqua nel vaſe *AA* alla linea punteggiata *XX* in meno di un minuto ſecondo è riempiuto; perciò ſenz' altro ſi può aſſerire che toſto che l' acqua è arrivata alla linea *XX* il ſiſone *DDCCC* voterà il vaſe *AA*.

Se la curvatura del ſiſone *DDCC* invece di eſſere incaſſata nella groſſezza del coperchio *TT* toccaſſe ſoltanto il piano inferiore del coperchio *TT* o foſſe da quello diſtante di una qualche linea, accaderebbe che nelle minute pioggie l' acqua che cade nel vaſe *AA* giunta alla ſommità del ſiſone *DDCC* a poco a poco ſtriſciando lungo le pareti intime del ſiſone fluirebbe in goccie continue dal braccio più lungo *CC*, e continuando a piovigginare il vaſe *AA* mai non ſi voterebbe, ed allora ſoltanto ſi voterebbe quando la pioggia foſſe abbondante, poichè l' acqua in un tal caſo s' inalza toſto al diſopra della ſommità della curvatura del ſiſone *DDCC*, e forma al diſopra di eſſa una ſenſibile colonna d' acqua baſtevole a forzare il ſiſone *DDCC* a vuotare il vaſe *AA*.

L' acqua che ſcarica il ſiſone *DDCC* cade nell' imbuto *K*, e col ſuo peſo tira all' ingiù ed abbaſſa l' aſta *LL*. Il guancialetto *L* attaccato all' eſtremità dell' aſta orizzontale *XX* al momento che ſi abbaſſa l' aſta *LL* ermeticamente chiude il foro *V*, e non permette quindi che la pioggia che cade durante il fluſſo del ſiſone *DDCC* entri nel vaſe *AA*, e l' obbliga a raccoglierſi nel vaſe ſuperiore *OO*. Oltre il guancialetto *L* coll' abbaſſamento dell' aſta *LL* ſi abbaſſa anche la matita *K* attaccata all' altra eſtremità dell' aſta orizzontale *XX*, e ſta appoggiata ſulla zona *BB* della tavola circolare *AA* fino a tanto che l' imbuto *K* ſia ripieno d' acqua.

Ceſſato il fluſſo del ſiſone *DDCC* il vaſe conico *K* è toſto votato dal ſiſone *OO*, e la molla ſpirale *SS* non aggravata dal peſo dell' acqua contenuta nel vaſe conico *K* eleva alla primiera altezza l' aſta quadrangolare *LL*, e ſeco la matita *K* ed il turacciolo *L*. L' acqua piovuta nel tempo che il foro *V* è ſtato chiuſo dal turacciolo *L*, e che ſi è raccolta nel vaſe *OO*, toſto che il turacciolo *L* s' inalza, e ſchiude il foro *V*, entra ſubito nel vaſe Iometrico *AA* ed ivi s' inalza: continuando la pioggia l' acqua ſi eleva nel vaſe *AA*, e finalmente di bel nuovo giugne alla linea punteggiata *XX*; allora il ſifone *DDCC* novamente vota il vaſe *AA*. L' acqua che ſcarica il ſifone *DDCC* cade nel vaſe conico *K*, abbaſſa l' aſta *LL*, e di bel nuovo il turacciolo *L* chiude il foro *V*, e la matita *K* ſi appoggia ſulla tavola circolare *AA*. Queſto giuoco ogni volta ſi ripete che il vaſe *AA* ſi vuota, e ad ogni votamento la matita *K* appoggia ſulla tavola circolare *AA* e la ſegna laſciando un ſenſibile punto bianco ſulla zona nera *BB*. Perciò ogni punto bianco che ſi troverà ſegnato ſulla zona *BB* indicherà un votamento del vaſe *AA*, talchè ſe per cagion di eſempio il vaſe *AA* ſi è votato 10 volte nell' ora 21, nello ſpazio della zona *BB* corriſpondente ad una tal ora ſi troveranno ſegnati dieci viſibili punti bianchi.

Nell' Iometrografo che io ho fatto coſtruire per le mie oſſervazioni Metereologiche la capacità del vaſe *AA* è preciſamente eguale ad $\frac{1}{3}$ di linea d' acqua che piova nel vaſto imbuto *AA*, onde ſe nell' ora 21 ſi trovano ſegnati dieci punti, queſti eſprimeranno 10 terzi di linea oſſia tre linee ed un terzo d' acqua piovuta in una tal ora nell' imbuto *AA*. Potrebbe baſtare il portare la preciſione dell' oſſervazione della quantità dell' acqua piovuta ad un terzo di linea, pure adattando a fianco del vaſe *AA* una ſcala *NN* che divida tutta l' altezza del vaſe *AA* in 100 parti eguali, ſi potrà avere la quantità dell' acqua dentro la preciſione di $\frac{1}{300}$ di linea, ciò che è più del biſogno.

Egli è chiaro altresì che quaſi nulla è l' evaporazione dell' acqua che ſi miſura, poichè a miſura che l' acqua piove eſſa è miſurata da queſta macchina, e quella che rimane nel vaſe *AA* non può ſvaporare ſtante che l' acqua contenuta nel vaſe *AA* non comunica coll' aria eſterna ſe non per l' anguſtia del foro *V* e dello sfiatatore *SS*; ed è chiaro altresì che la miſura della quantità della pioggia che cade di ora in ora deve riuſcir eſattiſſima, poichè qualora il ſifone *DDCC* abbia le dimenſioni ſovraindicate immancabilmente arrivata che ſia l' acqua alla linea punteggiata *XX* voterà il vaſe *AA*.

Diſſi, purchè il ſifone *DDCC* abbia le dimenſioni ſovraindicate, poichè ſe invece di fare la gamba più corta *DD* di un diametro di 4 linee ſi faceſſe di ſole due linee e mezzo, molte volte accaderebbe che il vaſe Iometrico *AA* ſi voterebbe prima che l' acqua giunga alla linea *XX*. Poichè eſſendo il tubo *DD* di un tal diametro, dopo che il ſifone *DDCC* ha votato il vaſe *AA* qualche porzione d' acqua reſta tuttavia ſoſpeſa nel tubo *DD*; perciò ſopravvenendo nuova acqua nel vaſe *AA*, queſta colonnetta d' acqua ſoſpeſa nel tubo *DD* a poco a poco s' inalza alla curvatura del ſifone *DDCC*, e vi perviene prima che l' acqua giunga alla linea punteggiata *XX*; conſeguentemente il vaſe *AA* ſi voterà ora ad un' altezza ed ora ad un' altra dell' acqua in eſſo contenuta ſecondo che maggiore o minore ſarà la lunghezza della colonnetta d' acqua ſoſpeſa nel tubo *DD*. Un tale inconveniente ſi evita facendo il braccio più corto *DD* del ſifone *DDCC* di un diametro di 4 linee, poichè in un tal tubo l' acqua non può ſtarvi ſoſpeſa per eſſere la gravità di una comunque picciola colonnetta d' acqua maggiore dell' attrazione del vetro coll' acqua.

L' aſta *I* a cui è attaccato il turacciolo *L* appartiene ad una molla ſpirale acciocchè chiuda eſattamente il foro *V* al momento che è cominciato il fluſſo del ſifone *DDCC* ſenza impedire che la matita *K* appoggi ſulla zona *BB* della tavola circolare *AA* anche nel caſo che la ſuddetta matita ſi puntaſſe, poichè il peſo dell' acqua che cade nell' imbuto *AA* ſupera di gran lunga la reſiſtenza della molla ſpirale contenuta nel tubo *I*; ed abbaſſa l' aſta quadrangolare *LL* fino a tanto che il turacciolo *L* chiuda ermeticamente il foro *V*, e che la matita *K* appoggi ſulla zona *BB*.

Ho fatto adattare ſul piano ſuperiore del coperchio *TT* una valvola d' ottone coperta di una pelle. Una molla d' ottone tiene ſollevata queſta valvola dal piano *TT* acciocchè l' acqua poſſa liberamente entrare pel foro *V* nel vaſe *AA*. Ma al momento che il vaſe *AA* è votato dal ſifone *DDCC* la ſuddetta valvola viene abbaſſata dal turacciolo *L*, che appoggiando ſulla valvola la comprime contro il piano ſuperiore del coperchio *TT*. Ceſſato il fluſſo del ſifone, il turacciolo *L* s' inalza coll' aſta quadrangolare *LL*, e la molla attaccata alla valvola inalza la valvola ed apre il foro *V* del coperchio *TT*.

L' artificio di queſta valvola è forſe migliore dell' altro che poc' anzi ho deſcritto, poichè ſe il guancialetto *L* (*fig.* 3 *tav.* 2) non è ben fatto, non ſempre abbaſſandoſi ed appoggiando ſul foro *V* ermeticamente lo chiude; laddove la valvola per eſſere piana, e coperta di una pelle immancabilmente abbaſſandoſi ſul piano del coperto *TT* toglie ogni comunicazione fra il vaſe *AA* ed il pezzo ſuperiore di tubo *OO*.

Una tavola ſimile a quella che ſerve per regiſtrare i riſultati del Croniografo egualmente ſerve pel regiſtro di quelli che dà l' Iometrografo, poichè ogni punto che la matita *K* ſcrive ſulla zona annerita *BB* rappreſentando un terzo di linea di acqua che è piovuto nell' imbuto *AA* (*fig.* 9. *tav.* 2), ſi potrebbe per ogni punto che ſi trova ſegnato in ciaſcun' ora ſcrivere ſulla tavola nella caſella corriſpondente a ciaſcun' ora un terzo di linea. Ma ſiccome molte volte accade che per eſempio il vaſe Iometrico *AA* (*fig.* 2 *tav.* 1) non ſi vuota in tre o quattro ore ſe non una ſola volta, e che la pioggia nella prima di queſte ore non durò che per ſoli 15 minuti, nella ſeconda per ſoli 10′, e nella terza 20′, perciò in un tal caſo io ſoglio riſguardare la pioggia come ſe foſſe ſtata uniforme in tutto il tempo in cui è piovuto, e riparto il terzo di linea di pioggia caduta nei tempi ſuddetti proporzionatamente ai numeri ſovraindicati 15, 10, e 20. Dividendo quindi il terzo di linea in 100 parti per li primi 15′, ſi ſcriverà nella caſella il n°. 34 cioè $\frac{30}{100}$ di un terzo di una linea, per li 10′ ſi ſcriverà $\frac{22}{100}$, e per li 20′ $\frac{44}{100}$.

La tavola della quantità della pioggia caduta nel meſe di Agoſto renderà più chiaro gli uſi della medeſima, e la di lei inſpezione dimoſtrerà meglio come ſi poſſa facilmente con eſſa determinare la quantità dell' acqua che cade di giorno in giorno, di ora in ora ecc. quali ſieno ſtate le ore in cui ſia caduta una maggiore copia d' acqua, ſe maggiore ſia la quantità dell' acqua che piove di notte che di giorno ecc.

* * *

RICERCHE

AGOSTO

Quantità della pioggia

Mem. della Società Italiana Tomo I. pag. 224

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	*Somma dei trecentesimi in ciascun giorno.*
1																									
2																									
3					300	400	60	100	40							135									1035
4			60	100																					160
5		300	135																						435
6																									
7																									
8																									
9																									
10																									
11																									
12																									
13																								130	130
14	300	600	150	60																					1110
15																				1800	2700	1200	100		5800
16	9200	640																							9840
17																									
18																									
19														50	60	30	50		20			50			260
20																			1100	600	100				1800
21																									
22																									
23																									
24																									
25																									
26																									
27																									
28																									
29																									
30																									
31																									
Somma dei trecentesimi in ciascun' Ora.	9500	1540	345	160	300	400	60	100	40					50	60	165	50		1120	2400	280	1250	100	130	20570

163

15140

1805

12605

315

7850

AGOSTO

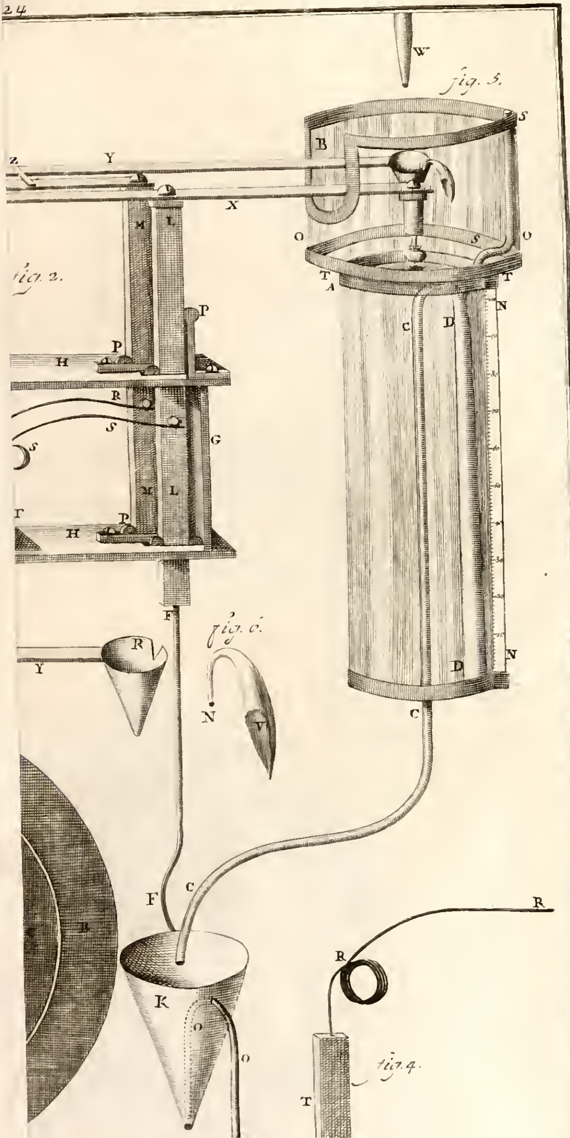
Durata della pioggia 1781.

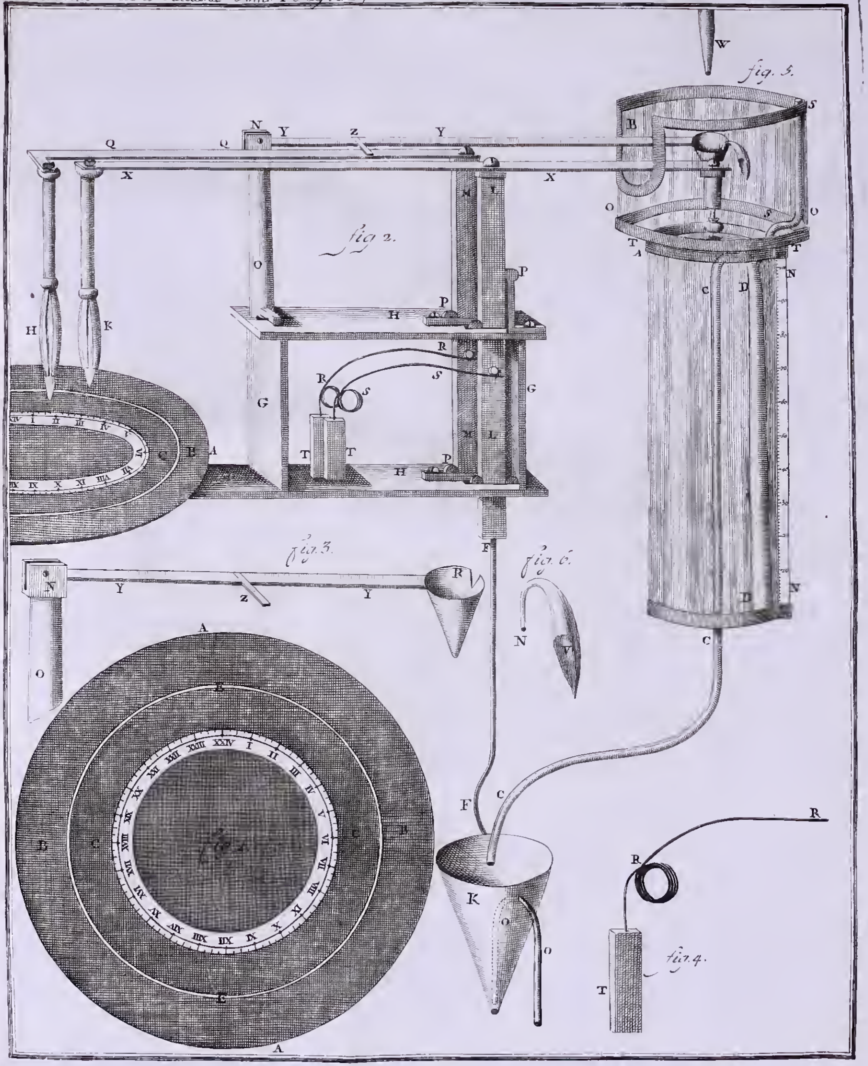
Agosto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	*Somma dei minuti in ciascun giorno.*	
1																										
2																										
3					15	25	10	15	5							5									75	
4			30	40																					70	
5		25	50																						75	
6																				5					5	225
7																										
8																										
9																										
10																										
11																										
12																										
13																								15	15	
14	60	60	20	10																					150	
15																				40	60	60	15		175	
16	60	55																							115	610
17																										
18																										
19														60	60	15	10		5			5			155	
20																			45	60	5				110	
21			5	60	60	40	25	55		60	60	60	20	25											470	580
22																										
23																										
24																										
25																										
26																										
27																										
28																										
29																										
30																										
31																										
Somma dei minuti in ciascun' Ora.	120	140	105	110	75	65	35	70	5	60	60	60	20	85	60	20	10		50	105	65	65	15	15	1415	

720 | 370 | 325

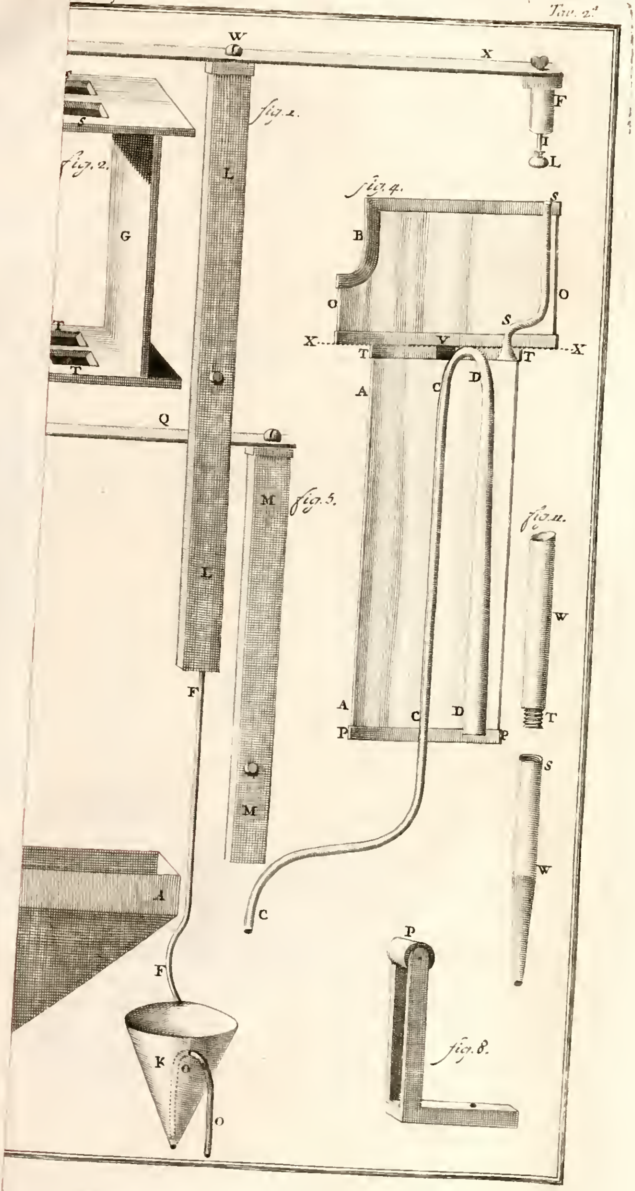
24

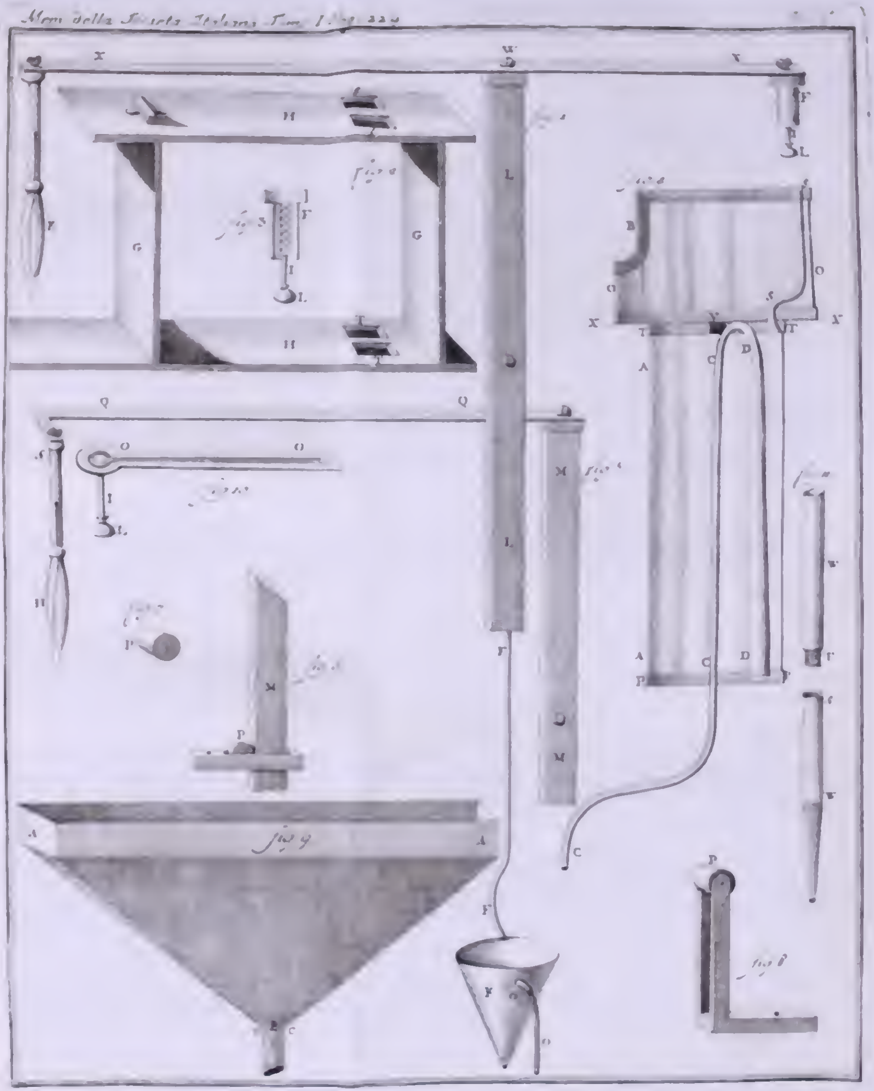
Tav. 1.a


W
fig. 5.
S
B
Z
Y
X
M
L
O
S
O
T
A
T
N
C
D
fig. 2.
P
P
H
R
S
S
G
M
L
T
P
H
F
fig. 6.
R
Y
N
V
D
N
C
C
F
B
R
R
K
O
O
fig. 4.
T


W
fig. 5.
S
N
Q
Y
Z
Y
Q
X
X
B
M
L
O
S
O
fig 2.
T
A
T
P
N
C
D
O
H
P
H
K
R
R
S
S
G
G
T
T
P
H
M
L
C
B
A
F
fig. 3.
N
Y
Z
Y
R
fig. 6.
N
V
D
N
C
A
E
O
XXIV
I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI
XII
XIII
XIV
XV
XVI
XVII
XVIII
XIX
XX
XXI
XXII
XXIII
D
C
C
B
F
C
E
A
K
O
O
R
R
fig. 4.
T

Tav. 2.


W
X
F
I
L
fig. 1.
L
L
fig. 2.
S
G
T
T
fig. 4.
S
B
O
O
S
X
V
X
T
T
A
C
D
A
C
D
P
P
Q
fig. 5.
M
M
F
fig. 11.
W
T
S
W
A
C
F
K
O
O
P
fig. 8.


X
D
Y
F
H
G
G
L
F
B
O
O
X
T
V
S
T
X
A
C
D
H
Q
Q
O
O
I
L
L
M
H
P
M
P
A
C
D
P
D
M
fig. 9
A
A
C
C
F
F
P
fig. 8

RICERCHE

ED

OSSERVAZIONI SOCIALI

Fatte per perfezionare il Barometro.

Del Sig. PIETRO MOSCATI Regio Profeſſore,

e Sig. Cavaliere MARSILIO LANDRIANI.

NOnoſtante le immenſe, e laborioſe ricerche del celebre Signor de *Luc*, per determinare le cagioni, per le quali i barometri nello ſteſſo luogo non ſi tengono ad una eguale altezza, e per trovare i mezzi per conſeguire dei barometri, che aveſſero la qualità di tenerſi ad una altezza eguale; pure quando ſi è voluto accuratamente eſtimare la riſpettiva altezza dei barometri fabbricati in diverſi paeſi, ſebben fatti con tutte le cautele, ed avvertenze preſcritte dal Sig. de *Luc*, ſi è trovato, che il più delle volte queſti differivano fra di loro ſenſibilmente, e che queſta loro differenza non ſolo non era ſempre coſtantemente la medeſima; ma perfino quel barometro, che per alcuni meſi ſi era tenuto coſtantemente più alto dell'altro, dipoi ſi teneva coſtantemente più baſſo, ſiccome fu oſſervato dall'illuſtre, ed eccellente Fiſico il Cav. *Shuckburgh* (*). Per-

---

(*) Vedi Mem. del Cav. *Shuckburgh*, *Sperienze ed oſſervazioni fatte in Savoja ecc.* inſerita nelle Tranſazioni Filoſofiche vol. 65.

ciò chiunque ha voluto far uſo di queſti iſtromenti per eſperienze delicate ha dovuto ſempre prima d' intraprendere le oſſervazioni determinare, e tener conto delle riſpettive differenze nelle altezze dei barometri adoperati; ed il celebre Sig. *Magellan* (*) per evitare l' incomodo di queſta deduzione ha conſigliato di ſituare il nonio del barometro, che ſi tiene più baſſo, al medeſimo grado marcato dall' altro barometro; e quando ſi trattò di ſperienze di confronto fatte in paeſi lontani ſi è ſempre dovuto partire dalla gratuita ſuppoſizione, che i barometri adoperati aveſſero a tenerſi ad un' altezza eguale, qualora foſſero portati nello ſteſſo luogo. Alcuni altri ancora hanno oſſervato, che il barometro appena poſto in eſperienza non indica ſubito il vero e preciſo peſo dell' aria; ma che per avere la vera e giuſta altezza conviene aſpettare ed oſſervare il barometro, ſecondo alcuni un quarto d' ora, e ſecondo che vogliono altri una buona mezz' ora, conſigliando di più a dare delle picciole ſcoſſe ed urti al barometro per obbligare il mercurio a ſtaccarſi dalle pareti del tubo, che lo attraggono.

Molte altre anomalie ancora ſi ſono oſſervate in queſto genere di ſperienze, per le quali taluno ſcoraggiatoſi ha amato meglio di rigettare queſto iſtromento come inefficace per l' oggetto, a cui voleváſi farlo ſervire, la miſura cioè delle altezze, che d' indagare da quali cagioni mai derivar poteſſero queſte differenze, e quali foſſero i mezzi più opportuni per rimediarvi.

Noi non crediamo di eſſere pienamente riuſciti, meno poi di aver eſaurito queſta materia; ma ci luſinghiamo che ora, che tanti illuſtri Fiſici del primo ordine ſi ſono occupati, e ſi occupano sì utilmente di

---

(*) Diſſertation ſur les Barometres nouveaux. pag. 105.

ſperienze barometriche, e che non ſolo ſi penſa a far ſervire queſto utile iſtromento alla miſura delle grandi ma anche delle picciole altezze, che le ſperienze, che noi abbiamo fatte, non abbiano ad eſſere riguardate come ſterili e vane ricerche; ma che eſſe poſſano ſicuramente contribuire alla perfezione ed al miglioramento di un così utile iſtromento; eſſendo i riſultati della maggior parte di queſte noſtre ſperienze del tutto nuovi, ed oſiamo dire, di una non mediocre importanza.

Prima d'indicare i diverſi articoli di ricerca, dei quali il Sig. Profeſſor *Moſcati* ed io ci ſiamo occupati, è neceſſario di premettere la deſcrizione dell'apparato da noi uſato per queſte ſperienze, e che noi chiamiamo *Barometro di prova*, appunto per aver con eſſo eſaminato d'onde procedere poteſſero le anomalie oſſervate nelle ſperienze barometriche.

Fig. 1 *KK* è una tavola di legno ſcottata, ed eſſiccata al forno, quindi ancora molto calda unta d'olio, che nuovamente ſi fa aſciugare nel forno, affine di renderla immobile anche ad un forte calore della ſtuffa. Eſſa è lunga pollici 46, larga 5, e groſſa circa 10 linee, ed ha due feſſure oſſia fineſtre bislunghe *SS*, *OO*, ambedue larghe circa 8 linee; ma la *SS* ha circa 17 pollici di lunghezza, mentre l'inferiore *OO* non ne ha che circa quindici. Sopra queſta tavola ſta per mezzo di due collari d'ottone *BB* fermati con viti incaſſata la canna barometrica *ACD*, lunga eſſa pure 46 pollici, e curvata in *C* a forma di ſifone.

La parte rivoltata di queſto tubo è circa di 4 pollici; due pollici formano la curvatura, gli altri due pollici s'inalzano paralleli al tubo più lungo *AC*, ed entrano per circa un mezzo pollice nella coda di un pozzetto di criſtallo *E*, la di cui capacità, e lunghezza ſono arbitrarie. L'eſtremità di queſto tubo rivoltato penetra circa ad un terzo della cavità sferica del pozzetto *E*, il quale ha lateralmente un tubulo, in cui è con maſtice adattato un bocchino di ferro, che ſi chiude colla vite *F* pure di ferro. L' apertura ſuperiore di queſto pozzetto (come ſi vede dalla figura 2, nella quale è diſegnato ſeparatamente il pozzetto *E*) è ſvaſata, anzi termina in un vero imbuto, perchè venendo per qualche accidente a ſmoverſi la canna *PP*, che ſi adatta nel collo di queſto imbuto, il mercurio in eſſa contenuto non abbia a ſpanderſi per terra. Altronde ſiccome in queſto imbuto ſi ſono frequentemente cangiate le canne *PP* nelle ſperienze, che faremo per riferire, queſte ſi poſſono con molta facilità adattare con cera, e la figura d'imbuto è molto opportuna a queſto effetto. L'eſtremità ſuperiore della canna *ACD* ripoſa in un incavo fatto nella tavola coperto di una doppia pelle; la parte curvata *CD* della ſuddetta canna non meno, che il pozzetto *E*, e tutta la canna al diſotto dell'apertura *SS*, ſono incaſſate per la metà della loro groſſezza nella tavola *KK*, e ſono con opportuno cemento ſu quella aſſicurate.

A fianco della canna *ACD* ad una certa diſtanza è fiſſata la ſcala d'ottone *NN*, ſotto alla quale evvi un rocchetto, che s'incaſtra in una ſega dentata, mediante la quale ſi può con ſomma facilità inalzare, od abbaſſare una lunga riga d'ottone *TT*, che ſcorre ſulla laſtra piana d'ottone *NN*, ſu cui ſono le diviſioni in pollici linee ecc., e che è attaccata con viti alla ſottopoſta ſega dentata. Il lembo di queſta riga ſcorrevole d'ottone *TT* per quella parte, che guarda le diviſioni fatte ſulla ſcala d'ottone *NN*, è fatta a ſmuſſo, e ſullo ſmuſſo ſono inciſe le diviſioni di due nonj.

Queſta riga d'ottone *TT*, che ſi move colla ſega dentata, è lunga circa 30 pollici, perchè avendo alle due ſue eſtremità attaccati due anelli *H*, *L*, per mezzo di due ſolide code d'ottone ſi può coll'anello inferiore *L* ſcorrere tutta la canna *PP*, e coll' anello ſuperiore *H* percorrere la canna barometrica *ACD* da *S* in *S*. La figura 6 rappreſenta in grande l'anello *H* che attaccato per mezzo della coda *M* alla riga *TT* ſcorre ſulla canna *AC*, e la figura 5 eſprime l'altro anello più grande *L* fiſſato all'eſtremità della riga *TT*.

Il lembo tagliente di ciaſcuno di queſti anelli deve eſſer tale, che preciſamente corriſponda allo zero della diviſione dei due nonj fatti ſullo ſmuſſo della riga *TT*; di più è neceſſario, che queſti anelli ſieno più larghi della canna ſu cui ſcorrono, maſſime l'inferiore *L*, il quale ha circa 8 in 9 linee di diametro, acciocchè poſſa ſcorrere ſopra canne di 4 e più linee di diametro adattabili nell'imbuto del pozzetto *E* in vece della canna *PP*.

Per muover poi la ſega dentata ſottopoſta alla ſcala *NN* l' albero del rocchetto, che incontra i denti della ſega, penetra la groſſezza della ſcala *NN*, ed è ſormontato da un bottone incatramato d'ottone *R*, mediante il quale con tutta facilità ſi ſanno muovere il rocchetto, e la ſega ſottopoſti.

Qualora vogliaſi mettere in eſperienza queſto apparato conviene ſoſpenderlo in una poſizione verticale; e ſituarlo in modo, che la luce ſia al di dietro della tavola. Ciò fatto ſe ſi voglia per cagion d'eſempio determinare di quanto ſi accreſca l'altezza barometrica coll'ingrandimento del vuoto, ſi ſitua l'anello inferiore *L* in modo che lo zero della diviſione del ſuo nonio eſattamente corriſponda al principio della diviſione della ſcala *NN*; indi ſi verſa nella canna *PP* tanto mercurio, quanto baſta perchè il colmo della colonna mercuriale rada preciſamente il lembo tagliente dell'anello *L* (*), facendo allora girare il bottone *R*, ſi fa

---

(*) Nella figura 7 è rappreſentato il contatto del lembo dell'anello L colla ſommità della curva mercuriale.

inalzare l'anello *H* fino a tanto che egli pure tocchi col ſuo lembo tagliente l' apice della curva ſuperiore della colonna mercuriale inalzata nella canna *ACD*, e ſi nota ſopra una carta la diſtanza che evvi fra l' apice della curva, dirò così, mercuriale del tubo *PP* e quella del tubo *ACD*. Ciò determinato ſi ſitua l'anello *H* inferiore in modo, che lo zero del ſuo nonio coincida col primo pollice della ſcala *NN*. In un tal caſo per diminuire il vuoto nella canna *ACD* di un pollice, conviene verſare nella canna *PP* del mercurio fino che l'apice della curva mercuriale tocchi il lembo dell'anello *L*, indi s' inalza l'anello *H*, e ſi miſura come nella prima ſperienza la diſtanza fra l'apice della curva inferiore e quello della curva ſuperiore: la differenza, che ſi troverà fra la diſtanza avuta nella prima ſperienza, quando ſopra la colonna mercuriale vi erano 16 pollici di vuoto, e quella che ſi è trovata nella ſeconda ſperienza, in cui non vi erano che ſoli 15 pollici di vuoto, ſarà intieramente dovuta al pollice di meno di vuoto, che era ſopra la colonna mercuriale, purchè la canna *ACD* e la canna *PP* ſieno di un diametro uniforme; poichè ſe il loro diametro nelle lunghezze *SS*, *PP* non foſſe uniforme, ſi potrebbe attribuire la maggiore o minore altezza oſſervata alla differenza de' diametri.

Simili avvertenze ſi debbono avere quando ſi fanno delle ſperienze ſulle differenze de' diametri, delle canne della diverſa attrazione, delle differenti ſpecie di vetro e ſimili.

Qualora poi ſi vogliano aver delle canne, che abbiano un diametro eguale, oppure ſi voglia eſplorare, ſe una canna ſia, o no perſettamente cilindrica, rigettati tutti gli altri metodi propoſti ne' diverſi Trattati ſopra i barometri, come inſufficienti ed ineſatti, noi crediamo che il migliore di tutti, ed inſieme il più facile ſia quello che noi abbiamo ſeguito.

La tavola deſcritta *KK* non è tutta di una eguale larghezza in tutta la ſua lunghezza, poichè verſo la metà della ſua altezza vicino alla ſcala *NN* è tagliato un pezzo della medeſima della larghezza circa di $\frac{1}{4}$ di pollice, come ſi vede nella figura 1. Alle due eſtremità di queſto taglio ſono fiſſati orizzontalmente due groſſi anelli d'ottone (*), nella groſſezza di ciaſcuno dei quali vi ſono tre lunghe viti XXX, che ſervono a comprimere, ed a trattenere ſortemente qualunque canna WW, che venga inſerita fra gli anelli ſuddetti. Situata in queſto modo immobilmente, e verticalmente negli anelli, e colle viti la canna WW, ſi verſa in eſſa un poco di mercurio, e coll'anello *V* ſi determina l'elevazione della curva della picciola colonna di mercurio verſata nel tubo WW; indi per avere delle quantità preciſamente eguali in miſura di mercurio ſi prende il tubo a chiave *AB* di criſtallo (vedi *fig.* 3), il quale è ſimile agli altri ſolo che in vece di avere tutta la chiave *C* penetrata da un foro cilindrico, il foro di queſta chiave non penetra che a ſoli due terzi della groſſezza della chiave. Queſto foro conico continua anche nel pezzo quadro, in cui gira la chiave, anzi ſi va notabilmente allargando, formando una ſpecie d'imbuto. La figura 5 rappreſenta lo ſpaccato di queſto tubo a chiave con entro la chiave *C*. *AB* è il pezzo quadro; *CC* la chiave del tubo; *V* il foro conico a forma d'imbuto; ed *I* la continuazione dello ſteſſo foro nella chiave *CC*. *S* poi è un foro cilindrico, che penetra tutta la groſſezza del pezzo quadro *AB*. Voltata pertanto la chiave *C* in modo, che il foro *I* della medeſima formi un ſolo foro col foro *V* del pezzo quadro *AB*, ſi riempie di mercurio tutta la cavità conica *VI*, e facendo girare la chiave *C* ſi taglia, e ſi ſepara dal rimanente il mercurio contenuto nel fo-

---

(*) Si vede uno di queſti anelli diſegnato più in grande nella fig. 8.

ro *I* della chiave *C*, e ſi continua a volgere la chiave ſino a tanto che ſi arriva a fare comunicare il foro *I* della chiave col foro cilindrico *S* del pezzo quadro.

Ora la quantità del mercurio contenuto nella chiave, e tagliato in queſto modo, ſarà ſempre una quantità coſtante in miſura, la quale, ſe verſata in una canna cilindrica W, deve formare in qualunque ſtato della medeſima canna un'altezza coſtante; ma ſe la canna W ſi va allargando all'in ſu, la ſeconda miſura di mercurio in eſſa verſata occuperà un minore ſpazio di quello occupato dalla prima miſura; tutto il contrario ſuccederà, ſe la canna W in vece di allargarſi ſi riſtringa; l'anello *V*, che ſcorre ſulla canna W per mezzo della ſega, e del rocchetto *R*, poichè è attaccato ſolidamente con viti alla riga d'ottone *TT*, miſurerà la lunghezza, che acquiſtano le ſucceſſive miſure eguali di mercurio verſate nella canna W, di cui vogliaſi miſurare il calibro.

Siccome noi abbiamo con queſto mezzo miſurate molte canne, che con qualunque altro conoſciuto metodo ſi ſarebbero giudicate perfettamente cilindriche, ed abbiamo trovato, che pochiſſime reſiſtono a queſta prova; e ſe vene ſono che ſieno tali, non lo ſono che per lo ſpazio di pochi pollici; perciò quando le differenze nel diametro nelle diverſe parti delle canne non ſono grandiſſime, nè eccedono $\frac{1}{12}$ di linea, noi ſogliamo riſguardarle come buone, poichè facendo una tavola eſatta di queſte differenze, quando ſi voglia ſervirſi di una di queſte canne per un barometro, o per qualunque altro iſtromento, che eſigga una canna, che ſia perfettamente cilindrica, tenendo conto, e computando le differenze notate nella tavola, ſi arriva ad aver dei riſultati di una eguale preciſione a quelli, che ſi ſarebbero avuti adoperando una canna perfettamente cilindrica.

Noi

Noi abbiamo diſtinti i diverſi articoli di ricerca, de' quali ci ſiamo occupati, in differenti paragrafi; perchè qualora ſi aveſſe voluto dare un trattato completo delle cagioni, che contribuir poſſano a fare che i barometri non ſi tengano ad un' altezza eguale poſti nel medeſimo luogo, ſaremmo ſtati coſtretti a riportare, e ripetere tutto ciò, che è ſtato detto, e pubblicato dagli altri; onde per amore della brevità abbiamo creduto che foſſe miglior partito quello di dividere gli articoli delle noſtre ſperienze in varj diſtinti paragrafi.

§. I.

Del mercurio, che ſi deve adoperare pei barometri.

Ognuno ſa, che difficilmente ſi può avere del mercurio, che ſia totalmente ſgombro di materie ſtraniere, che ne alterano la di lui purezza, e conſeguentemente la di lui ſpecifica gravità. La maggior parte de' mercurj, che ſono in commercio, contengono del biſmut, qualche volta del piombo, e dello ſtagno. Quello delle miniere d'Idria, ſciolto nell'acido nitroſo, diviene leggiermente lattiginoſo, verſando nella ſoluzione dell' acqua diſtillata, appunto perchè il biſmut ſi ſtacca dall' acido, e ſi precipita ſotto forma di magiſtero. Ciò nonoſtante queſto è un mercurio di ottima qualità.

Colla ſublimazione, e colla diſtillazione difficilmente ſi può togliere al mercurio il metallo ſtraniero in quello diſciolto.

La calce nera qualche volta interſperſa di un pulviſcolo giallo, che ſi forma agitando lungamente il mercurio, oppure triturandolo, non è gia prodotta, come alcuni penſano, dai metalli miſti col mercurio, che nella triturazione ed agitazione ſi ſtaccano; ma queſto pulviſcolo è una ſpecie di precipitato perflogiſticato, oſſia una calce mercuriale combinataſi coll' acido dell' atmosfera flogiſticato. Di fatto queſta calce è fornita anche dai mercurj, che non contengono punto alcun metallo ſtraniero.

Il filtrarlo per un cono ſottiliſſimo di carta, o per una pelle, può in alcuni caſi giovar a ſeparare porzione dei metalli miſti col mercurio, quando queſti ſieno in notabile quantità; ma non mai ſi arriverà con queſto mezzo a depurarlo interamente.

Alcuni pretendono, che ſiccome lo ſpirito di nitro ha una maggiore affinità col biſmut, che col mercurio, ſi poſſa collo ſpirito di nitro ſeparare tutto il biſmut contenuto nel mercurio. Ma chiunque conoſce l' arte degli aſſaggi, facilmente con noi converrà, che ſebbene una porzione del biſmut ſia con queſto mezzo ſeparabile, ve ne rimane tuttavia ſempre una notabile porzione inattaccata dall' acido nitroſo.

Siccome per le ſperienze barometriche è neceſſario di conoſcere la gravità ſpecifica del fluido, che ſi adopera per miſurare il peſo dell' aria, ed altronde per evitare qualunque incomoda computazione eſſendo molto opportuno il trovar un proceſſo, con cui avere un mercurio di una coſtante gravità ſpecifica, ci ſiamo anche di ciò occupati eſaminando con accurate ſperienze la diverſa gravità ſpecifica dei mercurj, ed indagando il proceſſo, che dia coſtantemente un mercurio di una data gravità ſpecifica.

Un cubo, o cilindro d' oro puriſſimo inverniciato di vernice di gomma copal per impedire, che il mercurio non lo attacchi, ſucceſſivamente peſato nei diverſi mercurj potrebbe dare la differenza delle gravità ſpecifiche dei diverſi mercurj tra la bilancia idroſtatica, non può mai indicare le menome differenze nelle gravità ſpecifiche de' corpi. Buffon nei *Supplementi all' Introduzione alla ſtoria naturale de' minerali* ha fatto oſſervare, che la bilancia idroſtatica non può indicare ſe non quelle differenze nelle gravità ſpecifiche de' corpi, che ſono maggiori della viſcoſità, ed adeſione delle molecole del fluido, in cui vengono peſati i corpi. Ma a ciò ſolo non ſi riſtringe l'imperfezione della bilancia idroſtatica, perchè il corpo peſato nel fluido, oltre all'adeſione delle parti dello ſteſſo fluido che egli deve ſuperare, vincer deve anche il grado d'attrazione, che lo ſteſſo fluido ha col corpo in eſſo peſato. Per eſempio ſi ſupponga per un momento, che i tre metalli l'oro, il rame, ed il cobalto abbiano un'eguale gravità ſpecifica; dico, che la bilancia idroſtatica indicherebbe, che queſti tre metalli abbiano una diverſa gravità ſpecifica, quando nella noſtra ipoteſi è in tutti loro eguale, poichè l'oro, ſecondo le belle ſperienze del Sig. *Morveau* (*), eſſendo attratto dal mercurio con una forza eguale a 446, il rame con una forza eguale a 142, ed il cobalto con una forza eguale a 8; il cubo, o cilindro d'oro immerſo nel mercurio, e ſoſpeſo alla bilancia ſi moverà in quel fluido metallico con maggior difficoltà del rame, ed il rame ſarà ſmoſſo più difficilmente del cobalto nella ſuddetta proporzione di 446, 142, 8; onde per rendere alla bilancia il perduto equilibrio è neceſſario di metter nella coppa tanto di peſo, che non ſolo equivalga all'eceſſo della gravità ſpecifica dell' oro ſopra quella del mercurio, ma anche che ſia equivalente alla quantità dell'attrazione del mercurio coll'oro. E minor eſſendo queſta attrazione del mercurio col rame, e col cobalto, minor peſo ſarà neceſſario di contrapporre nella bilancia per rimettere l'equilibrio (**).

(*) Elements de Chymie de Dyon. Vol. I.

(**) L'eſame delle imperfezioni della bilancia Idroſtatica eſſendo eſtraneo all'oggetto di queſta Memoria ſarà più opportunamente trattato nelle *Lezioni di Fiſica* che farò per pubblicare.

Perlochè noi ci ſiamo appigliati ad altri mezzi più opportuni; e primieramente, ſiccome la gravità ſpecifica de' corpi in parità di volume è come i loro peſi; abbiamo peſato con una bilancia ſenſibile dei volumi eguali di mercurio, ed abbiamo effettivamente trovato, che il mercurio revivificato dal ſublimato corroſivo, e dal cinabro ſono più peſanti di tutti gli altri mercurj venali, e che anche la gravità ſpecifica di queſti mercurj venali è fra loro molto diverſa.

Il mezzo impiegato per avere delle quantità in volume eguali di mercurio è ſtato un tubo a chiave di criſtallo *AB* (*fig.* 4) che ha una chiave *C*, la quale in vece di eſſere traforata da un foro, che penetri tutta la di lei groſſezza ha un ampio foro *I*, che non penetra, che a $\frac{2}{3}$ circa; ſi riempie dunque di mercurio tutta queſta cavità, ed il foro ſvaſato *V* del pezzo quadro del tubo a chiave *AB*; indi col volgere la chiave *C* ſi ſepara la quantità del mercurio contenuto nel foro *I* della chiave *C*, la quale ſarà ſempre una quantità eguale in volume di mercurio. Si peſino dunque ſei, o ſette di queſti volumi eguali di una data ſpecie di mercurio con una bilancia ſenſibiliſſima, e ſi prenda la media de' loro peſi; queſta media ſarà il peſo ſpecifico di quella ſpecie di mercurio.

Si può anche preſcindere dall' uſo di queſto tubo a chiave *AB* per avere delle quantità eguali in volume di mercurio.

Si prenda un tubo termometrico *AA* (*fig.* 11), che abbia ad una delle eſtremità ſoffiata una boccia *B*, e ſi riempia tutto di mercurio, come ſi aveſſe a fare un termometro; ciò fatto col calore ſi faccia montar il mercurio fino all' apertura del tubo, e ſi adatti al tubo un cono di carta *DD* ripieno di mercurio di modo che venendo il mercurio a raffreddarſi nella boccia il tubo abbia ad eſſere perfettamente pieno di mercurio. Di fatto quando il mercurio nella boccia è ridotto ad una certa temperatura, biſogna immergerlo nel ghiaccio, e colà tenerlo immerſo fino a tanto che abbia acquiſtato la temperatura del ghiaccio: allora ſi toglie il cono di carta *DD*, e per mezzo del ſuoco ſi vuota il termometro *M* di tutto il mercurio, che egli contiene, il quale deve riſguardarſi come una coſtante quantità. Ma queſto metodo è troppo operoſo, ed incomodo, ed eſigge dell'abilità e deſtrezza nel caricare di mercurio queſto termometro.

L'apparato, col quale abbiamo determinati gli altri elementi della coſtruzione del barometro, ci ha ſervito anche a determinare la gravità ſpecifica dei diverſi mercurj colla maſſima preciſione, e facilità.

Situato il barometro di prova in una poſizione verticale, e verſato nella canna inferiore *PP* tanto mercurio fino che arrivi preciſamente al decimoquarto pollice, ſi cerca, e ſi determina la preciſa altezza del mercurio nell'altro braccio più lungo *ACD* del barometro. Ciò fatto ſi eſtrae, aprendo la vite *F* del pozzetto *E* (vedi la figura 2 in cui è rappreſentata più diſtintamente queſta vite *F*) dal braccio corto tanto mercurio, quanto baſti per fare, che la ſuperficie inferiore della colonna mercuriale ſegni il ſecondo pollice; indi ſi rimettano in queſta canna in luogo dei dodici pollici di mercurio eſtratti altri dodici pollici di mercurio revivificato dal ſublimato corroſivo, o dal cinabro, di modo che queſto mercurio ſegni il pollice decimoquarto preciſamente. Se il mercurio revivificato dal cinabro, o dal ſublimato corroſivo è più peſante del mercurio della miniera d'Idria, i dodici pollici di queſto mercurio verſati nella canna inferiore *PP* dovranno contrabilanciare una colonna di mercurio d'Idria di una lunghezza maggiore di dodici pollici, conſeguentemente il mercurio nel tubo lungo barometrico *ACD* dovrà tenerſi più elevato, quando vi ſono nel tubo corto *PP* dodici pollici di mercurio revivificato, di quando in vece di queſti dodici pollici vi ſono dodici pollici di mercurio della miniera d'Idria.

Tale è il metodo, che noi abbiamo ad ogni altro preferito in queſta ricerca, e che ci ha dimoſtrato, che le diverſe ſpecie di mercurio, che ſono in commercio, hanno una diverſa gravità ſpecifica; e che non ſempre quello, che è revivificato dal cinabro, ha una gravità coſtante, perchè nei cinabri comuni evvi molte volte del piombo in iſtato di minio, che ſi revivifica, ed il mercurio reſuſcitato dal cinabro ha un certo untume, e forma una certa pellicola, che difficilmente gli ſi può torre.

Il mercurio revivificato dal ſublimato corroſivo per mezzo della calce è quello, che noi abbiamo trovato avere una gravità ſpecifica più coſtante d'ogni altro mercurio, e perciò deve eſſere ad ogni altra ſpecie di mercurio preferito per caricare barometri, termometri, di modo che qualora i barometri ſieno caricati con queſta ſpecie di mercurio non è neceſſario di tener conto della gravità ſpecifica del mercurio, potendoſi aſſumere per eguale ſenza alcun pericolo di sbagliare. Anzi noi conſigliamo chiunque voglia intraprendere delle oſſervazioni barometriche di una certa preciſione ad adoperare dei barometri caricati di mercurio revivificato dal ſublimato corroſivo, perchè oltre all'eſſer queſto mercurio di una gravità ſpecifica coſtante è molto più fluido, ed è meno attratto dal vetro di qualunque altra ſpecie di mercurio, che noi abbiamo ſperimentato. Di fatto il colmo delle colonne di un tal mercurio è qualche poco più elevato, e conveſſo di quando queſte colonne ſono di un qualunque altro mercurio, appunto perchè eſſendo più fluido, vale a dire eſſendo meno fra loro aderenti le molecole, che lo compongono, le parti centrali della colonna mercuriale riſentono meno l'attrazione delle pareti del tubo di vetro, e quella delle molecole di mercurio, che ſono a quelle più vicine.

§. II.

Della qualità del vetro più opportuno pel barometro.

Il Sig. de *Luc* (*) alla pag. 161 delle *Ricerche ſulle modificazioni dell' atmosfera* riflettendo alla perfezione, a cui ſono ſtati portati i cannocchiali acromatici, dopo che ſi è penſato alla ſcelta della qualità del vetro, crede, che qualora ſi penſaſſe a trovar qualche ſpecie di vetro omogeneo, ſi potrebbe forſe ottenere che le colonne di mercurio chiuſe in queſto vetro non obbediſſero, che al ſolo peſo dell' aria, ed al calore, oppure che la loro reſiſtenza aveſſe ad eſſere coſtantemente la medeſima. Effettivamente deve l' attrazione del vetro col mercurio eſſer differente ſecondo la quantità, qualità, e miſtura delle ſoſtanze delle quali egli è formato (**). Sarebbero perciò intereſſanti ſperienze quelle, che determinaſſero il grado d' attrazione dei diverſi vetri col mercurio, ed a queſto oggetto opportuniſſimo ſarebbe l' apparato del Signor *Morveau*, con cui ha dimoſtrato l' attrazione del vetro col mercurio. Ma per dimoſtrare, che queſta attrazione del mercurio colle diverſe ſpecie di vetro influiſce ſulle altezze barometriche, s' adattino nel pozzetto del barometro di prova varie canne di una medeſima groſſezza, lunghezza, e diametro, ma di vetro

---

(*) Recher. ſur les Modif. de l' Athmoſphere Vol. 2.

(**) Il Sig. *Balbi* ſupponendo, che la depreſſione del mercurio ne' tubi capillari dipenda dalla ripulſione, crede che queſta forza ripulſiva ſia differente nei diverſi vetri; ed avendo immerſo nel mercurio 4 tubi capillari aventi eguale diametro, e lunghezza, trovò che il mercurio ſtava inegualmen- in eſſi depreſſo. Queſti quattro tubi erano di vetro di Bologna, di Venezia, di Firenze, e di Roma. Collect. Accad. Vol. X. partie etrang. pag. 785.

diverſo, e ſi oſſervi a quale altezza nel tubo lungo ſi tenga elevato il mercurio.

Le ſperienze, che noi abbiamo fatto ſi limitano a tre ſole ſpecie di vetro, al vetro che ſi fabbrica a Venezia ad imitazione del Flint d' Inghilterra, al Flint Ingleſe, ed al criſtallo di Boemia.

Adattato il tubo di Flint Veneto, che aveva 6 pollici di larghezza, e 2 $\frac{1}{2}$ linee di diametro, il mercurio ſi tenne a pollici 29. lin. 6. 0039.

In un tubo di Flint Ingleſe l' altezza fu di 29 pollici linee 6. 0049.

In un tubo di criſtallo di Boemia il mercurio ſi tenne a 29 pollici lin. 6. 0045.

Dunque la qualità del vetro influiſce ſull' altezza del barometro.

§. III.

Degli effetti dell' ineguaglianza de' diametri de' tubi barometrici nell' altezza della colonna mercuriale.

La prima oſſervazione, che noi abbiamo intorno a queſto argomento, è quella del Sig. Avvocato *la Plantade* riferita dal Sig. *Caſſini* nelle *Memorie dell' Accademia Reale delle ſcienze* per l' anno 1773. Poichè il ſuddetto Avvocato ha oſſervato, che il mercurio ne' barometri di diametri fra loro diſuguali ſi tiene ad una altezza ineguale. Più preciſa fu l' oſſervazione, che fecero in ſeguito i Signori *Caſſini*, e *Monnier* (*), i quali avendo portato ſul Canigou due barometri di un diametro diſuguale, oſſervarono, che il mercurio ſi teneva più baſſo di circa $\frac{2}{3}$ di linea nel barometro più ſtretto;

(*) Meridienne verifiée p. 224.

ſtretto; oſſervazione, che fu pur fatta da molti altri, e ſegnatamente nel 1750 dal Sig. le *Cat* (*) ed *Hollmann* (**), il primo de' quali parimenti ha trovato, che il mercurio ſi tiene altrettanto più baſſo ne' barometri, quanto queſti ſono di un diametro più riſtretto. Ma ſiccome alcuni credevano, che un tal fenomeno procedeſſe dalla maggiore quantità d' aria contenuta ne' tubi di un diametro anguſto; poichè ſi ſa, che è più difficile il purgar bene d' aria i tubi barometrici, quando ſono di una certa anguſtia, ed il Sig. *Hollmann* pare che non attribuiſca alla grandezza del diametro l' oſſervato fenomeno; l' ingegnoſo Sig. Dott. *Cigna* (***) fece unire aſſieme due tubi di diſugual diametro in modo, che formavano una porta romana, e riempiuti queſti due tubi di mercurio li capovolſe nel mercurio, ed oſſervò, che coſtantemente il mercurio ſi teneva di $\frac{1}{4}$ o di $\frac{1}{3}$ di linea più baſſo nel tubo riſtretto, che nell' altro, che aveva un maggior diametro; poichè in queſto caſo la quantità dell' aria contenuta nella parte vota non poteva aver alcuna parte nel fenomeno, eſſendo lo ſteſſo vuoto comune ad ambedue i tubi barometrici.

Ma il Sig. de *Luc* è andato anche più oltre in queſta ricerca, avendo trovato

1. Che i barometri, che ſono fatti a ſifone ſi tengono ſempre più alti di quelli fatti a recipiente.

2. Che i barometri fatti di un ſemplice ſifone, la di cui parte ſuperiore ſia più riſtretta dell' inferiore, ſi tengono ſempre più baſſi di quelli, che hanno una figura contraria.

(*) Magaſin Francois pour l' année 1750.

(**) Philoſophical Tranſ. an. 1742. Aſt. Acad. Gotting. Vol. 3. de mercurii in barometris diverſis eodem tempore & eodem loco diverſa altitudine.

(***) Acta Accademiæ Taur, Vol. 1.

3. Che i barometri, alla ſommità de' quali havvi una boccia, ſi tengono ad una maggiore altezza, quando la parte ſuperiore della colonna mercuriale giunge nella cavità della boccia, e queſto effetto tanto più ſenſibilmente ſi manifeſta, quanto più il mercurio è inoltrato nella boccia, di modo che allora ſi tiene di due linee più alto di quando il barometro ha una boccia abbaſſo.

4. Che i barometri, che hanno un tubo di un diametro uniforme, ſi tengono ad un' altezza preſſo a poco eguale.

5. Che l' ineguaglianza nelle altezze barometriche ſcompariſce ne' barometri a recipiente, quando tutto il recipiente ſia riempiuto di mercurio, e che il mercurio arrivi nel tubo ſuperiore al recipiente.

Perciò il Sig. de *Luc* ha preſcritto, come una condizione neceſſaria per la coſtruzione dei barometri di adoperare dei tubi di un dato diametro, e di rigettare aſſolutamente la coſtruzione di quei barometri che foſſero fatti a recipiente.

Ma ſiccome non oſtante, che il Sig. *Cardinale* de Luines (*) abbia con eſperienſe dimoſtrato, che la differenza nelle altezze barometriche è ſenſibile anche ne' tubi di un diametro maggiore di tre linee; alcuni però vi ſono, che appoggiati alle ſperienze di *Hollmann* (**) dalle quali riſulta che la differenza nelle altezze barometriche è ſoltanto ſenſibile ne' tubi di un diametro minore di tre linee, e che queſta differenza non è ſenſibile ne' tubi di un diametro maggiore, credono eglino, che nelle ſperienze del Sig. *Cardinale* il mercurio ſi ſia tenuto più alto anche nel tubo di un diametro di tredici linee, perchè foſſe meglio purgato d'aria degli al-

---

(*) Mem. de l'Accademie Royal des Sciences 1768.

(**) Acta Accademiæ Gotting. pag. 227. Vol. 1.

tri tubi di un minor diametro, o anche perchè, ſuppoſto che in tutti i Barometri del Sig. *Cardinal* de Luines (*) foſſe eguale la quantità dell' aria contenuta nel vuoto barometrico, minore doveva eſſere la compreſſione dell' aria contenuta nel tubo grande di quella, che era nel tubo di un minor diametro, mentre, eſſendo in un maggiore ſpazio doveva eſſere più rarefatta. Voléndo cavillare ſulle ſperienze del Sig. *Cardinal* ſi potrebbe anche opporgli, che la maggiore quantità del vuoto nel Barometro di 13 linee di diametro poteva contribuire beniſſimo a tener ſollevato il mercurio ad una maggiore altezza di quella, a cui ſi teneva ne' tubi di un minor diametro.

Perciò noi abbiamo creduto, che foſſe per eſſere coſa utile, ed importante per l' ottima coſtruzione de' barometri il determinare con ben fatte ſperienze, ſe veramente l' altezza del barometro diveniva maggiore coll' aumento del diametro, anche oltre all' aſſegnato limite delle linee tre.

Le prime ſperienze, che noi abbiamo fatto per decidere pienamente queſto articolo di controverſia, ſono ſtate fatte con due tubi dello ſteſſo vetro, uno de' quali aveva tre linee di diametro, e l' altro ſei in ſette

---

(*) I riſultati delle ſperienze del Sig. *Cardinal* de Luines ſono

1. Che i barometri caricati con mercurio bollente ſi tengono più elevati de' barometri caricati a freddo.

2. I barometri bolliti ſono quelli, che ſono più regolari.

3. Un barometro caricato a mercurio bollente, che abbia due terzi di linea è egualmente eſatto, che un barometro, che abbia linee $\frac{1}{2}$ o linee $\frac{2}{5}$, ovvero 2. $\frac{1}{2}$. linee di diametro.

4. Il movimento del mercurio nei tubi capillari è regolare.

5. I barometri caricati di mercurio bollente non oſtante, che i tubi ſieno ſtati lavati con iſpirito di vino ſi tengono egualmente alti che i non lavati.

6. Ne' tubi di un grandiſſimo diametro, come di 13 linee parigine, il mercurio ſi tiene più alto, che ne' tubi di un diametro ordinario di 2 $\frac{1}{2}$ linee.

Mem. de l' Accademie Royale des Sciences année 1768. pag. 247.

linee, che noi abbiamo ſatto unire aſſieme, e curvare a forma di porta romana, e che avendo riempiuti di mercurio gli abbiamo capovolti in un comune recipiente ripieno di mercurio. Il riſultato di queſta ſperienza, che abbiamo fatto con altri tubi di un diametro minore di 3 linee, e maggiore di 6, è ſtato, che è vera l' oſſervazione fatta dal Sig. *Cardinal* de Luines, che l' altezza nella colonna del mercurio ſoſpeſa ne' tubi vuoti d' aria è ſenſibilmente maggiore ne' tubi di 6 linee di diametro di quella de' tubi di 3 linee. Di più noi abbiamo oſſervato in queſte ſperienze, che la curva della ſuperficie del mercurio ne' tubi di un diametro maggiore, è ſenſibilmente più conveſſa di quella ſoſpeſa ne' tubi di un diametro minore, la quale è qualche volta quaſi appena ſenſibile ne' tubi di un diametro minore di 2 linee.

L' errore del Sig. *Hollmann*, e degli altri che hanno creduto, che al di là di 3 linee non aveſſe luogo il fenomeno della maggiore altezza, procede forſe dall' avere eglino eſtimata la lunghezza della colonna mercuriale, non dalla conveſſità, oſſia dall' apice della colonna mercuriale, ma bensì dai lembi, l' altezza de' quali alle volte è uguale ne' tubi di diſuguale diametro, non oſtante che diverſa ſia l' elevazione della curva oſſia dell' apice della curva della colona mercuriale.

Ma ciò, che dimoſtra pienamente l' azione, e gli effetti dell' ineguaglianza dei diametri nell' altezza del barometro ſono le ſperienze, che noi abbiamo fatte col noſtro barometro di prova, poichè i riſultati delle ſperienze fatte con eſſo non ſono ſoggette ad alcuna eccezione.

Nel pozzetto di queſto noſtro barometro ſono ſtate da noi ſucceſſivamente adattate cinque canne tutte di un' egual lunghezza, e dello ſteſſo vetro, i diametri delle quali erano linee $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, ed avendo fatto in maniera, che in queſte diverſe canne il mercurio ſi teneſſe coſtante ad una data altezza abbiamo oſſervato che nel tubo lungo la colonna ſi allungava, o ſi accorciava in ragione della differenza de' diametri ne' tubi inferiori.

Quando ſi adoperò il tubo, che aveva un diametro di 2 $\frac{1}{2}$ linee franceſi, il mercurio ſi tenne coſtantemente a pollici 29 lin. 6.020.

Col tubo di 3 linee di diametro l' altezza fu pollici 29, lin. 6.010.

Nel tubo di 3 $\frac{1}{2}$ linee franceſi l' altezza fu pollici 29, lin. 6.002.

Nel tubo di 4 linee l' altezza è ſtata pollici 29, lin. 6. . . .

Nel tubo di 4 $\frac{1}{2}$. linee il mercurio ſi tenne a 29, pollici, linee 5.070.

Da queſta ſperienza ſi raccoglie, che l' effetto dell' ineguaglianza del diametro ne' tubi barometrici ha luogo al di là del preteſo limite di tre linee franceſi, e che qualora ſi vogliano fare dei barometri di paragone è neceſſario di tener conto del diametro delle canne che ſi adoperano. Inoltre ſiccome l' altezza varia col diametro del tubo barometrico, perciò conviene che la canna barometrica non ſolo ne' barometri a ſifone, ma anche ne' barometri Torricelliani ſia di un diametro uniforme in tutto lo ſpazio di variazione.

§. IV.

Se la quantità della ſuperficie libera del vetro al diſopra della colonna mercuriale influiſca ſull' altezza del Barometro.

Quantunque i fenomeni dei tubi capillari, e le loro leggi non ſieno traſportabili ai tubi di un maggior diametro; pure per non laſciare alcuno ſcrupolo abbiamo voluto eſperimentare, ſe la quantità della ſuperficie libera del vetro al diſopra della colonna mercuriale influiſca ſull' altezza del mercurio ne' tubi di un diametro non capillare. Poichè ſiccome i fluidi ne' tubi capillari dello ſteſſo diametro ſi tengono elevati ad un' altezza tanto maggiore, quanto è maggiore la lunghezza del tubo al diſopra del livello del fluido, in cui ſono immerſi; così pure ſi poteva dubitare, che la maggiore elevazione del mercurio oſſervata creſſere coll' aumento del vuoto barometrico procedeſſe dalla maggiore lunghezza, e quantità del vetro al diſopra della collonna mercuriale..

Inoltre ſe queſta maggiore altezza aveſſe luogo appunto per queſta cagione converrebbe, che ne' barometri a ſifone, come è quello del Sig. de *Luc*, ſi teneſſe conto della lunghezza del tubo, che ſta al diſopra della ſuperficie del mercurio contenuto nel tubo inferiore più corto qualora ſi trattaſſe di avere dei barometri di paragone. Poſto ciò era dunque necceſſario di oſſervare l' altezza barometrica in un tubo a ſifone, il di cui braccio inferiore aveſſe un coſtante diametro, ma una lungghezza variabile a piacimento,

Anche in queſte ſperienze abbiamo trovato opportuniſſimo il noſtro barometro di prova, poichè avendo fatte adattare tre canne tutte dello ſteſſo vetro, e diametro di diſuguale lunghezza, abbiamo ſucceſſivamente oſſervato l' altezza della colonna mercuriale in un tempo, che il peſo dell' aria era invariabile, avendo la coſtante avvertenza in queſte ſperienze di mettere ſempre ad un' altezza eguale la colonna mercuriale nel braccio corto, ed oſſervando, e determinando ſempre l' altezza della colonna mercuriale nel braccio lungo col ſolito anello, e meccaniſmo di *Ramſdem*.

Il riſultato di tre oſſervazioni fatte in diverſi tempi cogli ſteſſi tubi è ſtato il ſeguente, ſenza la menoma variazione.

Con un tubo di Flint Veneto lungo ſei pollici, e di un diametro di lin. 2, e mezzo franceſi il mercurio coſtantemente ſi tenne a pollici 29, linee 6.0045.

Con un tubo dello ſteſſo vetro, e diametro, ma che aveva 9 $\frac{1}{2}$ pollici franceſi di ſuperficie libera al di ſopra del mercurio, l'altezza della colonna mercuriale fu pollici 29, linee 7.....

Finalmente con un tubo del ſuddetto vetro, e diametro, e che aveva 27 pollici di ſuperficie libera il mercurio ſi tenne a pollici 29, linee 7004.

Non baſtandoci queſte ſperienze, poichè ci pareva molto importante il determinare queſto articolo con eſperienze deciſive, abbiamo voluto oſſervare l' altezza barometrica adattando nel pozzetto del noſtro barometro di prova un tubo lungo 6 in 7 pollici franceſi, indi per mezzo di cera abbiamo aggiunto a queſto tubo un' altro pezzo di canna dello ſteſſo vetro in modo, che la ſuperficie libera del vetro al di ſopra del mercurio era in queſta ſeconda ſperienza triplice di quella, che era nella prima ſperienza, ed abbiamo di fatti oſſervato, che l'altezza barometrica variava colla lunghezza della ſuperficie libera del vetro al di ſopra del mercurio.

Diverſe conſeguenze ſi poſſono dedurre da queſte ſperienze.

I. La quantità dell' attrazione del vetro col mercurio creſcendo in ragione della quantità della ſuperficie libera del vetro, il mercurio ſi deve tener più alto in quel tubo, che ha una maggiore lunghezza.

II. Creſcendo l'altezza del mercurio nel barometro coll' aumento della ſuperficie libera del vetro al diſopra del mercurio, converrà ne' barometri Torricelliani tener conto di queſto elemento di variazione, quando ſi tratti di miſurar delle grandi altezze, perchè coll' ingrandimento del vuoto creſce l' azione della ſuperficie libera del vetro.

III. Ne' barometri a ſifone, nei quali a miſura che creſce nel tubo lungo la ſuperficie libera del vetro; d' altrettanto ſcema queſta ſuperficie libera nel tubo corto, non ſarà neceſſaria queſta deduzione, perchè i vantaggi di una parte ſono compenſati dalle perdite dell' altra parte.

IV. Finalmente nelle noſtre ſperienze intorno all'influenza del moto ſull' altezza barometrica non ha luogo queſto elemento di variazione appunto per eſſere il noſtro barometro di prova fatto a ſifone.

Ciò che però è d' avvertirſi in quelle ſperienze, ſi è, che l' equazione che ſi può dedurre dalle noſtre ſperienze per l' influenza del vuoto, ſarebbe ſoltanto applicabile ai barometri a ſifone; poichè nei barometri ſemplici, e Torricelliani queſta equazione deve eſſere maggiore appunto per l' azione non compenſata dalla ſuperficie libera del vetro.

Noi ſpieghiamo queſti fenomeni tanto dei tubi di diverſo diametro, come quelli dei tubi di diverſe lunghezze, e qualità di vetro ſubordinandoli al fenomeno generale dell' attrazione del vetro col mercurio; attrazione, che è provata, e dimoſtrabile da mille ſperienze, poichè non ſolo una laſtra piana di criſtallo poſta in contatto del mercurio aderiſce con un notabile grado di forza, ma quando il contatto del vetro col mercurio è più perfetto l' attrazione è ſenſibilmente maggiore. Prova di ciò eloquente ci forniſcono gli ſteſſi barometri, nei quali, qualora per mezzo del fuoco ſieno ſtati ben purgati d' aria, molte volte nel raddrizzarli il mercurio ſta attaccato alla ſommità del tubo, e la colonna mercuriale vi ſta ſoſpeſa a 40, ed anche più pollici, talchè per farla diſcendere, e diſtaccare è neceſſario di ſcuotere vivamente il tubo barometrico, ed anche nello ſtaccarſi di queſta colonna mercuriale ſi oſſerva, che queſta già non ſi ſtacca dal tubo alla ſommità; ma bensì ſi ſpezza al diſotto di quella di 4 in 5 pollici, e queſta porzione di colonna mercuriale ſta tuttavia

tuttavia aderente alla ſommità della canna barometrica.

Ma che giova cercare degli eſempj ſe gli ſteſſi tubi capillari, co' quali taluno ha preteſo di dimoſtrare eſſervi una vera ripulſione fra il vetro ed il mercurio, ci forniſcono la prova più convincente?

L'eſperienza vien riferita da *Muſſchembroek* (*). Prendaſi un tubo di vetro, che abbia l'eſtremità inferiore capillariſſima, e ſi verſi in queſto tubo una certa porzione di mercurio, e ſi oſſerverà, che da queſta capillare apertura il mercurio non fluirà, e ſoltanto fluirà, quando la colonna di mercurio verſata nel tubo ſuperi l'attrazione del vetro col mercurio (**). Poſto dun-

---

(*) *Muſſchembroek Diſſertationes Phyſic. Math. de Tubis Capill.* &c.

(**) Che il mercurio ne' tubi Capillari ſtia al diſotto del ſuo livello, perchè l'attrazione delle parti, che lo compongono ſia maggiore dell'attrazione del vetro col mercurio è un'ipoteſi, che è reſa molto plauſibile dalle ſperienze de' Signori *Rondelli*, e *Bonzi*. (*Act. Accad. Bon.*) i quali hanno oſſervato, che immergendo tre fili metallici nel mercurio, uno d'oro, d'argento l'altro, e di rame il terzo, in modo che una porzione di queſti fili foſſe immerſa, e l'altra fuori del mercurio; oſſervarono, diſſi, che in capo ad un certo tempo il mercurio ſi elevava al di ſopra del ſuo livello, e penetrava nel filo metallico anche per quella parte, che era fuori del mercurio; di più oſſervarono, che nell'oro il mercurio era più in alto penetrato, che nell'argento, e meno nel rame. Ora ſe ſi rifletta alle belle ſperienze del Sig. *Morveau* (*Elements de Chimie Vol.* 1.) dalle quali riſulta, che il mercurio ha coll'oro un maggior grado d'attrazione, che coll'argento, e più coll'argento, che col rame, facilmente ſi comprenderà la ragione, per cui il mercurio ſi è levato più alto nel filo d'oro, che nel filo d'argento, e più nel filo d'argento, che in quello di rame, di modo che ſe in vece di tubi di vetro, i quali hanno ſempre col mercurio un minor grado d'attrazione di quello, che hanno fra loro le molecole mercuriali, ſi faceſſero le ſperienze con tubi capillari fatti o di oro, o di argento, l'attrazione delle quali ſoſtanze col mercurio è maggiore di quella, che hanno fra loro le molecole mercuriali, il mercurio in queſti tubi capillari metallici non ſi terrebbe al diſotto del ſuo livello, ma ſi ſolleverebbe al di ſopra più, o meno ſecondo la maggiore, o minore affinità del mercurio colla ſoſtanza metallica, di cui è formato il tubo capillare ecc, que, che il vetro attragga il mercurio s' intende perchè la ſuperficie della colonna mercuriale nei barometri ſia ſempre o conveſſa, o concava, e non mai piana; conveſſa quando il barometro s' inalza, oppure quando il mercurio è verſato in una canna inferiormente chiuſa; concava quando il barometro diſcende, perchè le parti della colonna mercuriale contenuta nel tubo, che ſono più vicine alle pareti attraenti della canna, riſentono aſſai più l' attrazione delle medeſime, che quelle, che ſono più lontane, perciò reſiſtono ad eſſere ſmoſſe con una forza proporzionata al grado d'attrazione, che paſſa fra il vetro ed il mercurio. A miſura che ſi va ſcoſtandoſi dalle pareti del tubo barometrico, l'attrazione divien minore, e perciò le parti della colonna mercuriale a miſura che ſono più vicine all' aſſe della colonna, che è il ſito più lontano dalla ſuperficie attraente, s' inalzano di più, e quelle che ſono nell' aſſe della colonna ſono quelle che ſi tengonò più elevate delle altre; talchè la curva formata dalla ſuperficie della colonna mercuriale eſprime la curva dell' attrazione del vetro a diverſe diſtanze. Di fatto ſi oſſerva, che a miſura che le canne barometriche ſono di un maggior diametro, maggiore è anche in eſſe l' elevazione del mercurio, perchè le parti centrali eſſendo più lontane dalle pareti del tubo appena ſentono la loro attrazione, e non obbediſcono, che al ſolo peſo dell' aria. Che ciò ſia, facile è il farne l' eſperienza.

Si prenda un tubo di vetro, che abbia due pollici di diametro, e chiuſa una delle ſue eſtremità, verſata in eſſo una colonna di mercurio, ſi oſſerverà, che la ſuperficie della ſommità di queſta colonna non è totalmente curva, ma piano-curva, eſſendo la parte centrale di queſta ſommità quaſi piana, appunto perchè queſte parti centrali della colonna eſſendo molto diſcoſte dalle pareti della canna, ſono fuori della ſfera d' attrazione. Per queſta medeſima ragione ancora il mercurio nei barometri ſi tiene altrettanto più elevato, e la curva, che il mercurio forma, è tanto più conveſſa, quanto più i barometri ſono di un diametro maggiore; poichè le parti centrali di una colonna mercuriale non obbediſcono che al ſolo peſo dell' aria, nè la loro elevazione è impedita o diſturbata dall' attrazione delle pareti del vetro. Così pure il mercurio ſi tiene più alto nel tubo lungo barometrico *ACD* a miſura che è minore il diametro del tubo *PP* adattato nell' imbuto del pozzetto *E*, o maggiore la forza attraente della ſuperficie libera della canna *PP*, ovvero del vetro della medeſima canna *PP*.

Da queſto medeſimo principio d' attrazione del vetro ſi potrebbe facilmente dedurre la ſpiegazione di varj fenomeni riſguardanti il barometro, che noi per brevità tralaſciamo di riferire, invitando ſoltanto i Fiſici, che deſiderano di fare delle buone oſſervazioni barometriche, a preferire il vetro Flint d' Inghilterra a qualunque altra ſpecie di vetro, ed a ſcegliere il tubo barometrico di un diametro, che ſia per lo meno di 3 linee franceſi, perchè dalle oſſervazioni, che abbiamo fatte, le parti di una tale colonna mercuriale, che ſono nell' aſſe della medeſima, riſentono pochiſſimo l' attrazione delle pareti della canna, che le contiene; talchè eſtimando l' altezza della colonna mercuriale dall' apice della curva da quella formata, ſi è quaſi ſicuro di avere il vero e preciſo peſo dell' aria, che comprime il mercurio.

§. V.

Dei tubi barometrici interiormente inverniciati.

Siccome le ſperienze del Sig. *Jurin* (*) hanno dimoſtrato, che la depreſſione del mercurio nei tubi capillari non ha luogo, quando il tubo vitreo ſia coperto da un velo di ſevo, o di cera, poichè in queſti caſi il mercurio anzi che ſtare al diſotto del ſuo livello s'inalza in eſſo ſenſibilmente; ed altronde le ſperienze, che noi abbiamo riferite, apertamente dimoſtrano, che molti fenomeni dei tubi capillari ſono comuni anche ai tubi di un diametro non capillare, abbiamo voluto ſperimentare, ſe il mercurio ne' tubi interiormente inverniciati ſi tenga, o no più elevato, che ne' tubi di un egual diametro non inverniciati.

Per fare l'eſperienza in una maniera deciſiva e convincente abbiamo preſo un tubo di Flint d'Inghilterra lungo circa un piede, di 3 linee di diametro ſenſibilmente per tutta la ſua lunghezza, e l'abbiamo interiormente inverniciato per la lunghezza di circa 6 pollici colla vernice ordinaria di ſpirito di vino (**). Indi lo abbiamo, toſto che fu aſciutto, adattato con cera nel pozzetto *E* per la parte, che non era inverniciata, ed abbiamo verſato in eſſo tanto mercurio, fin-

---

(*) Phil. Tranſ. n. 333.

(**) Siccome taluno può avere la curioſità di rifare queſta ſperienza, e potrebbe forſe trovarſi imbarazzato nel dare la vernice alla ſola metà della canna, crediamo, che ſia neceſſario d'indicare il mezzo da noi adoperato, ed è d'immergere nella vernice la canna *PP*, per quella parte, che ſi vuole inverniciare. Indi adattando l'altra eſtremità nella bocca aſpirare l'aria in eſſa contenuta, ſino che la colonna di vernice arrivi a quella altezza, che ſi vuole coprire di vernice; ritirando la bocca applicata alla canna, la colonna di vernice cade nel vaſe, e tutta la ſuperficie della canna toccata dalla colonna di vernice reſta beniſſimo, ed uniformemente inverniciata ecc.

chè queſto arrivaſſe preciſamente all' altezza di 4 pollici; indi coll' anello ſcorrevole *H* abbiamo al ſolito determinata la lunghezza della colonna mercuriale elevata nel tubo barometrico *ACD*, che fu da noi trovata eſſere pollici Ingleſi 29, lin. 6. 030. Ciò fatto abbiamo rivoltato il noſtro tubo, ed adattatolo con cera nel pozzetto *E*, come nella prima ſperienza, ma per la parte inverniciata, e verſato in queſto tubo preciſamente 4 pollici di mercurio, abbiamo trovato, che l'elevazione della colonna mercuriale nel tubo *ACD* era di pollici 29 lin. 6. 045, cioè di 015 di linea più alta di quando il mercurio nel tubo *PP* era nella parte non verniciata.

Non ſi può attribuire queſta maggiore elevazione del mercurio, quando fu meſſa in eſperienza la canna *PP* per la parte inverniciata, all' eſſere queſta canna divenuta di un diametro più riſtretto pel velo di vernice, che le è ſtato applicato, poichè ſi è dimoſtrato nel paragrafo dell' effetto dell' ineguaglianza dei diametri nei tubi barometrici, che quando invece di una canna *PP* di $3\frac{1}{2}$ linee di diametro ſi adattò nel pozzetto un' altra canna di un diametro di ſole 3 linee, la differenza nell' altezza del mercurio fu ſolo di 008, mentre nella noſtra ſperienza, nella quale certamente il ſottile ſtrato di vernice non poteva reſtringere il diametro della canna di mezza linea, l' altezza oſſervata del mercurio fu ſolo di, 0. 015.

§. VI.

Dell' azione dell' elettricità ſopra il barometro.

Poichè in queſta Memoria ſi tratta delle cagioni che influiſcono ſull' altezza del mercurio nel barometro indipendentemente dal peſo dell' aria e del calore, non ſi doveva tralaſciare di eſaminare ſe l' elettricità faccia o no variare l'altezza del mercurio nel barometro. Egli è vero che il Sig. *Comus* (*) ed il Sig. *Changeux* (**) hanno ſu di ciò pubblicate delle oſſervazioni e ſperienze che ſembrano ſciogliere queſto problema, poichè eſſe tendono a provare che l'elettricità altera ſenſibilmente l'altezza del mercurio nel tubo barometrico fino a farla divenir maggiore di due linee; ma le ſperienze di queſti Signori non ſono abbaſtanza circoſtanziate per meritarſi tutta quella fede che unicamente ſi accorda a ſperienze fatte con tutte le avvertenze poſſibili, poichè è facile traſcurandone alcuna di prendere de' groſſi abbagli. Altronde ſiccome il Signor *Changeux* nella ſua Memoria riferiſce che non ſempre elettrizzando ha luogo la maggiore elevazione della colonna mercuriale nel tubo barometrico, perciò con qualche fondamento ſi poteva dubitare che l' oſſervata maggiore altezza non all'elettricità, ma a qualche altra non avvertita circoſtanza ſi doveſſe aſcrivere. Onde non ci parve inutile di conſultare l'oracolo della ſperienza.

Elettrizzato un barometro con elettricità vitrea ſempre e coſtantemente s' inalza colle ſeguenti circoſtanze; cioè s' inalza ſempre aſſai più nella prima volta, che in tutte le altre conſecutive, così che ſe quando ſi comincia l' eſperimento ſi è ottenuto l'aumento di $\frac{40}{100}$ di linea, le altre volte conſecutive non arriva che a $\frac{25}{100}$. Laſciato in quiete il barometro torna a dare elettrizzandolo la prima elevazione più grande. Quando ſi cava la ſcintilla ſi abbaſſa ad un tratto il mercu-

---

(*) Journal de phyſique.
(**) Journal de phyſique.

rio per quaſi tutto lo ſpazio che ſi era inalzato; non ſi ricompone però all'altezza di prima ſe non dopo alcuni minuti.

Nell' atto che il barometro è elettrizzato ſortono dalla colonna mercuriale delle viſibili ſcintillette ſtate già oſſervate da altri fiſici (*); la colonna mercuriale ſenſibilmente oſcilla, non per tremore, nè ſcoſſe del barometro, ma per mero effetto dell'elettricità. Queſta oſcillazione, e coſcintillazione accade anche togliendo l' anello che abbraccia il tubo barometrico, così che ad eſſo aſcrivere non ſi può un tale fenomeno.

Elettrizzato un barometro con elettricità reſinoſa, per la prima volta alquanto ſi alza, ma meno che colla elettricità vitrea; oſcilla e dà qualche ſcintilla: elettrizzato in ſeguito altre volte conſecutive non ſi muove viſibilmente o almeno pochiſſimo. Toltogli l'elettricità, pare che ſi rialzi, e che ſi renda più conveſſo, e non ritorna alla primitiva elevazione ſe non dopo circa un quarto d'ora.

Ma con tutto ciò che queſte ſperienze provino che il fluido elettrico influiſce ſull'altezza barometrica, pure non ſi può inferire che eſſo poſſa avere alcuna parte nelle variazioni del barometro, direttamente almeno, poichè non mi è mai accaduto di oſſervare alcuna differenza durante un furioſo temporale fra due barometri uno de' quali era iſolato: diſſi direttamente poichè l'elettricità può beniſſimo render l' aria più o meno grave, avendo avuto più volte occaſione di oſſervare che nell' atto che ſcoppia qualche fulmine il mercurio ſenſibilmente oſcilla nel tubo barometrico, probabilmente per eſſere l'aria ſcoſſa ed urtata dal fluido elettrico che in grande copia dalle nubi ſi lancia alla terra.

(*) Vedi *de Luc* Rech. ſur les modif. de l'athm. Vol. I.

§. VII.

Se le oſcillazioni della colonna mercuriale nei tubi barometrici contribuiſcano ad accreſcere l'altezza barometrica.

Nei barometri fatti di un tubo capillare che almeno non ecceda una linea di diametro è ſenſibiliſſimo il fenomeno della maggiore altezza a cui in eſſi ſi tiene ſoſpeſa la colonna mercuriale dopo che o collo ſmovere la tavola ſu cui è fiſſato il tubo barometrico, o con qualunque altro artificio ſi è obbligata la colonna mercuriale a fare delle oſcillazioni in un barometro che aveva il diametro di $\frac{8}{10}$ di linea; il mercurio dopo aver oſcillato per il tratto di cinque in ſei pollici, ſi tenne più alto di 3 lin. e $\frac{6}{10}$ e non ſi ricompoſe all'equilibrio coll'aria ſe non dopo paſſate molte ore.

Ne' barometri di un maggior diametro ſebbene un tal fenomeno non ſia così ſenſibile come ne' tubi di un diametro riſtretto, pure lo è abbaſtanza, perchè ſi abbia ad avere de' riguardi nelle oſſervazioni e ſperienze barometriche.

Il Signor de *Luc* per tacer di molti altri ha conſigliato di non oſſervare l'altezza barometrica ſe non dopo una buona mezz' ora che ſia ſtato ſituato immobilmente il barometro, ed ha inoltre preſcritto di dare al tubo barometrico de' piccioli urti, acciocchè più preſto l'altezza della colonna mercuriale ſi ricomponga all'equilibrio col peſo dell'aria.

L' apparato rappreſentato nella figura 10 è ottimo per fare queſte ſperienze, poichè col comprimere il cilindro *SS* ed obbligarlo ad immergere più o meno nel mercurio contenuto nel vaſe *AA*, ſi può con tutta la facilità obbligare la colonna mercuriale a fare delle oſcillazioni più o meno grandi a piacimento ſenza correre alcun pericolo che l'aria s' introduca nel tubo barometrico *DD* ad alterarne il vuoto. Le ſperienze ſono ſtate più volte replicate in diverſe circoſtanze di peſo di aria, di umidità, di temperatura, ed altre ſimili.

I riſultati generali delle ſperienze ſono 1. Che quanto più grande è il numero delle oſcillazioni che ha fatto la colonna mercuriale, e quanto più eſſe ſi ſono eſteſe in uno ſpazio ſenſibile, altrettanto maggiore è l'altezza a cui ſi tiene la colonna mercuriale, e maggior tempo v' impiega a diſcendere all' altezza corriſpondente al real peſo dell' aria.

2. Che nei giorni umidi e caldi minore è queſto eccеſſo di altezza nella colonna mercuriale, che nei giorni aſciutti e freddi.

3. Che ne' tubi di un diametro notabile, come di 4 in 5 linee, non ha preſſo che luogo un tal fenomeno, ed all' oppoſto è più ſenſibile ne' tubi a miſura che eſſi ſono anguſti.

4. Che il mercurio nei tubi di un diametro di tre in quattro linee come ſono i barometri ordinarj dopo 20', o 30' ſi riduce alla vera altezza corriſpondente al peſo dell' aria.

5. Che il dare al tubo barometrico delle picciole ſcoſſe, ſiccome viene conſigliato dal Signor de *Luc*, contribuiſce moltiſſimo a fare che la colonna mercuriale più preſto ſi abbaſſi.

7. Che è un' ottima pratica quella di fare che il mercurio diſcenda lentamente quando ſi mette il barometro in eſperienza, poichè più corte, e minori rieſcono le oſcillazioni della colonna mercuriale, conſeguentemente minore è l' eccеſſo dell' altezza della colonna mercuriale.

§. VIII.

Se la quantità più o meno grande del mercurio contenuto nella ciſterna oſſia pozzetto del barometro ſemplice Torricelliano influiſca ſull' altezza barometrica.

Da che colle ſperienze riferite nei paragrafi antecedenti ſi è ſcoperto che alcune circoſtanze apparentemente indifferenti poſſono contribuire a diminuire, od accreſcere l' altezza barometrica, ed altronde qualunque ricerca che riguardi la perfezione del barometro non eſſendo giammai inutile; ſi è voluto con eſperienze determinare: *ſe la quantità più o meno grande del mercurio contenuto nel pozzetto del barometro ſemplice Torricelliano influiſca ſull' altezza barometrica*; poichè eſſendo la maggior parte dei barometri migliori fatti a pozzetto come ſono quelli di *Ramſdem*, *Magellan*, *Brander* ecc. era neceſſario di ſtabilire ſe la capacità di queſti pozzetti poteva eſſere arbitraria, ſiccome generalmente ſi riguarda, oppure ſe nella coſtruzione dei barometri paragonati eſſer doveva coſtante ed eguale.

A queſto effetto ſi è fatto coſtruire un barometro in cui la maſſa del mercurio contenuto nel pozzetto foſſe variabile ſenza che variaſſe la quantità della ſuperficie del mercurio eſpoſto all' aria. La figura 10 rappreſenta queſto barometro. *AA* è un vaſe cilindrico di criſtallo il quale è ſuperiormente aperto, ed inferiormente termina in un tubo cilindrico *BB* che s' inalza parallelo al vaſe *AA*. In queſto vaſe *AA* peſca profondamente il tubo barometrico *DD*, ſopra il quale evvi una lunga vite WW che ſi muove nel collare *X* fiſſato alla tavola del barometro. Queſta vite WW ha alla di 'ei eſtremità inferiore fiſſato un lungo cilindro di legno *SS* infilato nel tubo barometrico *DD*, di modo che col muovere la vite WW ſi può inalzare, od abbaſſare a piacimento il cilindro *SS*, e farlo più o meno immergere nel vaſe *AA*.

Ora per fare le ſperienze neceſſarie per determinare ſe la quantità del mercurio contenuto nel vaſe *AA* influiſca ſull' altezza barometrica per mezzo della vite *WW*, s' inalza il cilindro di legno *SS* fino a tanto che appena di una linea circa ſia immerſo nel mercurio contenuto nel vaſe *AA*. Ben s' intende, che a miſura che s' inalza il cilindro *SS* è neceſſario di verſare del mercurio nel vaſe *AA* acciocchè quando il cilindro *SS* è inalzato alla maggiore altezza del mercurio nel vaſe *AA* ſia ad una altezza tale che nel tubo comunicante l' apice *BB* della colonna mercuriale tocchi il tagliente dell' anello *C* fiſſato ſulla canna *BB*. Qualora dunque il mercurio contenuto nel vaſe *AA* ſia a queſta altezza ſi miſura con tutta la preciſione l' elevazione della colonna mercuriale ſoſpeſa nel tubo barometrico *DD*; indi per mezzo della vite *WW* ſi abbaſſa il cilindro *SS* finchè ſia immerſo di tre, di cinque, o più linee nel vaſe *AA*; e ſiccome a miſura che il cilindro *SS* s' immerge nel vaſe *AA* eſſo ſcaccia un volume di mercurio eguale alla parte immerſa del ſuddetto cilindro *SS*, perciò facilmente ſi comprende che ſi può avere nel pozzetto *AA* ora una maggiore, ed ora una minore quantità di mercurio a piacimento, ſenza che perciò varj la quantità della ſuperficie del mercurio eſpoſto all' aria, poichè eſſendo cilindrico il vaſe *AA*, ed *SS* cilindro, l' anello mercuriale compreſo fra le pareti del vaſe *AA* ed il cilindro *SS* è coſtantemente eguale.

La grandezza del vaſe *AA*, e del cilindro *SS* nel barometro che ſi è fatto coſtruire è tale che un abbaſſamento di una linea del cilindro *SS* ſcaccia un volume di cinque oncie di mercurio, e potendoſi abbaſſare il ſuddetto cilindro di 15 linee, ſi può avere un pozzetto che abbia una capacità variabile dalle 5 oncie fino alle 65 oncie, ciò che è anche più del biſogno.

Ridotto il cilindro ligneo *SS* ad una tale altezza che eſſo non era immerſo nel mercurio che di una ſola linea, e fatto che ſucceſſivamente immergeſſe da una linea fino a 15 linee, e preſa ad ogni depreſſione del cilindro *SS* con tutta l' eſattezza l' altezza della colonna mercuriale ſoſpeſa nel tubo barometrico *DD*, nonoſtante che la quantità del mercurio contenuto nel vaſe *AA* variaſſe dalle cinque oncie fino alle 65, pure non vi fu la menoma differenza. Perciò pare che ſi poſſa conchiudere che la quantità del mercurio contenuto nel pozzetto non influiſca nè punto, nè poco nell' altezza della colonna mercuriale ſoſpeſa nel tubo barometrico, e che è quindi arbitraria la grandezza del pozzetto ne' barometri ſemplici Torricelliani.

§. IX.

Se la grandezza del vuoto barometrico influiſca ſull' altezza della colonna mercuriale ſoſpeſa nel barometro.

Nella parte ſuperiore del barometro, che comunemente chiamaſi il vuoto barometrico, per quanto bene ſia purgato di aria il mercurio vi rimane ſempre una picciola porzione di aria che è impoſſibile forſe l' eſpellerla intieramente. Il Sig. de *Luc* diſperando di poter rendere gli accurati ſuoi barometri aſſolutamente privi di aria ſi contentò di farli che non ne conteneſſero che una determinata e coſtante quantità di cui ne tenne ſempre eſatto conto nelle ſue oſſervazioni. Altri per render ſenſibile l' effetto di queſta aria contenuta nel vuoto barometrico immaginarono di fare che l' eſtremità ſuperiore del tubo barometrico terminaſſe in un' ampia boccia affinchè quel poco d' aria che rimane nel mercurio di cui queſto fluido coll' ebullizione non ſi può totalmente liberare, dilatandoſi in uno ſpazio notabile abbia a comprimer meno la ſotto poſta colonna mercuriale (*a*). Di fatto ſe ſi facciano caricare due barometri che abbiano eguali dimenſioni, che ſieno egualmente caricati ecc. e ſolo che uno di eſſi in luogo di avere la parte ſuperiore di un diametro eguale al rimanente della canna barometrica abbia invece ſoffiata una boccia di una ſenſibile capacità, ſi oſſerverà che il mercurio ſi terrà più elevato nel barometro che ha ſuperiormente la ſuddetta boccia, che nell' altro la di cui canna da un capo all' altro è perfettamente cilindrica.

Ma un tale fenomeno non è ſtato bene ſpiegato coll' attribuirlo ſoltanto alla maggiore rarefazione dell' aria contenuta nello ſpazio voto, poichè vi ha qualche parte la maggiore ſuperficie vitrea della boccia. Altronde ſe la maggiore elevazione della colonna mercuriale oſſervata nel barometro che ha ſuperiormente una boccia procedeſſe ſoltanto dalla rarefazione dell' aria, ne verrebbe che in un barometro, la cui canna foſſe cilindrica da un capo all' altro ed in cui la grandezza del vuoto foſſe variabile, ne verrebbe, diſſi, che gli aumenti nell' altezza della colonna mercuriale ſarebbero proporzionali eſattamente all' accreſciuta grandezza dello ſpazio vuoto, ciò che non corriſponde alle ſperienze che ſono per riferire.

Situata la tavola *KK* oſſia il barometro di prova in un piano eſattamente perpendicolare all' orizzonte, ed adattata nell' imbuto del pozzetto *E* una canna *PP* di un diametro eguale in tutta la ſua lunghezza, ſi

---

(*a*) Quand' anche con tale artificio ſi arrivaſſe a rendere inſenſibile l' effetto dell' aria che vi è ſempre nel vuoto barometrico ſi avrebbe un peggiore inconveniente nell' accreſciuta fragilità e peſo del barometro, che eſſendo una macchina deſtinata al traſporto deve eſſere quanto è poſſibile ſolida, e leggera.

versò in eſſa tanto mercurio, finchè nel tubo barometrico *ACD* non vi foſſe che un vuoto di ſoli due pollici. Ciò fatto per mezzo degli anelli ſcorrevoli *H*, *L* ſi determinò colla maggiore preciſione poſſibile la diſtanza fra i due colmi delle due colonne di mercurio contenute ne' due tubi *AC*, *PP*, e fu trovata eſſere poll. 29 lin. 6.04; coll' aprire la vite *F* del pozzetto *E* (vedi la *fig.* 2) ſi eſtraſſe tanto mercurio dalla canna *PP* fino che l' apice della colonna mercuriale in eſſa contenuta ſi è abbaſſato di due pollici eſattamente. Corriſpondentemente a queſto abbaſſamento della colonna mercuriale contenuta nella canna *PP* lo ſpazio vuoto nel tubo *AC* crebbe di due pollici, onde fu in tutto di 4 pollici. Miſurata la diſtanza fra i due colmi delle colonne mercuriali contenute nelle canne *AC*, *PP*, fu trovata eſſere poll. 29 lin. 6.011. Con 6 pollici di vuoto fu poll. 29 lin. 6.018; con 8 pollici di vuoto fu poll. 2 lin. 6.023; con 10 pollici di vuoto fu poll. 29 lin. 6.032; con 12 poll. di vuoto fu poll. 29 lin. 6.034; con 14 poll. di vuoto fu poll. 29 lin. 6.039.

Non contenti di aver determinato in queſto modo che la grandezza del vuoto barometrico influiſce ſull' altezza barometrica ſi è voluto ripetere la medeſima ſperienza in un altro modo, cioè in un ordine contrario facendo che la grandezza del vuoto barometrico andaſſe di due in due pollici diminuendo, ciò che facilmente ſi ottenne verſando del mercurio nella canna *PP* in modo che in eſſa il mercurio s' inalzi di due in due pollici; poichè con queſto ordine retrogrado ſi va all' incontro di molti ſcrupoli e dubbj che potrebbero naſcere ſulla ſperienza fatta nel modo ſovraccennato.

Sebbene facendo rimontare in queſto modo il mercurio nella canna *AC* i riſultati delle oſſervazioni non corriſpondono eſattamente a quelli che ſi ſono avuti facendo che il mercurio diſcenda, e che il vuoto barometrico vada aumentando; pure ſono abbaſtanza conſiſtenti e ſicuri per iſtabilire con certezza, che coll' aumento del vuoto ſi accreſce l' altezza barometrica, ma non proporzionalmente alla rarefazione dell' aria che può eſſer nella parte vuota del barometro.

Non è poi meraviglia ſe i riſultati delle ſperienze ed oſſervazioni fatte obbligando il mercurio a rimontare, non corriſpondano eſattamente a quelli che ſi hanno facendo che il mercurio diſcenda, poichè dalle ſperienze riferite nel paragrafo VII conſta, che facendo fare delle oſcillazioni alla colonna mercuriale ſoſpeſa nel tubo barometrico, l'altezza della colonna varia per l' attrazione eſercitata dalla canna ſulla colonna mercuriale; onde per ottenere una piena corriſpondenza fra le oſſervazioni fatte a mercurio aſcendente e diſcendente ſarebbe ſtato neceſſario di laſciare un intervallo di tempo fra una oſſervazione e l' altra di una buona mezz' ora acciocchè l' effetto dell' attrazione che neceſſariamente inſorge per lo ſfregamento ed oſcillazione della colonna mercuriale aſcendente o diſcendente intieramente ſvaniſſe. Ma non ſi è avuto l' agio di fare queſte oſſervazioni con queſti neceſſarj intervalli di tempo; ciò nonoſtante però le differenze dei riſultati delle oſſervazioni fatte a colonna aſcendente o diſcendente non ſono molto notabili, poichè non arrivano ad eſſere maggiori di 15 centeſimi di linea ingleſe, prendendo la media di 4 ſerie di oſſervazioni fatte nello ſteſſo giorno.

Più notabili differenze ſi oſſervano ripetendo queſte ſperienze in diverſe circoſtanze di temperatura, poichè queſte differenze talvolta arrivano ad eſſere maggiori di 30 centeſimi di linea, ed anche più, e ciò per la ſola ed unica circoſtanza di una diverſa temperatura. Poichè avendo io ripetuta l' eſperienza di far diſcendere di due in due pollici il mercurio nella canna *AC* mentre la temperatura dell' aria della ſtanza in cui ſperimentava era ſtata eſpreſſamente con una ſtuffa riſcaldata di 30° Reaumuriani, per 14 pollici di vuoto l' aumento dell' altezza barometrica fu ſolo di $\frac{33}{100}$ laddove fatta la medeſima ſperienza in un giorno in cui la temperatura dell' aria era ſoltanto gr. 17 Reaumuriani, l' aumento fu notabilmente maggiore cioè di $\frac{59}{100}$ di linea ed anche più.

Sarebbe inutile il riferire minutamente le ſperienze fatte per aſſicurarſi che la grandezza del vuoto barometrico influiſce moltiſſimo ſull' altezza della colonna mercuriale; e che l' aumento dell' altezza della colonna mercuriale, poſta la ſteſſa quantità di vuoto, varia colla temperatura del mercurio contenuto nel barometro, poichè le ſperienze fatte per queſto oggetto non ſono abbaſtanza numeroſe per poter ricavare una formola che con ſicureza eſprima la quantità dell' influenza del vuoto corriſpondente ad ogni grado di temperatura del mercurio, e ad ogni pollice di vuoto.

Noſtro progetto però era d' intraprendere queſta ſerie d' oſſervazioni onde ricavare una tale cognizione, e certamente l' apparato da noi immaginato poteva fornirci queſti dati: ma sfortunatamente diſtratti in molte altre occupazioni avendo dovuto in diverſi giorni riprendere queſte ſperienze che eſiggono molta attenzione e diligenza, nel maneggiare frequentemente il barometro di prova, avvenne che qualche bolla d' aria furtivamente entrò nella canna *AC* ad alterare l' eſattezza del vuoto barometrico: nè avendo avuto finora comodo di caricare di nuovo e purgar bene d' aria queſto barometro ſiamo coſtretti a pubblicare queſte *Oſſervazioni*, che avrebbero potuto eſſer più perfette, qualora aveſſimo avuto agio di eſtenderle a tutte quelle combinazioni che eſigge la natura di queſte ricerche.

L' imperfezione

L'imperfezione però di queſte oſſervazioni non eſclude che eſſe non ſieno attendibili per dimoſtrare che l'ampiezza del vuoto barometrico influiſce ſull' altezza della colonna mercuriale, e che una tale influenza non è proporzionale alla dilatazione dell' aria che vi è ſempre nei barometri per quanto bene purgati eglino ſieno, e che eſſa varia ſecondo la temperatura del mercurio contenuto nel barometro. Ora poſta la verità di queſte importanti oſſervazioni, come mai ſi potrà luſingarſi di una certa preciſione, e corriſpondenza nelle oſſervazioni barometriche ſe non ſi è mai tenuto conto dell'ampiezza del vuoto ſovraſtante alla colonna mercuriale? Se mai ſi è dubitato che queſto effetto foſſe maggiore o minore ſecondo la diverſa temperatura del mercurio? eppure frequentemente ſuccede nella miſura delle grandi altezze che un barometro a piedi del monte abbia una temperatura notabilmente diverſa da quella che ha il barometro alla ſommità del monte. Inoltre ſe l'influenza del vuoto varia colla di lui ampiezza, e ſe una tale influenza arriva talora ad eſſere di $\frac{60}{100}$ in $\frac{70}{100}$ di linea, chi non vede la neceſſità di tener eſatto conto di queſta influenza nelle miſure delle grandi altezze, nelle quali la grandezza del vuoto varia da un pollice fino a 14 e più pollici? Perlochè utiliſſima coſa ſarebbe che taluno intraprendeſſe una ſerie di oſſervazioni ben fatte medianti le quali ſi determinaſſe la quantità dell' influenza della grandezza del vuoto barometrico di pollice in pollice dai 15 gradi al diſotto del ghiaccio fino a 25° al diſopra della congelazione. Frattanto le ſperienze che abbiamo riferito in queſto paragrafo baſtar poſſono a far ſentire l'importanza di una tale ricerca che contribuirebbe certamente a rendere più ſicuro l'uſo di queſto utile iſtrumento.

Noi crediamo che la quantità dell' influenza del vuoto non ſia proporzionale alla dilatazione dell' aria che vi è ſempre anche nei barometri meglio purgati d'aria; ma proceda dalla maggiore perſezione del vuoto barometrico, perchè a miſura che il vuoto s' ingrandiſce eſſo diviene più perfetto, in quanto che quel poco d'aria che è nella parte vota dilatandoſi in un maggiore ſpazio comprime meno la ſottopoſta colonna mercuriale. Ora il mercurio eſſendo meno compreſſo dall' aria contenuta nello ſpazio voto ſi cangia in un vapor elaſtico che eſtendendoſi nello ſpazio voto comprime eſſo pure la ſottopoſta colonna mercuriale, per modo che non ſi deve tener conto della ſola compreſſione dell'aria rarefatta che è nella parte vota del barometro, ma anche di queſto vapor elaſtico mercuriale la di cui quantità ed elaterio è più o meno grande ſecondo che è più o meno grande e conſeguentemente perfetto il vuoto barometrico.

Queſto vapor elaſtico mercuriale non è un ente ipotetico. Negli atti dell' Accademia di Parigi (*) è riferita un' oſſervazione che dimoſtra che il mercurio quando non è compreſſo dall' aria ad un diſcreto grado di calore ſi cangia in vapori; poichè furono oſſervate le pareti della parte vuota del barometro ſtabilmente fiſſato ad un muro coperte da minutiſſimi globetti mercuriali; fenomeno che io pure ebbi occaſione di ammirare in Toſcana. Il Sig. *Roy* inoltre, il Sig. *Ramſdem* ed altri oſſervarono eſſi pure queſta ſingolare ſublimazione del mercurio; anzi il Sig. *Roy* (**) nella ſua bella memoria del barometro riferiſce d'aver fatto l' eſperienza di riſcaldare tutto il mercurio contenuto nella canna barometrica, mentre la parte vota era raf-

---

(*) Mem. de l' Acad. Roy. des Sciences.
(**) Phil. Tranſ.

Fig. 1.

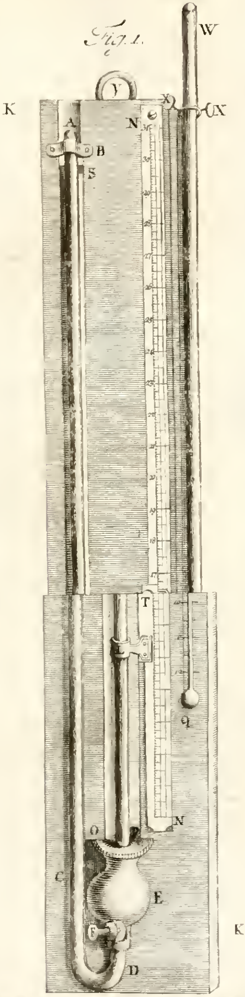

W
Y
X
X
K
A
N
B
S
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
T
L
q
O
N
C
E
F
D
K

Fig. 8.

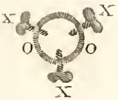


Fig. 3.

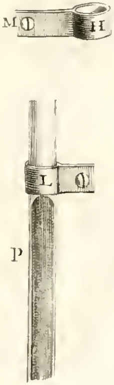


Fig. 1

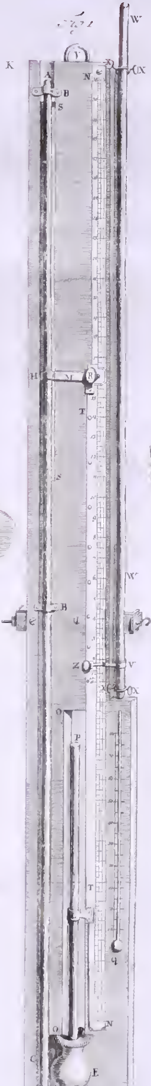

W
K
A
B
S
N
X
X
H
M
R
T
B
Q
W
V
Z
X
X
O
P
T
q
N
O
C
E
D
K

Fig. 8

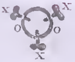


Fig. 1

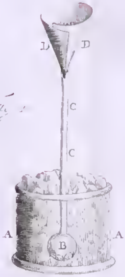


Fig. 3

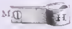


Fig. 5

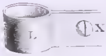


Fig. 4

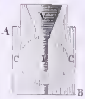


Fig. 6

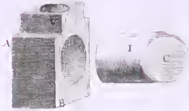


Fig. 9

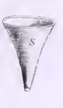


Fig. 2

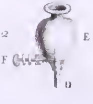


Fig. 7

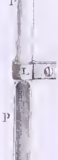
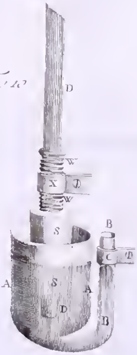


Fig. 10


D
W
X
D
W
B
S
C
D
A
S
A
D
B

freddata da un bagno di ghiaccio peſto; ed aſſicura di aver oſſervato che il freddo applicato al vuoto barometrico faceva condenſare il vapor elaſtico mercuriale ſulle pareti del tubo ſotto forma di viſibili globetti mercuriali. Tanto è vero che anche il mercurio, toltogli la compreſſione dell'aria, ſi volatilizza e ſi ſublima; onde la proprietà oſſervata da *Nairne* (*) dei fluidi facilmente evaporabili quando non ſono compreſſi dall'aria è comune al mercurio che è un fluido di meno facile evaporazione.

Queſta evaporazione del mercurio e trasformazione in un vapore elaſtico è facilitata e promoſſa dal calore ſiccome accade ai liquori evaporabili, onde non è meraviglia ſe le oſſervazioni ſull'influenza dell'ampiezza del vuoto barometrico non ſi corriſpondono quando ſono fatte in temperature diverſe, perchè è in ragione della temperatura la quantità di queſto vapore elaſtico mercuriale che ſi ſvolge dal mercurio quando non è compreſſo dal peſo dell' aria.

Forſe e ſenza forſe la quantità di queſto vapore ſvolgenteſi dal mercurio variar potrebbe in ragione dell' ampiezza della ſuperficie del mercurio. Ma non affrettiamoci a pronunziare prima di conſultare l' oracolo della ſperienza.

(*) Tranſ. Philoſ. Journal de Phiſ. de Rozier.

NUOVA INVESTIGAZIONE

DELLA

SOMMA GENERALE DELLE SERIE.

Del Sig. ANTON-MARIO LORGNA Direttore delle Scuole Militari di Verona.

RIandando la ſtoria de' progreſſi umani nelle Scienze, e nell' Arti, ella è coſa ordinaria il vedere alle più luminoſe ſcoperte fatta ſtrada da alcune cognizioni per l'innanzi ſconneſſe e ſterili da molti anni, che baſtava ravvicinare per diſcernervi un' intima relazione, e una fecondità del tutto inaſpettata. Si potrebbe dire in qualche modo delle produzioni dell' intelletto quello, che ſuol dirſi dell' operazioni della natura: che non ſi fanno altramente per ſalto. E ſe pur talvolta ci appariſcono di getto, ciò addiviene perchè non abbiamo preſenti tutte le loro relazioni, nè le fila capitali, alle quali ſi attengono neceſſariamente. Il ſolo ormai familiariſſimo Calcolo Differenziale può darcene un eſempio ſegnalato; calcolo, che unito al ſuo inverſo ha fatto mutar faccia alle Scienze Matematiche. Non aveavi, che un breve paſſo da fare, una non difficile eſtenſione da darſi al modo di calcolare gli elementi delle linee, e dell' aree di *Barrovio*, e di *Wallis* per metterlo in tutta la luce, che ha avuto prima dal ſublime ingegno di *Newton*, indi da quello di *Leibnitz*. Così combinando i metodi di *Barrovio*, e di *Wallis* con altri precedenti, e con quello eziandio degl' indiviſibili del *Cavalieri*, e queſto coll' antico dell' eſauſtioni, è agevole il conoſcere, che tutto va per iſcala, e che d'ordinario un' invenzione non è che un anello aggiunto ad una lunga catena di cognizioni anteriori.

Egli è noto da gran tempo, che prendendo la differenza ſucceſſivamente de' termini conſecutivi di una ſerie, comunque eſſi procedano con legge o ſenza legge, la ſerie delle differenze che ne riſulta ammette ſempre una ſomma nella combinazione di alcuni termini della ſerie primitiva, onde ha tratto l'origine, la quale perciò vien detta comunemente Sommatoria o Sommatrice, relativamente alla ſerie derivata, di cui ella ſomminiſtra la ſomma. Ma ſe non v' ha ſerie da cui non poſſa trarſi la ſerie delle differenze, non è del pari agevole coſa il ritorno, o il rimontare da una ſerie alla ſerie primitiva, da cui può ella eſſere ſtata originata. Se ſi eccettuino le ſerie a differenze coſtanti, e qualche caſo particolare di ſerie frazionali, ond' è ſtata aſſegnata la ſomma per queſta via dalla mano poſſente del Sig. *Eulero* nel principio delle ſue Inſtituzioni di Calcolo Differenziale, non abbiamo ſu di ciò alcun altro importante tentativo, ch' egli ſteſſo chiama difficiliſſimo. E pure la natura ſteſſa della coſa il vuole, che tra l' una e l' altra v' abbia uno ſtretto legame, una determinata conneſſione, per cui, eſſendo dato il termine generale della ſerie delle differenze, ſia pure in pronto il termine generale della ſommatrice.

Biſogna credere, che queſti due oggetti non ſieno mai ſtati abbaſtanza avvicinati. Non avrebbero per certo traſcurato i Geometri di profittarne, e ne ſarebbe conſeguito indubitatamente un paſſo de' più vantaggioſi nell' ardua Teoria delle ſerie. Di fatto pigliandola in eſame a parte a parte ne' diverſi Autori, che vi ſi ſono applicati, vedeſi quaſi per ogni claſſe capitale meſſo in uſo e adattato un metodo particolare. Ma quello che ha per obbietto le ſerie ſuſcettibili di ſomma algebraica, non ſi eſtende ſu le traſcendenti. Un altro le comprende entrambe, ma ſotto un' eſpreſſione compoſta d' infiniti termini, la quale non s' interrompe e divien finita, che in alcuni caſi ſingolari.

Dove all' oppoſito internandoſi più addentro, che non s' è fatto, nell' indole loro, ſi avrebbero ſvolti ſintomi baſtevoli, onde ſcuoprire le ſerie ſommatrici, alle quali ſi riferiſcono neceſſariamente. V' ha poi più d' un ordine di ſerie totalmente intrattabili, alle quali non può aggiugnere alcuno de' metodi conoſciuti ſinora, in cui pure non è ſommamente oſcura l' intima relazione colle ſommatrici. Queſto è quello, che imprendo a moſtrare in queſta Memoria, ove con andamento facile e ſempre uniforme ſi riducono ad un unico metodo ordini di ſerie, che potevano parere incompatibili ſotto una legge comune per tutti. L' ho fatto rapidamente, eſſendomi propoſto men di fare un Trattato generale ſu queſta immenſa dottrina, che di aprirvi una ſtrada non battuta, in cui per ſin le ſerie, che non ammettono propriamente termine generale, e quelle che non ne ammettono che di traſcendenti, non ricuſano di ſtare a fianco dell' Algebraiche, e delle Geometriche più ſemplici. Non laſcerò di ribatterla, e di far parte a' Geometri de' progreſſi, che mi ſarà permeſſo di farvi; non eſſendo infruttoſo alcun paſſo ulteriore, che poſſa farſi a perfezione ed incremento di una Scienza, ch' è il rifugio ultimo delle matematiche ſublimi, e a cui ſi attiene il calcolo integrale dell' equazioni differenziali finite, come ſi avrà occaſione di vederlo nella ſuſſeguente Memoria.

PRINCIPJ FONDAMENTALI.

§. I.

Qualunque progreſſione regolare creſcente o decreſcente, di qualunque natura ella ſiaſi, può ſempre ridurſi alla forma (K)

$A,\ A+b,\ A+b+c,\ A+b+c+d$, ecc. . . . . . (K)
conſiderando, che una certa grandezza A vada continuamente variando ſtato, e diventando ſucceſſivamente $A+b$, $A+b+c$, ecc. e la progreſſione altro non ſia che la diſpoſizione in ſerie di queſti ſtati ſucceſſivi della grandezza A.

§. II.

Per conſeguenza la differenza di due termini proſſimi ſarà neceſſariamente la variazione dall' uno all' altro di queſti ſtati ſucceſſivi; e la ſerie delle differenze de' termini (L)

$b,\ c,\ d,\ e$, ecc. . . . . (L)

ſarà la collezione ordinata di tutte queſte variazioni conſecutive.

§. III.

Se coll' indeterminata x ſi eſprima nella progreſſione (K) la località in generale di uno ſtato qualunque della grandezza A, è coſa nota

I. Che vi ha una certa funzione di x, la quale rappreſenta generalmente tutti queſti ſtati, o tutti i termini della progreſſione, e per ciò ſuol dirſi termine generale della progreſſione.

II. Che qualunque volta, prendendo la ſomma ſucceſſivamente di due termini, di tre, di quattro ecc. della progreſſione (K), ne riſulta un' altra progreſſione regolare avente per termine generale una nuova funzione di x, queſta funzione vien comunemente detta ſomma generale della progreſſione (K).

III. E che la ſomma della progreſſione (K) all' infinito è quello che queſta funzione diventa, allorchè ſi aſſegna all' indeterminata x un valore infinito.

§. IV.

Chiamando pertanto T il termine generale della progreſſione (K), T' quello che diventa T ſoſtituendovi $x+1$ in luogo di x; ſarà neceſſariamente T' il termine generale d' una progreſſione, che comincia dal ſecondo termine della progreſſione (K).

§. V.

E prendendo la differenza T'' delle due funzioni T, T', è manifeſto, che T'' è il termine generale della ſerie (L) delle variazioni (§. II.), o delle differenze ſucceſſive de' termini della ſerie primitiva.

§. VI.

Se ſi ſottragga la grandezza variante A dal termine $x.^{mo}$ della progreſſione primitiva, il reſiduo non è altro evidentemente, che la ſerie (L) delle differenze compreſe tra il primo termine, e il termine $x.^{mo}$; e però, eſſendo T il termine generale della ſerie primitiva, la differenza tra la funzione T e la grandezza variante A ſarà neceſſariamente uguale alla ſomma di $x-1$ termini della ſerie delle differenze (L).

§. VII.

Per conſeguenza la differenza tra la funzione T' e il primo termine A ſarà la ſomma generale della ſerie delle differenze (L), di cui T'' è il termine generale. Imperciocchè, eſſendo la differenza tra la funzione T e il primo termine A uguale alla ſomma di $x-1$ termini della ſerie (L) (§. VI.), e T' eſſendo quello che diventa T ponendovi $x+1$ in luogo di x, egli è manifeſto,

manifeſto, che la differenza tra T' e il primo termine A ſarà uguale alla ſomma di x termini della ſerie (L).

Queſta nuova funzione pertanto ſarà il termine generale d'una ſerie avente per termini le ſomme ſucceſſive de' termini della ſerie (L), e però ne eſprimerà ella la ſomma generale (§. III).

§. VIII.

Se dunque ſi faccia, che la ſerie (L) rappreſenti generalmente qualſivoglia progreſſione regolare, di cui ſia T'' il termine generale, per determinarne la ſomma baſterà rimontare dal termine T'' ai termini T, T'.

§. IX.

E poichè $T'' = T' - T$, ſarà $T' - T$ ciò che diremo coſtantemente la forma differenziale di qualunque termine generale T'', ſiccome quello, che riſulta dalla differenza de' termini T', T.

CAPITOLO PRIMO.

DELLE SERIE A DIFFERENZE COSTANTI.

PROBLEMA I.

Sommare le Serie a differenze coſtanti di qualunque ordine elle ſieno.

RISOLUZIONE.

Eſſendo l' eſpreſſione (M)

$$A + (B + 2Bx) + (C + 3Cx + 3Cx^2)$$
$$+ (D + 4Dx + 6Dx^2 + 4Dx^3) \;.\;.\;.\; + \mathcal{Q}(x + 1)^n$$
$$- \mathcal{Q}x^n \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (M)$$

il termine generale delle ſerie a differenze coſtanti, in cui x è l' eſponente de' termini; il ſi metta ſotto la forma differenziale (N) (§. IX)

$$A(x+1)+B(x+1)^2+C(x+1)^3+\text{ecc.}\ldots\ldots$$
$$-Ax-Bx^2-Cx^3-\text{ecc.}\ldots\ldots\ldots\ (N)$$

Si ſoſtituiſca l' unità in luogo di x nel ſecondo membro (O)

$$Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{ecc.}\ldots\ldots\ldots\ (O)$$

preſo affermativamente, il che ſomminiſtra la quantità (O')

$$A+B+C+D+E+\text{ecc.}\ldots\ldots\ldots\ (O')$$

e ſi prenda la differenza (P) tra le eſpreſſioni (O), (O')

$$Ax+Bx^2+Cx^3+\text{ecc.}-A-B-C-D-\text{ecc.}\ldots\ (P).$$

Dopo di che ſi metta in (P) $x+1$ in luogo di x; oppure ſi ſottragga, ch' è lo ſteſſo, la quantità (O') dal primo membro della forma differenziale (N); e ſi avrà l' eſpreſſione (R)

$$Ax+(2Bx+Bx^2)+(3Cx+3Cx^2+Cx^3)$$
$$+\text{ecc.}\ldots\ldots+\mathfrak{Q}(x+1)^n-\mathfrak{Q}\ldots\ldots\ldots\ (R)$$

dico, che (R) è la ſomma generale di tutte le ſerie a differenze coſtanti.

Imperciocchè, ponendo $x+1$ in luogo di x nel ſecondo membro dell' eſpreſſione (N), ne riſulta il primo manifeſtamente. Dunque, eſſendo $Ax+Bx^2+Cx^3$ $+$ ecc. il termine generale d' una ſerie, ſarà neceſſariamente $A(x+1)+B(x+1)^2+C(x+1)^3+$ ecc. il termine generale d' una ſerie, che comincia dal ſecondo termine di quella (§. IX.). E però la differenza (M) di queſte due funzioni è il termine generale della ſerie delle variazioni (§. V.) o delle differenze ſucceſſive de' termini della ſerie, di cui la funzione (O) è il termine generale; $A+B+C+D+$ ecc. è la quantità variante; e l' eſpreſſione (P) è la ſomma generale di $x-1$ termini della ſerie delle differenze (§. VI). Ma l' eſpreſſione (R) è quello che diventa (P) mettendovi $x+1$ in luogo di x. Per conſeguenza ſarà

(R) la ſomma generale della ſerie (§. VII), di cui la funzione (M) è il termine generale, cioè di tutte le ſerie a differenze coſtanti. Il che ecc.

Esempio.

Sia propoſta una ſerie a differenze coſtanti, di cui ſi dimanda la ſomma, eſſendo (S) il ſuo termine generale

$$9 - 2x + 2x^2 \ldots\ldots. \; (S)$$

Biſogna primieramente trarre dall' eſpreſſione (M), che rappreſenta i termini di queſte ſerie generalmente, il termine generale delle ſerie a ſeconde differenze coſtanti, cioè

$$A + (B + 2Bx) + (C + 3Cx + 3Cx^2).$$

Per ritrovare i valori delle indeterminate A, B, C non s' ha che a formare le tre ſeguenti equazioni $A + B + C = 9$; $2B + 3C = -2$; $3C = 2$, dalle quali ſi ricaverà agevolmente $A = \frac{31}{3}, B = -2, C = \frac{2}{3}$. Dopo di che ſi traggano dall' eſpreſſione generale delle ſomme (R) i termini comprendenti le ſteſſe indeterminate A, B, C, vale a dire

$$(A + 2B + 3C)x + (B + 3C)x^2 + Cx^3$$

e vi ſi ſoſtituiſcano i valori ritrovati. L' eſpreſſione, che ne verrà

$$\frac{25x}{3} + \frac{2x^3}{3}$$

ſarà la ſomma generale ricercata.

Scolio I.

E' ſuperfluo l' aggiugnere altri eſempj, eſſendo per sè chiaro e facile il metodo per tutti gli ordini di queſta natura di ſerie, intorno alle quali è ſtato ſcritto da tanti illuſtri uomini e così diffuſamente in altri tempi, come può vederſi nell'Opere di *Faulhaber*, *Ramellini*, *Wallis*, *Mercator*, *Preſtet* ecc. parlando de' più antichi, e in quelle più recenti de' dottiſſimi *Bernoulli*, *Eulero*, *Riccati* ecc. Ne ho trattato io ſteſſo con un mio particolar metodo in un Opuſcolo ſtampato in Verona nel 1767. Ma non laſcia per queſto di raccomandarſi abbaſtanza il metodo preſente per la ſomma facilità e ſemplicità con cui poſſono elle maneggiarſi, e con queſta ſegnata differenza da tutti gli altri, che non è altramente riſtretto a queſta ſola e ſingolar claſſe di ſerie.

SCOLIO II.

Paſſando a trattare ne' ſuſſeguenti Capitoli d' altre nature di progreſſioni, penſo di ommettere le dimoſtrazioni, che richiederebbe ogni particolare propoſizione, per non ripetere ſempre una medeſima coſa, eſſendo tutte appoggiate a' principj fondamentali, che abbiamo premeſſo, e dello ſteſſo preciſo tenore della precedente.

CAPITOLO SECONDO.

DELLE SERIE FRAZIONALI A SOMMA ALGEBRAICA.

LEMMA.

La differenza di due frazioni della forma (I) (II)

$$\frac{f}{m\,.\,2m\,.\,3m\,.\,.\,.\,xm} \;\ldots\ldots\; (I) \qquad \frac{d}{2m.3m.4m\ldots(x+1)m} \ldots\ldots (II)$$

ſi riduce alla forma (III)

$$\frac{\pm f(x+1)m \mp dm}{m\,.\,2m\,.\,3m\,\ldots\,(x+1)m} \ldots\ (III).$$

Imperciocchè, non differendo i fattori de' denominatori tra di sè fuorchè in queſto, che il primo della frazione (*II*) comincia dal ſecondo della frazione (*I*), e l'ultimo di queſta rieſce il penultimo di quella, è manifeſto che tutti i fattori della frazione (*I*), eccettuato il primo, ſono i fattori medeſimi della frazione (*II*), eccettuato l'ultimo. Per conſeguenza il numeratore della differenza è patentemente $\pm f(x+1)m \mp dm$, e il denominatore $m\,.\,2m\,.\,3m\,\ldots\,(x+1)m$. Dunque ecc.

PROBLEMA II.

Sommare le ſerie frazionali a fattori ſemplici conſecutivi.

RISOLUZIONE.

Poichè l'eſpreſſione (*M*) è il termine generale di queſte ſerie

$$\frac{\pm\big(A+Bx+Cx^2+\text{ecc.}\ldots Qx^n\big)\big(a+b(x+n+1)\big)}{\big(a+bx\big)\big(a+b(x+1)\big)\big(a+b(x+2)\big)\ldots\big(a+b(x+n+1)\big)}$$
$$\frac{\mp\big(A+B(x+1)+C(x+1)^2+\text{ecc.}\ldots Q(x+1)^n\big)(a+bx)}{\big(a+bx\big)\big(a+b(x+1)\big)\big(a+b(x+2)\big)\ldots\big(a+b(x+n+1)}$$
$$\ldots\ldots\ (M)$$

la ſi ponga ſotto forma differenziale, la quale ſi ridurrà, pel Lemma precedente, alla forma (*N*)

$$\pm\frac{A+Bx+Cx^2+\text{ecc.}\ldots Qx^n}{\big(a+bx\big)\big(a+b(x+1)\big)\ldots\big(a+b(x+n)\big)}$$
$$\mp\frac{A+B(x+1)+C(x+1)^2\ldots+Q(x+1)^n}{\big(a+b(x+1)\big)\big(a+b(x+2)\big)\ldots\big(a+b(x+n+1)\big)}$$
$$\ldots\ldots\ (N)$$

Si ſoſtituiſca l'unità in luogo di x nel primo membro del binomio (N), con che ſi avrà l'eſpreſſione (C)

$$\frac{A+B+C\ldots\ldots+Q}{(a+b)\ (a+2b)\ldots.(a+b(n+1))}\ldots..(C)$$

e preſa la differenza tra il ſecondo membro del binomio (N), e la quantità (C), ſi avrà l'eſpreſſione (Q)

$$\frac{\pm(A+B+C+\text{ ecc}\ldots Q)(a+b(x+1))(a+b(x+2))\ldots.(a+b(x+n+1))}{(a+b)(a+2b)..(a+b(n+1))((a+b(x+1)\ (a+b(x+2))..(a+b(x+n+1)))}$$

$$\frac{\mp((a+b)(a+2b)\ldots(a+b(n+1)))(A+B(x+1)+C(x+1)^2+\ldots Q(x+1)^n)}{(a+b)\ (a+2b)\ ..\ (a+b(n+1))((a+b(x+1)\ (a+b(x+2))\ ..(a+b(x+n+1)))}$$

$$\ldots\ldots.(Q)$$

la quale è la ſomma generale delle ſerie frazionali a fattori ſemplici conſecutivi, e a ſomma algebraica.

La Dimoſ. è la ſteſſa, come nella I. Propoſizione.

ESEMPIO.

Sia da ſommarſi la ſerie, di cui $\frac{1+x}{x(1+x)(2+x)}$ è il termine generale.

Poichè ſono tre i fattori al denominatore, ſi faccia $n=1$ nel termine generale (M); ed eſſendo decreſcente la ſerie, ſi avrà generalmente

$$\frac{(A+Bx)\ (a+b(x+2))-(A+B(x+1))\ (a+bx)}{(a+bx)\ (a+b(x+1))\ (a+b(x+2))}$$

$$=\frac{2Ab-aB+bBx}{(a+bx)\ (a+b(x+1))\ (a+b(x+2))}$$

Paragonando queſt'eſpreſſione generale col termine generale propoſto ſi ricaverà pel valore delle indeterminate $a=0$, $b=1$, $A=\frac{1}{2}$, $B=1$. Si tragga ora dalla ſomma generale (Q), colla ſoſtituzione di $n = 1$, l'eſpreſſione generale ſeguente

$$\frac{(A+B)\big(a+b(x+1)\big)\big(a+b(x+2)\big) - \big(A+B(x+1)\big)(a+b)(a+2b)}{(a+b)(a+2b)\big(a+b(x+1)\big)\big(a+b(x+2)\big)}$$

e vi ſi ſoſtituiſcano i valori ritrovati. La frazione riſultante $\frac{x(3x+5)}{4(1+x)(2+x)}$ ſarà la ſomma generale ricercata, e poſto $x = \infty$, ſarà $\frac{3}{4}$ la ſomma della ſerie all'infinito.

PROBLEMA III.

Sommare le ſerie frazionali a fattori compoſti conſecutivi.

Risoluzione.

Eſſendo l'eſpreſſione (M)

$$\pm\frac{(A+Bx+Cx^2\ldots\!+Qx^n)\big(M+N(x+1)\ldots\!+S(x+1)^{n+1}\big)}{(M+Nx+Ox^2\ldots\!+Sx^{n+1})\big(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots\!+S(x+1)^{n+1}\big)}$$
$$\mp\frac{\big(A+B(x+1)\ldots\!+Q(x+1)^n\big)(M+Nx\ldots\!+Sx^{n+1})}{(M+Nx+Ox^2\ldots\!+Sx^{n+1})\big(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots\!+S(x+1)^{n+1}\big)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots (M)$$

il termine generale di queſte ſerie, il ſi metta ſotto la forma differenziale (N)

$$\pm\frac{A+Bx+Cx^2\ldots\!+Qx^n}{M+Nx+Ox^2\ldots\!+Sx^{n+1}}$$
$$\mp\frac{A+B(x+1)+C(x+1)^2\ldots\!+Q(x+1)^n}{M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots\!+S(x+1)^{n+1}}\ldots\ldots(N)$$

Poſto ciò, ſi ſoſtituiſca l'unità in luogo di x nel primo membro dell'eſpreſſione (N); dal che riſulterà la quantità (C);

$$\frac{A+B+C+D\ldots\ldots+\mathcal{Q}}{M+N+O\ldots\ldots+S}\ \ldots\ldots(C)$$

e ſi prenda la differenza tra la quantità (C) e il ſecondo membro della forma (N). L'eſpreſſione riſultante $(\mathcal{Q})$.

$$\frac{\pm\left(A+B+C\ldots\ldots+\mathcal{Q}\right)\left(M+N(x+1)\ldots\ldots+S(x+1)^{n+1}\right)}{\left(M+N+O\ldots\ldots+S\right)\left(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots\ldots+S(x+1)^{n+1}\right)}$$

$$\frac{\mp\left(M+N+O\ldots\ldots+S\right)\left(A+B(x+1)+C(x+1)^2\ldots\ldots+\mathcal{Q}(x+1)^n\right)}{\left(M+N+O\ldots\ldots+S\right)\left(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots\ldots+S(x+1)^{n+1}\right)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathcal{Q})$$

ſarà la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

ESEMPIO.

Trovare la ſomma della ſerie, di cui $\frac{1+3x+x^2}{x^2(1+x)^2}$ è il termine generale.

Poichè i fattori del denominatore non eccedono il ſecondo grado, è agevole il vedere, che fa d'uopo ſupporre $n=1$, perchè i fattori del denominatore nell'eſpreſſione generale (M) non oltrepaſſino queſto grado. E però la frazione, che rappreſenta il termine generale di tali ſerie, ſarà neceſſariamente di queſta forma

$$\frac{AN-BM+AO+(2AO+BO)x+BOx^2}{\left(M+Nx+Ox^2\right)\left(M+N(x+1)+O(x+1)^2\right)}$$

Ora, paragonando queſta eſpreſſione col termine generale dato, ſi trova facilmente eſſere $M=N=0$, $A=B=O=1$. Soſtituendo pertanto queſti valori nell'eſpreſſione $(\mathcal{Q})$, ne riſulta la forma

$$\frac{3x+2x^2}{(1+x)^2}$$

$$\frac{3x + 2x^2}{(1+x)^2}$$

che ſarà la ſomma generale ricercata.

SCOLIO.

Eſaminando il termine generale *(M)* di queſta ſorta di ſerie nella Propoſizione precedente, ſi riconoſce agevolmente, che il numero de' fattori ſemplici nel denominatore eccede di due unità il numero di ſimili fattori nel numeratore. Queſta condizione è neceſſaria non meno per queſte ſerie, che per quelle a fattori ſemplici conſecutivi, perchè poſſano eſſere ſuſcettibili di ſomma algebraica. Ma havvi ancora un' altra condizione da ſoddisfare nelle ſerie a fattori compoſti per riſpetto a' coefficienti. Ne' termini generali delle ſerie della II. Propoſizione il numero $n+1$ delle indeterminate, che debbono definirſi, non eccede il numero de' termini che poſſono aver luogo ne' numeratori de' termini generali propoſti; ma non è così nelle ſerie a fattori compoſti. Imperciocchè il numero delle indeterminate eſſendo parimente $n+1$, i coefficienti che poſſono aver luogo ne' numeratori de' termini generali ne' caſi particolari ſono al numero di $2n+1$. In conſeguenza è neceſſario, che queſti coefficienti abbiano tra di sè una determinata relazione, affinchè le equazioni poſte poſſano tutte aver luogo ad un tempo. E appunto, oltre all' enunciata comune colle ſerie a fattori ſemplici, v' è queſta condizione di più da adempiere per le ſerie a fattori compoſti, perchè ammettano ſomma algebraica; il che s' accorda puntualmente con quello che da altri ancora è ſtato avvertito.

CAPITOLO TERZO.

DELLE SERIE RICORRENTI.

PROBLEMA IV.

Trovare la ſomma generale delle progreſſioni geometriche.

Risoluzione.

Poichè l'eſpreſſione

$$(\pm A \mp AK^{b})\, K^{a+bx} \ldots\ldots\ (M)$$

è il termine generale delle progreſſioni geometriche, il ſi metta ſotto la forma differenziale (N)

$$\pm AK^{a+bx} \mp AK^{a+b(x+1)} \ldots\ldots\ (N).$$

Si ſoſtituiſca poi nel primo membro AK^{a+bx} l'unità in luogo di x, e ſi avrà l'eſpreſſione AK^{a+b}. Se pertanto ſi prenda la differenza tra queſta quantità e il ſecondo membro della forma differenziale $AK^{a+b(x+1)}$, l'eſpreſſione riſultante $(\mathcal{Q})$

$$AK^{a+b}\, (\pm 1 \mp K^{bx}) \ldots\ldots\ (\mathcal{Q})$$

ſarà la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA V.

Sommare le ſerie compoſte di progreſſioni algebraiche, e geometriche.

Risoluzione.

Eſſendo la formula (M)

$$\pm K^{a+bx}\left(A'-A'K^{b}+Ax-AK^{b}(x+1)+Bx^{2}-BK^{b}(x+1)^{2}\ldots+\mathcal{Q}x^{n}-\mathcal{Q}K^{b}(x+1)^{n}\right)$$

. . . . (*M*)

il termine generale di queſte ſerie, il ſi metta ſotto la forma differenziale (*N*)

$$\pm\left(A'+Ax+Bx^{2}\ldots+\mathcal{Q}x^{n}\right)K^{a+bx}\mp\left(A'+A(x+1)+B(x+1)^{2}\ldots+\mathcal{Q}(x+1)^{n}\right)K^{a+b(x+1)}$$

. . . . (*N*)

ſoſtituendo poi l'unità in luogo di x nel primo membro della forma (*N*), ſi prenda la differenza tra la quantità che ne riſulta e il ſecondo membro, e ſi troverà l'eſpreſſione ($\mathcal{Q}$)

$$\pm K^{a+b}\left(A'-A'K^{bx}+A-AK^{bx}(x+1)+B-BK^{bx}(x+1)^{2}\ldots+\mathcal{Q}-\mathcal{Q}K^{bx}(x+1)^{n}\right)$$

. . . . ($\mathcal{Q}$)

Sarà pertanto ($\mathcal{Q}$) la ſomma generale, che ſi ricercava. Il che ecc.

ESEMPIO.

Sia da trovarſi la ſomma generale della ſerie, che ha per termine generale la funzione $2^{x}(1+x+x^{2})$. Giacchè la più alta poteſtà di x nel termine generale della ſerie algebraica non oltrepaſſa il ſecondo grado, ſi faccia $n=2$ nel termine generale (*M*). Eſſendo creſcente la ſerie, l'eſpreſſione generale, che ne riſulterà, ſarà

$$K^{a+bx}\left(-A'+A'K^{b}-Ax+AK^{b}(x+1)-Bx^{2}+BK^{b}(x+1)^{2}\right)$$

in cui poſto $K=2$, $a=0$, $b=1$, ſi avrà

$$2^{x}\left(A'+2A+2B+(A+4B)x+Bx^{2}\right)$$

e però, paragonando i termini tra di sè, ſi troverà eſſere $A'=5$, $A=-3$, $B=1$. Soſtituiti queſti valori nell' eſpreſſione ($\mathcal{Q}$), per eſſere creſcente la ſerie, ſarà

$$2^{x}(6-2x+2x^{2})-6$$

la ſomma generale ricercata.

COROLLARIO I.

Egli è dimoſtrato da gran tempo, che i termini generali di tutte le ſerie Ricorrenti ſono formule eſponenziali, o eſponenziali moltiplicate con quantità coſtanti, oppure con funzioni di x intiere e razionali. E poichè col mezzo della IV e V Propoſizione ſi ſommano tutte le ſerie aventi sì fatte eſpreſſioni per termini generali, ſi avrà la ſomma conſeguentemente di tutte le ſerie Ricorrenti, che a tali ſerie ſi riducono generalmente.

COROLLARIO II.

Se ſi faccia $n = o$ nelle due eſpreſſioni (M), (Q) della Prop. precedente, ſi ottiene il termine e la ſomma generale di tutte le ſerie eſponenziali della IV.

COROLLARIO III.

E facendo ſemplicemente $K = 1$, ſi cangiano toſto queſte ſerie in ſerie a differenze coſtanti, il che ſi conforma a quanto ha dimoſtrato il Sig. *Moivre* nel ſuo eccellente libro *de Menſura ſortis*, e il Sig. Daniele *Bernoulli* nel III. Vol. de' vecchj Comentarj di Pietroburgo per vie differentiſſime.

CAPITOLO QUARTO.

DELLE SERIE FRAZIONALI A SOMMA ESPONENZIALE.

PROBLEMA VI.

Sommare le ſerie frazionali a fattori ſemplici conſecutivi, e a ſomma eſponenziale.

Risoluzione.

La formula (*M*)

$$\frac{\pm K^{a+bx}\big((A+Bx+Cx^2\ldots+Qx^n)\ (a+b(x+n+1))\big)}{(a+bx)\big(a+b(x+1)\big)\big(a+b(x+2)\big)\ldots.\big(a+b(x+n+1)\big)}$$

$$\frac{-K^{a+bx+b}\big((a+bx)\ (A+B(x+1)\ \ldots+Q(x+1)^n)\big)}{(a+bx)\big(a+b(x+1)\big)\big(a+b(x+2)\big)\ldots.\big(a+b(x+n+1)\big)}$$

. . . . (*M*)

è il termine generale di queſte ſerie. Il ſi metta dunque ſotto la forma differenziale (*N*), ſecondo il lemma del II. Cap.

$$\pm\frac{A+Bx+Cx^2\ldots.+Qx^n}{(a+bx)\ldots.(a+b(x+n))}K^{a+bx}$$

$$\mp\frac{A+B(x+1)+C(x+1)^2\ldots..+Q(x+1)^n}{\big(a+b(x+1)\big)\ldots\ldots\big(a+b(x+n+1)\big)}K^{a+b(x+1)}$$

. . . . (*N*)

e meſſa l' unità in luogo di x nel primo membro di queſta forma, ſi prenda la differenza tra la quantità che ne riſulta e il ſecondo membro. Si ricaverà la formula (Q)

$$\frac{\pm K^{a+b}\Big((A+B+\text{ecc.}\ldots Q)((a+b(x+1))\ldots\ldots(a+b(x+n+1))\Big)}{\Big((a+b)(a+2b)\ldots(a+b(n+1))\Big)\Big((a+b(x+1))(a+b(x+2))\ldots(a+b(x+n+1))\Big)}$$

$$\frac{-K^{a+bx+b}\Big(((a+b)\ldots a+b(n+1))(A+B(x+1)\ldots+Q(x+1)^{n})\Big)}{\Big((a+b)(a+2b)\ldots(a+b(n+1))\Big)\Big((a+b(x+1))(a+b(x+2))\ldots(a+b(x+n+1))\Big)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ (Q)$$

la quale ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA VII.

Sommare la ſteſſa claſſe di ſerie a fattori compoſti conſecutivi.

RISOLUZIONE.

Poichè l' eſpreſſione (M)

$$\pm K^{a+bx}\left(\frac{(A+Bx\ldots+Qx^{n})(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1})}{(M+Nx\ldots+Sx^{n+1})(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1})}\right)\left(\frac{-K^{b}(A+B(x+1)\ldots+Q(x+1)^{n})(M+Nx\ldots+Sx^{n+1}}{(M+Nx\ldots+Sx^{n+1})(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1})}\right)$$

$$\ldots\ldots\ (M)$$

è il termine generale di queſte ſerie, gli ſi dia la forma differenziale, che gli è propria (N)

$$\pm\frac{A+Bx\ldots+Qx^{n}}{M+Nx\ldots Sx^{n+1}}K^{a+bx}$$
$$\mp\frac{A+B(x+1)\ldots+Q(x+1)^{n}}{M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1}}K^{a+b(x+1)}\ \ldots\ldots\ldots(N)$$

Ponendo in ſeguito l'unità in luogo di x nel primo termine dell'eſpreſſione (N), dal che riſulta la quantità (C),

$$(C)\ldots\ldots\ \frac{A+B+C\ldots+Q}{M+N+O\ldots+S}K^{a+b}$$

ſi prenda la differenza tra il ſecondo termine della formula (N) e la quantità (C), e ſi avrà l'eſpreſſione $(\mathcal{Q})$

$$\pm K^{a+b}\left(\frac{((A+B+C\ldots+\mathcal{Q})(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1})}{(M+N+O\ldots+S)\left(M+N(x+1)+O(x+1)^{2}\ldots+S(x+1)^{n+1}\right)}\right)$$
$$\left(\frac{-K^{bx}(A+B(x+1)\ldots+\mathcal{Q}(x+1)^{n})(M+N+O\ldots+S))}{(M+N+O\ldots+S)\left(M+N(x+1)+O(x+1)^{2}\ldots+S(x+1)^{n+1}\right)}\right)$$

.........$(\mathcal{Q})$

La quale ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

ESEMPIO.

Sia propoſta da ſommare la ſerie, di cui

$$\frac{(3-4x+x^{3})2^{x}}{(x^{2}-x+1)(x^{2}+x+1)}$$

è il termine generale.

Si tragga dal termine generale (M) di queſte ſerie (*Prop. preced.*) l'eſpreſſione convenevole a queſto caſo, facendo $n=1$, $K=2$, $a=0$, $b=1$, $M=O=1$, $N=-1$. Si avrà la formula ſeguente

$$\frac{\left(A+2B-(3A+B)x+(A-B)x^{2}+Bx^{3}\right)2^{x}}{(x^{2}-x+1)(x^{2}+x+1)}$$

la quale paragonata col termine particolare propoſto ſomminiſtrerà $A=B=1$. Determinati tutti queſti valori, ſi ſoſtituiſcano nella ſomma generale $(\mathcal{Q})$, e ne riſulterà la formula

$$\frac{(4+2x)2^{x}}{x^{2}+x+1}-4$$

la quale ſarà la ſomma generale ricercata.

SCOLIO.

E' neceſſario l'avvertire in queſto luogo, come s'è fatto precedentemente, che eſſendo il numero delle indeterminate del numeratore ſempre minore del numero dell'equazioni da formare, fa d'uopo neceſſariamente, che v'abbia una determinata relazione tra queſti coefficienti, perchè la ſerie ſia ſuſcettibile di ſomma eſponenziale della forma ($\mathcal{Q}$).

PROBLEMA VIII.

Sommare la ſerie (R)

$$\frac{P}{(P\pm1)(P^2\mp1)}+\frac{P^2}{(P^2\pm1)(P^3\pm1)}+\frac{P^3}{(P^3\pm1)(P^4\pm1)}\cdots\cdots$$

$$+\frac{P^x}{(P^x\pm1)(P^{x+1}\pm1)}\cdots\cdots (R)$$

RISOLUZIONE.

Si metta ſotto forma differenziale il termine generale propoſto . . . . $\frac{P^x}{(P^x\pm1)(P^{x+1}\pm1)}$ la quale ſarà della forma ſeguente (N)

$$\frac{1}{(P-1)(P^x\pm1)}-\frac{1}{(P-1)(P^{x+1}\pm1)}\cdots\cdots (N)$$

Si ponga nel primo termine l'unità in luogo di x, e ſi avrà l'eſpreſſione $\frac{1}{(P-1)(P\pm1)}$; ſi ſottragga quindi il ſecondo termine da queſta eſpreſſione. La formula ($\mathcal{Q}$) riſultante

$$\frac{P(P^x-1)}{(P-1)(P\pm1)(P^{x+1}\pm1)}\cdots\cdots\cdots (\mathcal{Q})$$

ſarà pe' noſtri principj la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

CAPITOLO QUINTO.

Le ſerie a differenze coſtanti, e le ſerie Ricorrenti in generale ammettono tutte ſenza eccezione una ſomma generale Algebraica, o eſponenziale, ſiccome abbiamo veduto nelle Prop. I. IV. V. All' oppoſito le ſerie frazionali non ne ſono generalmente ſuſcettibili, avendovene un' infinità, che non ammettono che ſomme traſcendenti. Le Prop. II, e VI non abbracciano che le ſerie a ſomma Algebraica o eſponenziale. Ma non laſcia perciò il noſtro metodo di ſoggettare anche quelle alle ſue leggi. In effetto le ho tutte generalmente ridotte ſotto forme Integrali, e nel preſente Capitolo eſporremo il modo di ſommarle. Così per tutt' altra via ſi vedranno compreſe ſotto generaliſſime eſpreſſioni le ſomme di queſta natura di ſerie che ſono ſtate per l' addietro tolte per mano da tanti illuſtri uomini, e ſopra le quali ho io pure pubblicato una Memoria nel 1775, che ha per titolo *Specimen de Seriebus convergentibus*. Al qual paſſo non diſdice il ricordare, che un Geometra de' primi inclinò a credere, che il metodo da me adoperato in quel Libro poteſſe avere comuni i principj con quello che l' immortale *Eulero* eſpoſe nel VI. Vol. degli antichi Com. di S. Pietroburgo. Ma per verità deriva il mio metodo da alcune propoſizioni fondamentali, che ho premeſſo, delle quali realmente non ſo di eſſere debitore a chi che ſia, e ſu le quali non s' appoggia altramente il metodo Euleriano. Moſtriamolo con qualche facile eſempio. Si tratti di ſommare le ſerie, che hanno (*A*)

$\frac{x^n}{(an+b)(cn+e)}$ per termine generale. Avendo dimoſtrato al §. V. di quel mio Opuſcolo eſſere $\frac{1}{qx^{b:a}}\int\left(x^{b:a}dx.\frac{1-x^n}{1-x}\right)$ la ſomma generale delle ſerie aventi per termine generale $\frac{x^n}{an+b}$, moltiplicando queſt' eſpreſſione, e la ſerie per $x^{e:c-b:a}$, e fatta un' integrazione, ricavo immediatamente, poſto ſempre nelle quantità finite $x=1$, la formula

$$(B) \;\ldots\; \frac{1}{bc-ae}\int\left(1-x^{e:c-b:a}\right)x^{b:a}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$$

ch' eſprime la ſomma generale di quelle ſerie. Continuando così a fare altra moltiplicazione e ſucceſſiva integrazione determino di mano in mano le ſomme generali per tre fattori, indi per quattro ecc. come può vederſi al §. X.

Il Sig. *Eulero* nel §. 10 di quella Memoria, per le ſerie aventi l' eſpreſſione (A) per termine generale, opera in queſto modo. Chiama S la ſomma ricercata. Moltiplica la lettera S, e la ſerie per px^{π}, e differenzia l' equazione; indi determina il valore di p, π in a, b. Moltiplica di nuovo queſt' equazione differenziata per px^{π}, e dopo un' altra differenziazione determina il valore di p, π in a, b, c, e. Paſſando poſcia a due ſucceſſive integrazioni, ov' entra s, e ds, trova finalmente per s la ſteſſa eſpreſſione noſtra (B). Se la ſerie aveſſe tre fattori, prende da capo a trattarla con ſimili operazioni, e così di mano in mano per quattro, e per tal numero di fattori che vuole. Parrebbe differente anche ne' principj un metodo che con una ſola moltiplicazione, ed una ſola integrazione di funzioni ſemplici di x, perveniſſe ad un riſultamento, che un altro non ottiene che con due moltiplicazioni, due differenziazioni, e due integrazioni; e molto più in progreſſo creſcendo il numero de' fattori. Ma quello che ſiamo qui per eſporre è ben da tutti diverſo così ne' principj, come nell' applicazione.

DELLE SERIE FRAZIONALI TRASCENDENTI.

PROBLEMA IX.

Trovare il termine generale della ſerie (Υ)

$$\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}+\frac{1}{m+3n}\;\ldots\ldots\ldots\;(\Upsilon)$$

ſotto una forma integrale.

RISOLUZIONE.

Eſſendo (μ) $\frac{1}{m+nx}$ il termine generale algebraico della ſerie (Υ), fa d' uopo, che il nuovo termine generale dia dopo l' integrazione l' eſpreſſione (μ). Per conſeguenza non ſi tratta che di aſſumere tal funzione differenziale d' una variabile z, ch' eſſendo integrata, e avendo poſta l' unità in luogo di z nell' integrale, ne riſulti la funzione algebraica (μ). Ma appunto facendo l' integrazione della funzione differenziale $\frac{1}{n}z^{m:n+x-1}dz$, è manifeſto, che l' integrale

$$(r)\;\ldots\ldots\ldots\;\frac{1}{n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)=\frac{1}{m+nx}$$

fatto $z=1$ dopo l' integrazione. Dunque la formula (r) rappreſenta il termine generale della ſerie (Υ). Il che ecc.

PROBLEMA X.

Sommare la ſerie (Υ) della Prop. precedente.

RISOLUZIONE.

Poichè $\frac{1}{n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)$ è il termine generale della ſerie (Υ), il ſi metta ſotto la forma differenziale (N)

$$\frac{1}{n}\int\frac{z^{m:n+x-1}\,dz}{1-z}-\frac{1}{n}\int\frac{z^{m:n+x}\,dz}{1-z}\;\ldots\ldots(N)$$

Meſſa poi l'unità in luogo di x nel primo termine, con che ſi ha $\frac{1}{n}\int\frac{z^{m:n}dz}{1-z}$ (C), ſi ſottragga dall'eſpreſſione (C) il ſecondo termine della forma (N). La differenza, che ne riſulta ($\mathfrak{Q}$)

$$\frac{1}{n}\int z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)\ldots\ldots(\mathfrak{Q})$$

ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA I.

La formula (M)

$$\frac{A}{nqs..\phi\omega}\int\overline{z^{\Delta:\omega-\mu:\tau-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\overline{z^{r:s-p:q-1}dz\int\overline{z^{p:q-m:n-1}dz\int\overline{z^{m:n+x-1}dz}}}}\;\cdots(M)$$

integrata da $z=0$ *ſino a* $z=1$, *è il termine generale di tutte le ſerie* (X)

$$\frac{A}{(m+n)(p+q)\ldots(\Delta+\omega)}+\frac{A}{(m+2n)(p+2q)\ldots(\Delta+2\omega)}\text{ ecc.}\ldots(X)$$

nelle quali il numeratore è una quantità coſtante, e il *denominatore il prodotto d'un numero qualunque di fattori ſemplici.*

DIMOSTRAZIONE.

Si traggano per ordine fuor de' ſegni le quantità differenziali, e ſe ne prendano ſucceſſivamente gl' integrali in modo che ſvaniſcano per la ſoſtituzione di $z = 0$. Si avrà dalla prima in ordine l' integrale $\frac{nz^{m:n+x}}{m+nx}$; il che eſſendo moltiplicato per $z^{p:q-m:n-1}dz$, e integrato darà per la ſeconda

$$\int\overline{z^{p:q-m:n-1}dz\int\overline{z^{m:n+x-1}dz}} = \frac{nqz^{p:q+x}}{(m+nx)(p+qx)}$$

e così operando ſucceſſivamente ſi perverrà alla forma

$$\frac{nqs\ldots\ldots\phi\omega z^{\Delta:\omega+x}}{(m+nx)(p+qx)+\ldots(\Delta+\omega x)}$$

la quale diviſa per $nqs\ldots\ldots\phi\omega$, e moltiplicata per A, dopo di aver fatto $z = 1$, è il preciſo termine generale delle ſerie propoſte (X). Il che ecc.

PROBLEMA XI.

Sommare le ſerie (X) *della Prop. precedente.*

RISOLUZIONE.

Eſſendoſi dimoſtrato, che la formula integrale (M) è il termine generale di queſte ſerie, la ſi metta ſotto la forma differenziale (N)

$$\frac{A}{nqs\ldots\ldots\psi\omega}\int\overline{x^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\ldots\text{ecc.}\int\overline{\frac{z^{m:n+x-1}dz}{1-z}}}$$

$$\frac{-A}{nqs\ldots\ldots\phi\omega}\int\overline{x^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\overline{\frac{z^{m:n+x}dz}{1-z}}}\ldots\ldots(N)$$

Meſſa quindi l'unità in luogo di x nel primo termine, dal che riſulta l'eſpreſſione

$$\frac{A}{nqs\ldots\phi\omega}\int\overline{z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\ldots\text{ecc.}\int\overline{\frac{z^{m:n}dz}{1-z}}}$$

ſi ſottragga da queſta eſpreſſione il ſecondo termine della forma (N). La differenza $(\mathcal{Q})$

$$\frac{A}{nqs\ldots\phi\omega}\int\overline{z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dx\ldots\text{ecc.}\int\overline{z^{r:s-p:q-1}dz\int\overline{z^{p:q-m:n-1}dz\int\overline{z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)}}}}$$

$\ldots\ldots(\mathcal{Q})$

ſarà manifeſtamente la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

TEOREMA II.

La formula (M)

$$\frac{\delta.}{ndz}\left(bz^{a:b-m:n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)\right)\ldots\ldots(M)$$

è il termine della ſerie (μ)

$$\frac{a+b}{m+n}+\frac{a+2b}{m+2n}+\frac{a+3b}{m+3n}+\text{ecc.}\ldots\ldots\frac{a+bx}{m+nx}\ldots\ldots(\mu)$$

eſprimendo la lettera $\delta.$ *una differenziazione ordinaria.*

DIMOSTRAZIONE.

Si prenda attualmente l' integrale della quantità ſotto il ſegno. La formula (M) diverrà

$$\frac{\delta.(bz^{a:b+x})}{dz\,(m+nx)}$$

la quale eſſendo differenziata ſomminiſtra $\frac{a+bx}{m+nx}\,z^{a:b+x-1}$. E poichè queſt' eſpreſſione ſvaniſce facendovi $z=0$, ſi ponga $z=1$. Si avrà $\frac{a+bx}{m+nx}$, ch'è effettivamente il termine generale della ſerie (μ). Il che ecc.

COROLLARIO I.

Si perverrebbe allo ſteſſo riſultamento ſe la funzione (M) foſſe ſviluppata, com' è manifeſto. Imperciocchè, facendo $\frac{a}{b}-\frac{m}{n}=\pi$, ſi avrebbe l' eſpreſſione ſeguente

$$\frac{b\pi}{n}z^{\pi-1}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)+\frac{b}{n}z^{a:b+x-1}$$

dalla quale, dopo l' integrazione compiuta, e la ſoſtituzione di $z=1$, ſi ricaverebbe il medeſimo termine generale di prima. In fatti, poſto $z=1$ nelle quantità finite, la formula diventa

$$\frac{b\pi}{n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)+\frac{b}{n}$$

e però, integrando, ſi ha

$\frac{b\pi}{n}\cdot\frac{nz^{(m+nx):n}}{m+nx}+\frac{b}{n}=\frac{b\pi z^{(m+nx):n}}{m+nx}+\frac{b}{n}$, cioè, fatto $z=1$, $\frac{b}{m+nx}\left(\frac{a}{b}-\frac{m}{n}\right)+\frac{b}{n}=\frac{a+bx}{m+nx}$.

COROLLARIO II.

Nello ſteſſo modo ſi proverebbe, che l' eſpreſſione

$$\frac{1}{dz}\delta.\left(ez^{c:e-a:b+1}\times\frac{1}{ndz}\delta.\left(bz^{a:b-m:n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)\right)\right)$$

è il termine generale della ſerie

$$\frac{(a+b)\,(c+e)}{m+n}+\frac{(a+2b)\,(c+2e)}{m+2n}\ldots\ldots+\frac{(a+bx)\,(c+ex)}{m+nx}$$

e l' eſpreſſione

$$\frac{1}{d2}\delta.\left(gz^{f:g-c:e+1}\times\frac{1}{dz}\delta.(ez^{c:e-a:b+1}\times\frac{1}{ndz}\delta.(bz^{a:b-m:n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)\right)$$

il termine generaſe della ſerie

$$\frac{(a+b)\,(c+e)\,(f+g)}{m+n}+\frac{(a+2b)\,(c+2e)\,(f+2g)}{m+2n}$$

$$\ldots\ldots\ldots+\frac{(a+bx)\,(c+ex)\,(f+gx)}{m+nx}$$

e così ſucceſſivamente.

PROBLEMA XII.

Sommare la Serie (μ) del II Teorema.

RISOLUZIONE.

Si ponga il termine generale (M) ſotto la forma differenziale (N)

$$\frac{b}{ndz}\delta.(z^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+x-1}dz}{1-z})-\frac{b}{ndz}\delta.(z^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+x}\,dz}{1-z})..(N)$$

E ſi ſoſtituiſca nel primo membro l' unità in luogo di x. Se pertanto ſi ſottragga la quantità che ne riſulta dal ſecondo membro; ſi avrà l' eſpreſſione ſeguente

$$\frac{b}{ndz}\delta.(z^{a:b-m:n}\int z^{m:n}dz(\frac{1-z^{x}}{1-z})$$

la quale ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA III.

Si ſupponga $Z = \frac{b}{dz} \delta . (z^{a:b-m:n} \int (z^{m:n+x-1} dz))$.

La formula (*M*)

$$\frac{1}{nqs\ldots\omega} \int \overline{z^{\Delta:\omega-\mu:\varphi-1} dz \ldots \text{ecc.} \int \overline{z^{r:s-p:q-1} dz \int \overline{z^{p:q-a:b} Z dz}}} \ldots (M)$$

da $z = 0$ *ſino a* $z = 1$ *è il termine generale della ſerie* (*Υ*)

$$\frac{a+b}{(m+n)(p+q)\ldots(\Delta+\omega x)} + \frac{a+2b}{(m+2n)(p+2q)\ldots(\Delta+2\omega)}$$

$$\ldots\ldots + \frac{a+bx}{(m+nx)(p+qx)\ldots(\Delta+\omega x)} \ldots\ldots (\Upsilon)$$

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendoſi dimoſtrato nel Teorema precedente

$$\frac{b}{dz} \delta . (z^{a:b-m:n} \int (z^{m:n+x-1} dz)) = \frac{n(a+bx)}{m+nx} z^{a:b+x-1},$$

ſi moltiplichi queſto valore per $z^{p:q-a:b} dz$, e prendendo l' integrale del prodotto, ſi avrà

$$\frac{nq(a+bx) z^{p:q+x}}{(m+nx)(p+qx)}.$$

moltiplicando di nuovo queſt' eſpreſſione per $z^{r:s-p:q-1} dz$, e integrando il prodotto, ſi avrà

$$\frac{nqs(a+bx) z^{r:s+x}}{(m+nx)(p+qx)(r+sx)}$$

e così ſucceſſivamente operando, ſi perverrà alla forma

$$\frac{(a+bx)nqs\ldots\ldots\varphi\omega z^{\Delta:\omega+\kappa}}{(m+nx)(p+qx)(r+sx)\ldots\ldots(\Delta+\omega x)}$$

Fatta per tanto la diviſione per $nqs\ldots\ldots\varphi\omega$, e ſoſtituendo l' unità in luogo di z, ſi avrà il termine generale conoſciuto della ſerie (Y). Il che dovea dimoſtrarſi.

PROBLEMA XIII.

Sommare le Serie (Y) del Teorema precedente

RISOLUZIONE.

Si metta il termine generale (M) ſotto la forma differenziale (N)

$$\frac{1}{nqs\ldots\varphi\omega}\int\overline{z^{\Delta:\omega-\mu:\varphi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\overline{z^{p:q-a:b}\delta.\left(bz^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+\kappa-1}dz}{1-z}\right)}}$$

$$\frac{-1}{nqs\ldots\varphi\omega}\int\overline{z^{\Delta:\omega-\mu:\varphi-1}dz\ldots\ldots\text{ecc.}\int\overline{z^{p:q-a:b}\delta.\left(bz^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+\kappa}dz}{1-z}\right)}}$$

. . . . (N)

poſta l' unità in luogo di x nel primo termine, ſi ſottragga dalla quantità, che ne riſulta il ſecondo termine dell' eſpreſſione (N); Si avrà la formula $(\mathcal{Q})$

$$\frac{1}{nqs\ldots\varphi\omega}\int\overline{z^{\Delta:\omega-\mu:\varphi-1}d\dot{z}\ldots\text{ecc.}\int\overline{z^{r:s-p:q-1}dz\int\overline{z^{p:q-a:b}\delta.\left(bz^{a:b-m:n}\int z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^{\kappa}}{1-z}\right)\right)}}}$$

. . . . $(\mathcal{Q})$

che ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

COROLLARIO.

In queſta guiſa ſi potranno ſommare le altre Claſſi di Serie aventi al numeratore un numero qualunque di fattori. Imperciocchè, determinata che ſia la funzione Z per n fattori al numeratore, ſecondo ciò che s' è detto nel II Corollario del II Teorema, ſi ricaverà dal III Teorema il termine generale corriſpondente, e in ſeguito la ſomma generale, ſenza che mi diffonda maggiormente in queſto luogo.

E S E M P J.

Per facilitare l' intelligenza del metodo addurremo quì due eſempj.

I.

Sia da ſommarſi la ſerie

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}\;\ldots\ldots+\frac{1}{x(3+x)}$$

Si tragga dall' eſpreſſione generale della Prop. XI. li due ultimi integrali a cagione dei due fattori al denominatore della ſerie propoſta, cioè

$$\frac{A}{nq}\int\overline{z^{p:q-m:n-1}dz\int\overline{z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)}}$$

E poichè $A=1$, $m=0$, $n=q=1$, $p=3$, l'eſpreſſione della ſomma diverrà

$$\int\overline{z^2dz\int dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)}=\frac{1}{3}\int\left((1-z^3)dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)\right)$$

Ma queſta formula, fatto $z=1$ dopo l' integrazione, diventa l'eſpreſſione algebraica $(\mathfrak{Q})$

$$\frac{x}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(2+x)}+\frac{1}{3(3+x)}\right)\ldots\ldots(\mathfrak{Q})$$

e però $(\mathfrak{Q})$ è la ſomma generale dimandata. Facendo per tanto $x=\infty$, ſarà $\frac{11}{18}$ la ſomma della ſerie all' infinito.

II.

Sia da ſommare la ſerie

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{7.8}\,\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{(-2+3x)\,(-1+3x)}$$

Eſſendo $A=1$, $m=-2$, $n=3$, $p=-1$, $q=3$, l'eſpreſſione generale dell'eſempio precedente diventa

$$\frac{1}{9}\int\overline{z^{-2:3}dz\int\overline{z^{-2:3}dz\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)}}$$

$$=\frac{1}{3}\int\overline{\frac{(1-z^{1:3})(1-z^{x})z^{-2:3}dz}{1-z}}$$

di cui l'integrale dipende manifeſtamente dalle quadrature note. E volendo la ſomma della ſerie all'infinito, ſi ponga $x=\infty$; la formula precedente ſi cangia in queſta

$$\frac{1}{3}\int z^{-2:3}dz\left(\frac{1-z^{1;3}}{1-2}\right)=\int\frac{dy}{1+y+y^{2}}.$$

facendo $z^{1:3}=y$. Per conſeguenza la ſomma della ſerie all'infinito $=$ Arc. 40° di un cerchio avente $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ per raggio.

SCOLIO.

E' noto, che queſta ſorta di ſerie va bene ſpeſſo unita con qualche ſerie geometrica, e che non è ſempre poſſibile di eſprimere le ſomme con formule eſponenziali. Un ſolo Problema generale baſterà, come mi ſembra, per indicare la ſtrada, che convien tenere in caſo che queſte ſerie non ammettano altra ſomma, che traſcendente.

PROBLEMA XIV.

Sommare le ſerie (I)

$$\frac{K^{a+b}}{(m+n)(p+q)\ldots\ldots(\Delta+\omega)}$$

$$+\frac{K^{a+2b}}{(m+2n)(p+2q)\ldots\ldots(\Delta+2\omega)}\ldots\ldots\frac{K^{a+bx}}{(m+nx)(p+qx)\ldots(\Delta+\omega x)}$$

. . . . (*I*)

RISOLUZIONE.

Eſſendo l'eſpreſſione (*M*)

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\alpha-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-m:n-1}dz\int z^{m:n+x-1}K^{a+bx}dz$$

. . . . (*M*)

il termine generale delle ſerie (*I*) (*Teorema I. del preſ. Cap.*), il ſi metta ſotto la forma differenziale (*N*)

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\alpha-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\frac{z^{m:n+x-1}K^{a+bx}dz}{1-K^{b}z}$$

$$-\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\alpha-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\frac{z^{m:n+x}K^{a+b(x+1)}dz}{1-K^{b}z}$$

. . . . (*N*)

E poſta poi l'unità in luogo di *x* nel primo termine, dal che riſulta la quantità

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\alpha-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\frac{z^{m:n}K^{a+b}dz}{1-K^{b}z}$$

ſi ſottragga il ſecondo termine da queſt' eſpreſſione; ſarà la differenza ($\mathcal{Q}$)

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int\overline{z^{\Delta:\omega-\mu:\rho-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\overline{z^{p:q-m:n-1}dz\int\overline{\frac{z^{m:n}K^{a+b}dz(1-K^{bx}z^{x})dz}{1-K^{b}z}}}}$$

$$\ldots\ldots\ (\mathfrak{Q})$$

La ſomma generale ricercata. Il che ecc.

COROLLARIO

Se la Serie aveſſe de' fattori al numeratore, ſi potrebbe nello ſteſſo modo ſommarla, ricavando i termini generali convenienti da' Teoremi, che abbiamo premeſſo; il che non ha biſogno di eſſere eſemplificato.

SCOLIO.

Ma non è poi fuor di propoſito, che ſi prendano qui per mano le ſerie Reciproche de' numeri naturali ſeparatamente, ancorchè non ſieno elle che puri caſi particolari delle ſerie generali, onde abbiamo aſſegnato la ſomma in queſto Capitolo ſotto forme traſcendenti. Ne daremo pertanto due eſpreſſioni differenti, una delle quali ci appartiene in particolare, ſiccome può vederſi nel Libro, che abbiamo mentovato nell' introduzione del Capitolo, e l' altra è del pari tratta direttamente da' principj di queſta Memoria, ma coincide, quanto al finale riſultamento, con quella che ha trovato il Sig. *Eulero* per diverſa via, e pubblicato nel VI Vol. de' primi Com. dell' Accademia di S. Pietroburgo.

PROBLEMA XV.

Sommare le ſerie Reciproche de' numeri naturali

$$1+\frac{1}{2^{n}}+\frac{1}{3^{n}}+\frac{1}{4^{n}}+\text{ecc.}\ \ldots\ldots\ \frac{1}{x^{n}}$$

RISOLUZIONE.

Se nell' eſpreſſione (*M*) del Termine generale (*Prop. XIV.*) ſi faccia m, p ecc. μ, $\Delta = 0$; n, q, s ecc. ... φ, $\omega = 1$; $K = 1$; il termine generale di queſte ſerie prenderà la forma ſeguente

$$\int \overline{dz:z\ldots\int \overline{dz:z\int \overline{dz:z\int \overline{dz:z\int z^{x-1}dz}}}}$$

e la ſomma generale la ſeguente

$$\int \overline{dz:z\ldots\int \overline{dz:z\int \overline{dz:z\int \overline{dz:z\int dz\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)}}}}$$

prendendo altrettanti integrali da deſtra a ſiniſtra, quante ſono le unità in u. Per conſeguenza la ſomma all' infinito di tutte queſte ſerie ſarà manifeſtamente

$$\int \overline{dz:z\ldots\int \overline{dz:z\int \overline{dz:z\int \overline{dz:z\int dz:(1-z)}}}}$$

Il che ecc.

PROBLEMA XVI.

Sommare direttamente le ſerie Reciproche de' numeri naturali.

RISOLUZIONE.

Eſſendo $\int z^{x-1}dz\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1} = \frac{1.2.3\ldots(u-1)}{x^{u}}$ nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione, ſiccome è dimoſtrato nel Calcolo Integrale, l' eſpreſſione

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(u-1)}\int z^{x-1}dz\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1} = \frac{1}{x^{u}}$$

ſarà il termine generale di queſte ſerie. Le ſi dia la forma differenziale (N)

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(u-1)}\int\frac{z^{x-1}dz\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1}}{1-z}$$

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(u-1)}\int\frac{z.z^{x-1}dz\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1}}{1-z}\ldots(N)$$

Si metta in ſeguito l'unità in luogo di x nel primo termine, e ſi ſottragga il ſecondo dalla quantità che riſulta da quella ſoſtituzione. La differenza ($\mathfrak{Q}$).

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(u-1)}\int dz\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1}\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)\;\ldots\;(\mathfrak{Q})$$

ſarà la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

COROLLARIO.

Sarà dunque nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione.

$$1.2.3\ldots(u-1)\int\overline{dz:z\ldots\int\overline{dz:z\int\frac{dz}{1-z}}}=\int\frac{dz}{1-z}\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1}$$

$$1.2.3\ldots(u-1)\int\overline{dz:z\ldots\int\overline{dz:z\int\overline{dz:z\int\frac{dz\,(1-z^{x})}{1-z}}}}$$

$$=\int\left(dz\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1}\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)\right)$$

SCOLIO.

E perchè non s'abbia a ricorrere a quel mio libro per avere le ſomme all'infinito d'un certo numero di queſte ſerie reciproche de' numeri naturali, non ſarà inutile per le occorrenze, che qui pure ſi regiſtrino, come le ho ivi accuratamente determinate.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\text{ecc...}=.\ 6931471$$

$$1-\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}-\frac{1}{4^{2}}+\frac{1}{5^{2}}-\frac{1}{6^{2}}+\text{ecc...}=.\ 8224670$$

$$1-\frac{1}{2^{3}}+\frac{1}{3^{3}}-\frac{1}{4^{3}}+\frac{1}{5^{3}}-\frac{1}{6^{3}}+\text{ecc...}=.\ 9016769$$

$$1-\frac{1}{2^{4}}+\frac{1}{3^{4}}-\frac{1}{4^{4}}+\frac{1}{5^{4}}-\frac{1}{6^{4}}+\text{ecc...}=.\ 9470327$$

$$1-\frac{1}{2^{5}}+\frac{1}{3^{5}}-\frac{1}{4^{5}}+\frac{1}{5^{5}}-\frac{1}{6^{5}}+\text{ecc...}=.\ 9722291$$

$$1-\frac{1}{2^{6}}+\frac{1}{3^{6}}-\frac{1}{4^{6}}+\frac{1}{5^{6}}-\frac{1}{6^{6}}+\text{ecc...}=.\ 9855511$$

$$1-\frac{1}{2^{7}}+\frac{1}{3^{7}}-\frac{1}{4^{7}}+\frac{1}{5^{7}}-\frac{1}{6^{7}}+\text{ecc...}=.\ 9926366$$

$$1-\frac{1}{2^{8}}+\frac{1}{3^{8}}-\frac{1}{4^{8}}+\frac{1}{5^{8}}-\frac{1}{6^{8}}+\text{ecc...}=.\ 9962322$$

$$1-\frac{1}{2^{9}}+\frac{1}{3^{9}}-\frac{1}{4^{9}}+\frac{1}{5^{9}}-\frac{1}{6^{9}}+\text{ecc...}=.\ 9981151$$

$$1-\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}-\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}-\frac{1}{6^{10}}+\text{ecc...}=.\ 9990368$$

$$1-\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{3^{11}}-\frac{1}{4^{11}}+\frac{1}{5^{11}}-\frac{1}{6^{11}}+\text{ecc...}=.\ 9995089$$

$$1-\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}-\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}-\frac{1}{6^{12}}+\text{ecc...}=.\ 9997928$$

ecc.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\text{ecc}\ldots=\infty$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\text{ecc}\ldots=1.6449340$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\text{ecc}\ldots=1.2022358$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\text{ecc}\ldots=1.0823231$$

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{6^5}+\text{ecc}\ldots=1.0370444$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}+\text{ecc}\ldots=1.0173431$$

$$1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{4^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{6^7}+\text{ecc}\ldots=1.0083927$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}+\text{ecc}\ldots=1.0040766$$

$$1+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{39}+\frac{1}{4^9}+\frac{1}{5^9}+\frac{1}{6^9}+\text{ecc}\ldots=1.0020292$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{6^{10}}+\text{ecc}\ldots=1.0009918$$

$$1+\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{4^{11}}+\frac{1}{5^{11}}+\frac{1}{6^{11}}+\text{ecc}\ldots=1.0004859$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\frac{1}{6^{12}}+\text{ecc}\ldots=1.0002320$$

ecc...

CAPITOLO SESTO.

DELLE SERIE A FATTORI CRESCENTI.

LE Serie a fattori creſcenti formano una Claſſe di progreſſioni ſommamente eſteſa, ed utile baſtevolmente per aver luogo in queſte Ricerche a fianco delle Serie più note, e maneggiate da' Geometri. Tutto ciò, che ne ſapevamo prima del Sig. *Eulero* conſiſteva per verità in puri caſi particolari ſvolti cogli artifizj del calcolo. Egli è il primo, che additò la ſtrada di aſſegnare a' loro termini generali eſpreſſioni traſcendenti nel V. Vol. de' primi Com. di S. Pietroburgo. Non mancò in ſeguito di fare un tentativo intorno alle loro Somme nel VI. Vol. de' medeſimi Com. mettendole ſotto forme differenziali con un metodo non ignoto, ſe ſi vuole, a due grandi uomini, che il precedettero (*veggaſi il Com. Epiſt. tra Leibnitz e Bernoulli Tom.* 1.), ma non ancora perfezionato, nè ſpinto tant' oltre. Ancorchè creſca il grado dell' equazione differenziale, augmentandoſi il numero de' fattori ne' termini ſucceſſivi, e le indeterminate non vi ſi laſcino ſeparare, di modo che non è opera comune l' integrazione che reſta da affrontare, le ha ridotte almeno quell' uomo incomparabile a forme conoſciute e familiari. Dopo di lui non è a mia cognizione, che ſia ſtato fatto alcun paſſo notabile di più. Vo' credere pertanto, che non ſia per diſpiacere a' Geometri il vedere ſottomeſſe coll' altre anche le Somme di queſte ſerie alla ſemplicità de' noſtri principj.

PROBLEMA XVII.

Trovare la ſomma generale della ſerie (I)

$$1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 + \text{ecc.} \ldots\ldots 1.2.3 \ldots x \ldots. \; (I)$$

RISOLUZIONE.

Poichè l'eſpreſſione integrale $\int dz(-l.z)^x$ è il termine generale di queſta ſerie (*V. Vol. de'vecchj Com. di S. Pietrob.*), le ſi dia la forma differenziale (*N*).

$$\int \frac{dz(-l.z)^{x+1}}{-1-l.z} - \int \frac{dz\,(-l.z)^x}{-1-l.z} \;\ldots\ldots\ldots (N)$$

Poſta pertanto l'unità in luogo di x nel ſecondo termine, eſſendo creſcente la ſerie, ſi ſottragga la quantità riſultante dal primo termine dell'eſpreſſione (*N*). La differenza ($\mathcal{Q}$)

$$\int \frac{dz\, l.z\left((-l.z)^x - 1\right)}{1 + l.z} \;\ldots\ldots\; (\mathcal{Q})$$

ſarà la ſomma ricercata della ſerie (*I*), poſto $z = 1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

SCOLIO.

Il metodo è ſommamente ſemplice, e ſingolarmente quando ſi tratti di ſerie, nelle quali il numero de' fattori ne'termini ſucceſſivi va creſcendo ſecondo una data legge, come ſarebbe

$$1 + 1.2.3 + 1.2.3\ldots\ldots 5 + 1.2.3\ldots\ldots 7 \ldots\ldots + 1.2.3\ldots\; \overline{2x-1}$$

$$1 + 1.2\ldots 6 + 1.2\ldots 11 + 1.2\ldots 16 \ldots\ldots\ldots + 1.2.3\ldots \overline{5x-4}$$

Se i fattori creſcono ſecondo il numero intiero m, il metodo del Sig. *Eulero* (*Vol. VI. de' med. Com.*) porta neceſſariamente a equazioni differenziali del grado m, come il teſtifica egli medeſimo alla pag. 87. *De quo no-*

tandum eſt, tot ſemper in æquatione reſultante ſigna integralia ſibi invicem eſſe juncta, quot ſunt factores, quibus ſequens quiſque terminus augetur. Nel noſtro metodo all' oppoſito non entrano equazioni differenziali da integrare con le indeterminate meſcolate inſieme, ma ſi perviene direttamente all' eſpreſſione della ſomma: Il che potrebbe aprire un campo a qualche utile ſpeculazione nel calcolo integrale combinando i due metodi. Eccone un eſempio.

PROBLEMA XVIII.

Sommare la ſerie (R)

$$1.2.3.....\overline{a+b}+1.2.3......\overline{a+2b}........+1.2.3....\overline{a+bx}.....(R)$$

RISOLUZIONE.

Eſſendo $\int dz(-l.z)^x$ il termine generale della ſerie a fattori creſcenti conſecutivi (*Prop. preced.*) è manifeſto, che mettendo $a+bx$ in luogo di x, l' eſpreſſione (M)

$$(M)\;.\;.\;.\;.\;.\;\int dz(-l.z)^{a+bx}$$

ſarà il termine generale della ſerie (R). La ſi metta ſotto la forma differenziale (N)

$$\int\frac{dz(-l\,z)^{a+b(x+1)}}{(-l.z)^b-1}-\int\frac{dz(-l.z)^{a+bx}}{(-l.z)^b-1}\;.....(N)$$

Poſto pertanto $x=1$ nel ſecondo termine di queſt'eſpreſſione, ſi ſottragga dal primo la quantità che ne riſulta, e la differenza

$$\int\frac{dz(-l.z)^{a+b}\left((-l.z)^{bx}-1\right)}{(-l.z)^b-1}$$

ſarà, nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, la ſomma generale della ſerie (R). Il che ecc.

PROBLEMA XIX.

Sommare la ſerie (M)

$$K^{a+b}+1.2K^{a+2b}+1.2.3K^{a+3b}\ldots\ldots+1.2.3\ldots xK^{a+bx}\ldots(M)$$

Risoluzione.

Eſſendo $\int dz(-l.z)K^{a+bx}$ il termine generale di queſta ſerie, con un' operazione ſimile alla precedente ſi troverà, che l' eſpreſſione

$$\int\frac{dz\,l.z\,K^{a+b}\left(K^{bx}(-l.z)^{x}-1\right)}{1+K^{b}l.z}$$

nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, è la ſomma generale della ſerie (M). Il che ecc.

PROBLEMA XX.

Sommare la ſerie

$$\frac{1}{K^2}-\frac{1.2}{K^3}+\frac{1.2.3}{K^4}-\text{ecc.}\ldots\pm\frac{1}{K^{x+1}}(1.2.3\ldots.x)$$

Risoluzione.

Eſſendo dimoſtrato (*Vol. XIX. de' nuovi Com. di S. Pietrob. pag.* 74) che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, avendo luogo il ſegno poſitivo ſe ſia x numero pari, e il negativo ſe ſia x impari,

$$\int z^{u}dz(l.z)^{x}=\pm\frac{1}{(u+1)^{x+1}}(1.2.3\ldots\ldots x)$$

ſe ſi ponga $K-1$ in luogo di u, è manifeſto, che l' eſpreſſione (M)

$$\int z^{K-1}dz(l.z)^{x}\ \ldots\ldots\ (M)$$

ſarà il termine generale della propoſta ſerie. Il ſi metta pertanto ſotto la forma differenziale (*N*)

$$\int\frac{z^{K-1}dz\,(l.z)^{x}}{1-l.z}-\int\frac{z^{K-1}dz\,(l.z)^{x+1}}{1-l.z}\;\dots(N)$$

e ſi faccia $x=1$ nel primo membro. Dopo queſto ſi ſottragga il ſecondo dalla quantità che riſulta da quella ſoſtituzione, e la differenza

$$\int\frac{dz\left(1-(l.z)^{x}\right)z^{K-1}\,l.z}{1-l.z}$$

ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA I.

La formula integrale $\int z^{m}dz(1-z)^{x-1}$, *nel caſo di* $z=1$ *dopo l'integrazione, è il termine generale della ſerie* (*R*)

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1.2}{(m+1)(m+2)(m+3)}+\frac{1.2.3}{(m+1)\dots\dots(m+4)}+\text{ecc.}\dots\dots(R)$$

Si vegga il V. Vol. de' vecchj Com. di S. Pietrob. pag. 41

COROLLARIO.

Si dimoſtrerebbe nello ſteſſo modo, che la formula

$$\frac{1}{q^{x}}\int z^{p:q}dz\,(1-z)^{x-1}$$

è il termine generale della ſerie

$$\frac{1}{p+q}+\frac{1}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1.2}{(p+q)\dots\dots(p+3q)}+\text{ecc.}$$

e che

$$(K:q)^{x}\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}$$

è il termine generale delle ſerie

$$\frac{K}{p+q}+\frac{1.K^2}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1.2K^3}{(p+q)\dots(p+3q)}+\text{ecc.}$$

PROBLEMA XXI.

Trovare la Somma generale della Serie (*R*)

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1.3}{(m+1)\dots(m+3)}+\text{ecc.}\dots(R)$$

RISOLUZIONE.

Poichè $\int z^{m}(1-z)^{x-1}$ è il termine generale della Serie (*Teor. preced.*), il ſi metta ſotto la forma differenziale (*N*)

$$(A)\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}-(B)\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}\dots(N)$$

ch' è equivalente, giacchè eſſendo $\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}$ $=\frac{x}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}$ nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, e $\frac{m}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}$ $=\int z^{m}dz(1-z)^{x-1}$, ſarà $(A)-(B)$

$$=\left(1-\frac{x}{m+x}\right)\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}$$

$$=\frac{m}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}=\int z^{m}dz(1-z)^{x-1}.$$

Si faccia per tanto $x=1$ nel primo membro (*A*), dal che

che ſi ha integrando $\frac{z^m}{m}$, e ſi ſottragga da $\frac{z^m}{m}$ il ſecondo termine (*B*). La differenza nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, cioè

$$\frac{1}{m}-\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}$$

ſarà la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

COROLLARIO I.

Similmente ponendo il termine generale

$$\frac{1}{q^x}\int z^{q:q}dz(1-z)^{x-1}$$

ſotto queſta forma differenziale

$$\frac{1}{q^x}\int\frac{qz^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}{q-1+z}-\frac{1}{q^x}\int\frac{qz^{p:q}dz(1-z)^{x}}{q-1+z}$$

la quale coincide con queſta

$$\frac{1}{q^x}\int\frac{qz^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}{q-1+z}-\frac{1}{q^x}\int\frac{qz^{p:q}dz(1-z)^{x-1}(1-z)}{q-1+z}$$

col metodo ſolito ſi ricaverà l' eſpreſſione ſeguente

$$\frac{1}{q^x}\int\frac{z^{p:q}dz\left(q^{x-1}-(1-z)^{x-1}\right)}{q-1+z}$$

la quale nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione ſarà la ſomma generale della ſerie

$$\frac{1}{p+q}+\frac{1}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1.2}{(p+q)\ldots(p+3q)}+\text{ecc.}$$

COROLLARIO II.

Nello ſteſſo modo ſi troverà eſſere

$$K{:}q^{x}\int\frac{z^{p:q}dz\left(q^{x-1}-(K-Kz)^{x-1}\right)}{q-K+Kz}$$

la ſomma generale della ſerie di cui è termine generale

$$\left(\frac{K}{q}\right)^{x}\int z^{q:q}dz(1-z)^{x-1}$$

TEOREMA II.

La forma (M')

$$\frac{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}}{(m-p-1)\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}}-\frac{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}}{(m-p-1)\int z^{p}dz(1-z)^{x}}$$

. . . . . . (M')

nel caſo di $z=1$ *dopo l' integrazione ſi riduce alla forma* (M)

$$\frac{\int z^{m}dz(1-z)^{x-1}}{\int z^{p}dx(1-z)^{x-1}}\ldots\ldots(M)$$

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo per le regole di riduzione del calcolo integrale nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}=\frac{mx}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}$$

$$(m-p-1)\int z^{p}dz(1-z)^{x}=\frac{(m-p-1)x}{p+x+1}\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}$$

la forma (*M'*) ſi riduce manifeſtamente a queſta

$$\frac{\frac{m}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}}{\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}}$$

Ma per le medeſime regole

$$\int z^{m}dz(1-z)^{x-1} = \frac{m}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}$$

Dunque la forma (M') ſi riduce alla forma (M). Il che ecc.

PROBLEMA XXII.

Sommare la ſerie (R)

$$\frac{p+1}{m+1}+\frac{(p+1)(p+2)}{(m+1)(m+2)}+\frac{(p+1)\ldots(p+3)}{(m+1)\ldots(m+3)}+\text{ecc.}\ldots\ldots(R)$$

RISOLUZIONE.

La formula $\int z^{m}dz(1-z)^{x-1}$ è il termine generale della ſerie

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1.2}{(m+1)\ldots\ldots(m+3)}+\text{ecc.}\ldots\ldots(A)$$

per il I. *Teorema*; e per conſeguenza la formula $\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}$ è il termine generale della ſerie

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}+\frac{1.2}{(p+1)\ldots\ldots(p+3)}+\text{ecc.}\ldots\ldots(B)$$

Dunque, dividendo per ordine il termine x^{mo} della ſerie (A) pel termine x^{mo} della ſerie (B), l'eſpreſſione (M)

$$\frac{\int z^{m}\,dz(1-z)^{x-1}}{\int z^{p}\,dz(1-z)^{x-1}}$$

diventa neceſſariamente il termine generale della ſerie (R). Gli ſi dia pertanto la forma differenziale equivalente (M') del II. *Teorema*; e ſoſtituendo poſcia l' unità in luogo di x nel primo termine, ſi ſottragga il ſecondo dalla quantità riſultante, e la differenza

$$\frac{p+1}{m-p-1}-\frac{m\int z^{m-1}\,dz(1-z)^{x}}{(m-p-1)\int z^{p}\,dz(1-z)^{x}}$$

ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA III.

La forma (N)

$$\frac{(m+x+2)\int dz(-l.z)^{x+1}}{m\int z^{m-1}\,dz(1-z)^{x+1}}-\frac{(m+x+1)\int dz(-l.z)^{x}}{m\int z^{m-1}\,dz(-z)^{x}}$$
$\ldots\ldots\ldots(N)$

nel caſo di $z=1$ *dopo l' integrazione, ſi riduce alla forma* (M)

$$\frac{(m+x+1)\int dz(-l.z)^{x}}{\int z^{m}\,dz(1-z)^{x}}\ldots\ldots(M)$$

DIMOSTRAZIONE.

Poichè per le riduzioni del Calcolo Integrale

$$\int dz(-l.z)^{x+1} = z(-l.z)^{x+1} + \overline{x+1}\int dz(-l.z)^{x}$$

$$\int z^{m-1}dz(1-z)^{x+1} = \frac{z^{m}(1-z)^{x+1}}{m+x+1}$$

$$+\frac{x+1}{m+x+1}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}$$

nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, la forma (N) diventa manifeſtamente

$$\frac{(m+x+1)(m+x+2)\int dz(-l.z)^{x}}{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}} - \frac{(m+x+1)\int dz(-l.z)^{x}}{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}}$$

Ma $m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x} = (m+x+1)\int z^{m}dz(1-z)^{x}$, per le ſteſſe riduzioni. Per conſeguenza la forma (N) ſi riduce evidentemente alla forma (M). Il che ecc.

PROBLEMA XXIII.

Sommare la Serie (R)

$$(m+1)(m+2)^2 + (m+1)(m+2)(m+3)^2$$

$$+ (m+1)(m+2)(m+3)(m+4)^2 + \text{ecc.} \ldots\ldots (R)$$

RISOLUZIONE.

L' eſpreſſione $\int dz(-l.z)^{x}$ è il termine generale della ſerie

$1+1.2+1.2.3+1.2\ldots4+1.2\ldots.5+$ecc.... (*Prop. XVII*);

e l' eſpreſſione $\int z^{m} dz(1-z)^{x}$ è il termine generale delle ſerie

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1.2}{(m+1)\ldots(m+3)}$$
$$+\frac{1.2.3}{(m+1)\ldots.(m+4)}+\text{ecc.}\ (\textit{Teor. I.})$$

dunque la formula

$$\frac{\int dz(-l.z)^{x}}{\int z^{m}dz(1-z)^{x}}$$

è il termine generale della ſerie

$(m+1)(m+2)+(m+1)(m+2)(m+3)+(m+1)\ldots(m+4)+$ ecc.

Per conſeguenza la formula (M) del Teor. precedente è il termine generale della ſerie propoſta (R). Il ſi metta per tanto ſotto la forma differenziale (N) del medeſimo Teorema, e poſta l' unità in luogo di x nel ſecondo termine, ſi ſottragga la quantità riſultante dal primo.

La differenza

$$\frac{(m+x+2)\int dz(-l.z)^{x+1}}{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x+1}}-(m+1)(m+2)$$

Nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, ſarà la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

SCOLIO.

Le Propoſ. precedenti non abbracciano tutto ciò che può ricercarſi in queſta claſſe di ſerie. Per la qual coſa mi fo a riſolvere le ſeguenti generaliſſime. I Teoremi, coll' ajuto de' quali ho ſuperato la difficoltà di riſolverle, meritano, a quello che mi pare, l' attenzione de' Geometri.

TEOREMA IV.

Nel caſo di $z=1$ *dopo l' integrazione la formula* (M)

$$\frac{1}{q(z^{p:q+1}e^{1:qz})}\int(z^{p:q+x}dz.e^{1:qz})(p+q(x+1)-z^{-1})$$
. . . . . . (*M*)

è uguale all' unità, eſſendo e il numero, che ha l' unità per logaritmo iperbolico.

DIMOSTRAZIONE.

Si divida la formula (*M*) in due facendo per maggior ſemplicità $\Delta=\frac{1}{z^{p:q+1}e^{1:qz}}$. Ella diverrà

$$\Delta\int\frac{p+q(x+1)}{q}z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}-\Delta\int\frac{z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}}{q}$$

Ora, eſprimendo $\delta.$ una differenziazione ordinaria, ſarà

$$\delta.(z^{p:q+x+1}e^{1:qz})=\frac{p+q(x+1)}{q}z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}$$
$$-\frac{1}{q}z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}$$

Per conſeguenza, integrando, ſara

$$\frac{1}{q}\int z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}=-z^{p:q+x+1}e^{1:qz}$$
$$+\frac{p+q(x+1)}{q}\int z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}$$

$$e\ \Delta\Big(\int\frac{p+q(x+1)}{q}z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}$$

$$-\int\frac{z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}}{q}\Big)=$$

$$\frac{\Delta}{q}\int\big(z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}\big)\big(p+q(x+1)-z^{-1}\big)$$

$$=\Delta z^{p:q+x+1}e^{1:qz}=z^{x}=1,$$

ſoſtituendo l' unità il luogo di z. Il che ecc.

COROLLARIO.

Nello ſteſſo modo ſi proverà, che

$$\frac{1}{q(z^{p:q}e^{-z:q})}\int z^{p:q+x}e^{-z:q}dz\big((p+qx)z^{-1}-1\big)=z^{x}=1$$

nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione.

TEOREMA V.

Nel caſo di $z=1$ *dopo l' integrazione*

$$\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}\int\big(\overline{p+qx}.z^{-1}-(m+nx+n)\big)z^{p:q+x}dz(q-nz)^{m:n-p:q}=1$$

DIMOSTRAZIONE

Si ſupponga per ſemplicità $\mu=\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}$, $\Delta=m:n-p:q$, e ſi divida la formula in due, come ſegue

$$(A)\ (p+qx)\,\mu\int z^{p:q+x-1}dz(q-nz)^{\Delta}$$

$$-(B)\ (m+nx+n)\,\mu\int z^{p:q+x}dz(q-nz)^{\Delta}$$

Ora,

Ora, eſſendo per le riduzioni del calcolo integrale,

$$\int z^{p:q+x}dz\,(q-nz)^{\Delta} = -\frac{z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta+1}}{(p:q+x+\Delta+1)n}$$

$$+\frac{p+qx}{(p:q+x+\Delta+1)n}\int z^{p:q+x-1}dz\,(q-nz)^{\Delta}$$

$$= -\frac{z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta+1}}{m+nx+n}+\frac{p+qx}{m+nx+n}\int z^{p:q+x-1}dz(q-nz)^{\Delta}$$

ſarà

$$\int z^{p:q+x-1}dz(q-nz)^{\Delta} = \frac{m+nx+n}{p+qx}\int z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta}$$

$$+\frac{z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta+1}}{p+qx}$$

e però $(A)-(B)=z^{x}=1$, ſoſtituendo l'unità in luogo di z. Il che ecc.

COROLLARIO I.

Eſſendo dimoſtrato (*Vol. V. de' primi Com. di S. Pietrob.*), che la forma

$$\frac{q^{x+1}\int dz\,(-l.z)^{x}}{\bigl(p+q(x+1)\bigr)\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}} = K$$

è il termine generale della ſerie $(\mathcal{Q})$

$$p+q+(p+2q)+(p+q)\ldots(p+3q)\text{ ecc.}\ldots(p+q)\ldots(p+qx)\ldots(\mathcal{Q})$$

nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione, ed eſſendo dimoſtrato preſentemente, che nel medeſimo caſo la forma (M) del IV *Teorema* è uguale all' unità, egli è manifeſto, che

$$K = \frac{1}{q\left(z^{p:q+1}e^{1:qz}\right)}\int z^{p:q+x}Ke^{1:qz}dz\left(p+q(x+1)-z^{-1}\right)$$

$\ldots\ldots(P)$

mentre per una parte K non è variabile, per quello che rappreſenta il valore di

$$\frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}{(p+q(x+1))\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}$$

dopo l'integrazione, e la ſoſtituzione dell'unità in luogo di z; e per l'altra la formula (M) nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione non è che l'unità, come il ſi è dimoſtrato; e però la forma (P) non eſprime, che il termine generale della ſerie $(\mathcal{Q})$ traſformato.

Corollario II.

Similmente, eſſendo la formula

$$\frac{(p+q(x+1))\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}=K'$$

il termine generale della ſerie reciproca

$$\frac{1}{p+q}+\frac{1}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1}{(p+q)\ldots\ldots(p+3q)}+\text{ecc.}$$

combinando queſta forma con quella del *Coroll.* dopo il IV. *Teorema*, ſarà per la ſteſſa ragione

$$K'=\frac{1}{q\left(z^{p:q}e^{-z:q}\right)}\int z^{p:q+x}K'e^{-z:q}dz\left((p+qx)z^{-1}-1\right)\ldots(\mathcal{Q}')$$

Corollario III.

E per fine, eſſendo l'eſpreſſione

$$\frac{n(p+qx+q\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x}}{q(m+nx+n)\int z^{m:n}dz(q-qz)^{x}}=K''$$

il termine generale della ſerie

$$\frac{m+n}{p+q}+\frac{(m+n)(m+2n)}{(p+q)(p+2q)}-\frac{(m+n)\ldots\ldots(m+3n)}{(p+q)\ldots\ldots(p+3q)}\text{ ecc.}$$

combinando queſta forma con quella del V. *Teorema*, ſarà

$$K''=\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{\Delta+1}}\int\overline{\left((p+qx)z^{-1}-(m+nx+n)\right)z^{p:q+x}K''dz\,(q-nz)^{\Delta}}\ldots(R)$$

PROBLEMA XXIV.

Sommare la ſerie

$p+q+(p+q)(p+2q)+(p+q)\ldots\ldots(p+3q)+$ ecc.

RISOLUZIONE.

Eſſendo, per le regole di riduzione del calcolo integrale, nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}=xq^{x+1}\int dz(-l.z)^{x-1}$$

$$(p+q(x+1))\int z^{p:q}dz(1+z)^{x}=qx\int z^{p:q}(dz(1-z)^{x-1}$$

il termine generale (P) (*Coroll.* I.) prende la ſeguente forma

$$\frac{1}{q\left(z^{p:q+1}e^{1:qz}\right)}\int\Big\{z^{p:q}e^{1:qz}dz\Big(\overline{p+q.\overline{x+1}}.z^{x}\,\frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}{(p+q(x+1))\int z^{p.q}dz(1-z)^{x}}$$

$$-(p+qx)z^{x-1}\,\frac{q^{x}\int dz(-l.z)^{x-1}}{(p+qx)\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}\Big)\Big\}$$

Il ſi metta pertanto ſotto la forma differenziale (N)

$$(A)\;\Delta\int z^{p:q}e^{1:qz}dz\left(\frac{p+q.\overline{x+1}}{q}z.^{x}\,\frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}{(p+q(x+1))\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}-\frac{p+q}{q}\right)$$

$$(B)-\Delta\int z^{p:q}e^{1:qz}dz\left(\frac{p+qx}{q}z^{x-1}.\,\frac{q^{x}\int dz(-l.z)^{x-1}}{(p+qx)\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}-\frac{p+q}{q}\right)$$

$\ldots\ldots\ldots(N)$

ma, poſta l' unità in luogo di x nel ſecondo membro (B), ſecondo i noſtri principj, tutto ſvaniſce. Dunque il primo termine

$$(A)\ldots\frac{1}{z^{p:q+1}e^{1:qz}}\int z^{p:q}e^{1:qz}dz\left(\frac{\overline{p+q.\overline{x+1}}}{q}z^x\,.\,\frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^x}{(p+q.\overline{x+1})\int z^{p:q}dz(1-z)^x}-\frac{p+q}{q}\right)$$

ſoſtituito il valore di Δ, ſarà neceſſariamente la ſomma generale ricercata, nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

PROBLEMA XXV.

Sommare la ſerie Riciproca

$$\frac{1}{p+q}+\frac{1}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1}{(p+q)\ldots(p+3q)}+\text{ecc.}$$

RISOLUZIONE.

Atteſe le riduzioni mentovate nella Prop. preced. ſi trova facilmente, che il termine generale ($\mathcal{Q}'$) (*Coroll. II Teor. V*) di queſta ſerie prende la ſeguente forma, poſto $\frac{1}{q(z^{p:q}e^{-z:q})}=\Delta'$,

$$\Delta'\int\left\{z^{p:q}e^{-z:q}dz\left(\frac{(p+qx)z^{x-1}\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}{q^x\int dz(-l.z)^{x-1}}-\frac{\overline{p+q.\overline{x+1}}.z^x\int z^{p:q}dz(1-z)^x}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^x}\right)\right\}$$

Le ſi dia dunque la ſeguente forma differenziale,

$$(A)..\Delta'\int z^{p:q}e^{-z:q}dz\left(1-z^{x}.\frac{(p+q.\overline{x+1})\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}\right)$$

$$(B)..-\Delta'\int z^{p:q}e^{-z:q}dz\left(1-z^{x-1}.\frac{(p+qx)\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}{q^{x}\int dz(-l.z)^{x-1}}\right)$$

Ma, come nella Prop. preced., ſe ſi faccia $x=1$ nel ſecondo termine (B), l' eſpreſſione ſvaniſce. Dunque il primo

$$(A)\frac{1}{q(z^{p:q}e^{-z:q})}\int z^{p:q}e^{-z:q}dz\left(1-z^{x}.\frac{\overline{p+q.\overline{x+1}}\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}\right)$$

ſarà la ſomma generale dimandata nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

COROLLARIO.

La ſomma pertanto della ſerie all' infinito ſarà

$$\frac{1}{q(z^{p:q}e^{-z:q})}\int z^{p:q}e^{-z:q}dz$$

eſſendo infinitamente piccolo il termine

$$\frac{(p+q.\overline{x+1}\int z^{p:q}dz(1-z)^{z}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}$$

nel caſo di $x=\infty$, e ſvanendo nel medeſimo tempo il fattore z^{∞} a cagione di z minore dell' unità prima dell' integrazione.

PROBLEMA XXVI.

Sommare la ſerie

$$\frac{m+n}{p+q}+\frac{(m+n)\,(m+2n)}{(p+q)\,(p+2q)}+\frac{(m+n)\,....\,(m+3n)}{(p+q)\,....\,(p+3q)}+\text{ecc.}$$

RISOLUZIONE.

Poichè per le regole di riduzione del calcolo integrale nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int z^{m:n}dz(p-qz)^{x-1}=\frac{m+nx+n}{nqx}\int z^{m:n}dz(q-qz)^{x}$$

$$\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x-1}=\frac{p+qx+q}{nqx}\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x}$$

ſarà

$$\frac{n\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x-1}}{q\int z^{m:n}dz(q-qz)^{x-1}}=\frac{n(p+qx+q)\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x}}{q(m+nx+n)\int z^{m:n}dz(q-qz)^{x}}$$

Per conſeguenza il termine generale (*R*) (*Coroll. III Teor. V*) di queſta ſerie prende la ſeguente forma, poſto $\Delta=\frac{m}{n}-\frac{p}{q}$,

$$\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{\Delta+1}}\int z^{p:q+x}dz(q-nz)^{\Delta}(m+nx\,.\,z^{-1}K''$$

$$-(m+nx+n)\,K'')$$

eſſendo K'' ciò che diventa K'' (*Coroll. III*) mettendovi $x-1$ in luogo di x.

Il ſi metta pertanto ſotto la forma differenziale, che ſegue

$$(A)\ldots\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{\Delta+1}}\int z^{p:q}dz(q-nz)^{\Delta}\left(m+n-(m+nx+n)z^{x}K''\right)$$

$$(B)\ldots\frac{-1}{z^{p:q}(q-nz)^{\Delta+1}}\int z^{p:q}dz(q-nz)^{\Delta}\left(m+n-(m+nx)z^{x-1}K'\right)$$

e poichè, facendo $x=1$ nel ſecondo membro (B), l'eſpreſſione ſvaniſce, egli è evidente, che il primo termine (A), ſoſtituiti i valori di K' e Δ

$$(A)\ldots\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}\int\left\{z^{p:q}dz(q-nz)^{m:n-p:q}\right.$$

$$\left.\left(m+n-(p+qx+q)z^{x}\cdot\frac{n\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x}}{q\int z^{m:n}dz(q-qz)^{x}}\right)\right\}$$

ſarà la ſomma generale ricercata nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

COROLLARIO.

In conſeguenza, eſſendo la ſerie decreſcente, ſarà, per quello che s'è detto nel Coroll. della Prop. precedente, la ſomma all'infinito eſpreſſa in queſto modo

$$\frac{m+n}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}\int z^{p:q}dz(q-nz)^{m:n-p:q}$$

SCOLIO.

Sarebbe qui a propoſito l'applicare generalmente il metodo anche quando il numero de' fattori va creſcendo di un numero m maggiore dell'unità, come ſe n'è fatto menzione qui innanzi, e ſe n'è pure dato un eſempio (*Prop. XVIII*); ma penſo, che torni meglio ripigliare queſto ſoggetto in altra occaſione, ove farò vedere, che s'eſtende il metodo anche ai caſi ne' quali il numero m non è coſtante; il che non potrebbe farſi con alcun metodo conoſciuto; tanto più, che in sì fatta ricerca s' offrono da conſiderare moltiſſimi importanti Teoremi di calcolo integrale, che non ſono poi di queſto luogo.

CAPITOLO SETTIMO.

DELLE SERIE LOGARITMICHE.

IL legame, che ha il calcolo integrale con le ſerie logaritmiche, e l'uſo, che ſe ne può fare in moltiſſime occaſioni, m'ha determinato a formarne una nuova Claſſe, e non ſenza frutto. Imperciocchè, mentre non avevamo altre forme per eſprimere i termini generali delle ſerie a fattori creſcenti, delle quali abbiamo trattato nel Capitolo precedente, fuorchè quelle che il Sig. *Eulero* ha pubblicato nel *V. Vol. de' Vecchj Com. di S. Pietrob.*, avremo quì un nuovo modo di eſprimerli, che ho ricavato dalla conſiderazione delle ſerie logaritmiche, e inſieme alcuni Teoremi non inutili al progreſſo dell' Analiſi.

PROBLEMA XXVII.

Trovare la ſomma generale della ſerie
$l.2 + l.3 + l.4 + l.5 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ l.\overline{x+1}$

RISOLUZIONE.

Eſſendo dimoſtrato nel *Vol. XIX de' nuovi Com. di S. Pietrob. pag.* 70, che

$$\int \frac{z^x dz}{l.z} = l.\overline{x+1} + \int \frac{dz}{l.z}$$

nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione, egli è manifeſto che queſta eſpreſſione rappreſenta il termine generale della

della ſerie. Si metta pertanto la formula $\int\frac{z^x\,dz}{l.\,z}$ ſotto forma differenziale, come ſegue

$$(A)\int\frac{z^x\,dz}{(1-z)\,l.z}. - (B)\int\frac{z^{x+1}dz}{(1-z)\,l.z}$$

e avendo ſoſtituito l'unità in luogo di x nel termine (*A*), ſi ſottragga dalla quantità che ne riſulta $\int\frac{zdz}{(1-z)l.z}$ il ſecondo termine (*B*). Si avrà l'eſpreſſione

$$\int\frac{zdz\,(1-z^x)}{(1-z)\,l.z}$$

Ma il termine generale della ſerie è

$$\int\frac{z^x dz}{l.z}-\int\frac{dz}{l.z}\;\ldots\ldots\;(M)$$

Dunque la ſomma generale completa della ſerie ſarà neceſſariamente

$$\int\frac{zdz\,(1-z^x)}{(1-z)\,l.z}-x\int\frac{dz}{l.z}=\int\frac{dz}{(1-z)l.z}\big(z(1-z^x)-x(1-z)\big)$$

nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

COROLLARIO I.

Mettendo $p+qx-1$ in luogo di x nell' eſpreſſione (*M*), è manifeſto che la formula

$$\int\frac{z^{p+qx-1}dz}{l.z}-\int\frac{dz}{l.z}=l.\;\overline{p+qx}$$

nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione, ſarà il termine generale della ſerie

$l.\ (p+q)+l.\ (p+2q)+l.\ (p+3q)+$ ecc.

Operando pertanto come s' è fatto nella Propoſizione precedente, ſi troverà, che l'eſpreſſione

$$\int\frac{dz}{(1-z^q)\,l.z}\big(z^{p+q-1}(1-z^{qx})-x(1-z^q)\big)$$

ſarà la ſomma generale delle ſerie.

COROLLARIO II.

E poichè

$l.2 + l.3 + l.4 + \text{ecc.} \ldots . l.(x+1) = l.\big(2.3.4 \ldots (x+1)\big)$

$l.(p+q) + l.(p+2q) + l.(p+3q) + \text{ecc.} \ldots l.(p+qx)$

$= l.\big((p+q.(p+2q) \ldots . (p+qx)\big)$

Se ſia e il numero, che ha l' unità per logaritmo iperbolico, ſarà

$$(A) \ldots e^{\int \frac{dz}{(1-z)l.z}\left(z(1-z^{x})-x(1-z)\right)} = 2.3.4 \ldots \overline{x+1}$$

$$(B) \ldots e^{\int \frac{dz}{(1-z^{q})l.z}\left(z^{p+qx-1}(1-z^{qx})-x(1-z^{q})\right)} = (p+q)(p+2q) \ldots (p+qx)$$

e però (A), (B) ſaranno i termini generali delle ſerie

$2 + 2.3 + 2.3.4. + 2.3.4.5. + \text{ecc.}$

$p+q+(p+q)(p+2q)+(p+q)(p+2q)(p+3q)+\text{ecc.}$

COROLLARIO III.

Paragonandoli dunque con quei del Sig. *Eulero* uſati nel Cap. precedente (*Prop. XVII e Coroll. I del Teor. V*) avremo i ſeguenti Teoremi

$$e^{\int \frac{dz}{(1-z)l.z}\left(z(1-z^{x})-x(1-z)\right)} = \int dz(-l.z)^{x+1}$$

$$e^{\int \frac{dz}{(1-z^{q})l.z}\left(z^{p+qx-1}(1-z^{qx})-x(1-z^{q})\right)} = \frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}{(p+qx+q)\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}$$

nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione.

PROBLEMA XXVIII.

Sommare la ſerie

$$l.\frac{m+n}{p+q}+l.\frac{m+2n}{p+2q}+l.\frac{m+3n}{p+3q}+\text{ecc.}\ldots l.\frac{m+nx}{p+qx}$$

RISOLUZIONE.

Eſſendo nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$(\mathcal{Q})\ldots\int\frac{dz}{l.z}\left(z^{p+qx-1}-1\right)=l.(p+qx)$$

$$(\mathcal{Q}')\ldots\int\frac{dz}{l.z}\left(z^{m+nx-1}-1\right)=l.(m+nx)$$

pel primo Coroll. della Prop. precedente, ſarà evidentemente

$$\int\frac{dz}{l.z}\left(z^{m+nx-1}-z^{p+qx-1}\right)=l.\frac{m+nx}{p+qx}=(\mathcal{Q}')-(\mathcal{Q})$$

Ma per lo ſteſſo Coroll. la ſomma generale della ſerie $(\mathcal{Q})$ è

$$\int\frac{dz}{(1-z^q)l.z}\left(z^{p+q-1}(1-z^{qx})-x(1-z^q)\right)\ldots(R)$$

e la ſomma generale delle ſerie $(\mathcal{Q}')$

$$\int\frac{dz}{(1-z^n)l.z}\left(z^{m+n-1}(1-z^{nx})-x(1-z^q)\right)\ldots(R')$$

Dunque $(R')-(R)$

$$=\int\frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{m+n-1}(1-z^{nx})}{1-z^n}-\frac{z^{p+q-1}(1-z^{qx})}{1-z^q}\right)$$

ſarà la ſomma generale ricercata, nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che &cc.

COROLLARIO IV.

Sarà pertanto

$$e^{(R')-(R)}=\frac{m+n}{p+q}\cdot\frac{m+2n}{p+2q}\cdot\frac{m+3n}{p+3q}\cdots\cdots\frac{m+nx}{p+qx}$$

E comparando queſto nuovo termine generale della ſerie

$$\frac{m+n}{p+q}+\frac{(m+n)(m+2n)}{(p+q)(p+2q)}+\frac{(m+n)\ldots(m+3n)}{(p+q)\ldots.(p+3q)}+\text{ecc.}$$

con quello del Sig. *Eulero* uſato nel *Cap. proced. Coroll. III del Teor. V* ſi avrà queſto Teorema

$$e^{(R')-(R)}=\frac{n(p+qx+q)\int z^{p:q}\,dz(n-nz)^{x}}{q(m+nx+n)\int z^{m:n}\,dz(q-qz{}^{x}}$$

nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione.

PROBLEMA XXIX.

Sommare la ſerie

$$l.\frac{(a+b)(c+e)}{(m+n)(p+q)}+l.\frac{(a+2b)(c+2e)}{(m+2n)(p+2q)}\cdots+l.\frac{(a+bx)(c+ex)}{(m+nx)(p+qx)}$$

RISOLUZIONE.

Eſſendo, nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione,

$$(A)\ldots\int\frac{dz}{l.z}\left(z^{a+bx-1}-z^{m+nx-1}\right)=l.\frac{a+bx}{m+nx}$$

$$(B)\ldots\int\frac{dz}{l.z}\left(z^{c+ex-1}-z^{p+qx-1}\right)=l.\frac{c+ex}{p+qx}$$ (*Prop. precedente*)

Sarà $(A)+(B)=l.\frac{a+bx}{m+nx}+l.\frac{c+ex}{p+qx}=l.\frac{(a+bx)(c+ex(}{(m+nx)(p+qx)}$ il termine generale della propoſta ſerie.

Ma la ſomma generale della ſerie, di cui (A) è il termine generale, è di queſta forma

$$(P)\ldots\int\left\{\frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{a+b-1}\left(1-z^{bx}\right)}{1-z^{b}}-\frac{z^{m+n-1}\left(1-z^{nx}\right)}{1-z^{n}}\right)\right\}$$

e la ſomma generale della ſerie, che ha (B) per termine generale, è eſpreſſa così

$$(P')\ldots\int\left\{\frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{c+e-1}\left(1-z^{ex}\right)}{1-z^{e}}-\frac{z^{p+q-1}\left(1-z^{qx}\right)}{1-z^{q}}\right)\right\}$$

(*Prop. preced.*)

Per conſeguenza $(P)+(P')$ ſarà manifeſtamente la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

COROLLARIO V.

Nello ſteſſo modo ſi troverebbe, che $(P)-(P')$ è la ſomma generale della ſerie

$$l.\frac{(a+b)(p+q)}{(c+e)(m+n)}+l.\frac{(a+2b)(p+2q)}{(c+2e)(m+2n)}+\text{ecc.}$$

COROLLARIO VI.

Così procedendo non ſarebbe difficile coſa il ritrovare le ſomme di queſte ſerie logaritmiche, qualunque ſi foſſe il numero de' fattori.

COROLLARIO VII.

E poichè, paſſando dai logaritmi ai numeri, ſi ha

$$e^{(P)+(P')} = \frac{(a+b)\ (c+e)}{(m+n)(p+q)} \cdot \frac{(a+2b)\ (c+2e)}{(m+2n)(p+2q)} \cdots \frac{(a+bx)\ (c+ex)}{(m+nx)(p+qx)}$$

ſarà $e^{(P)+(P')}$ il termine generale della ſerie

$$\frac{(a+b)(c+e)}{(m+n)(p+q)} + \frac{(a+b)\ (c+e)}{(m+n)(p+q)} \cdot \frac{(a+2b)\ (c+2e)}{(m+2n)(p+2q)} + \text{ecc.} \ldots\ldots (R)$$

Ma, ſecondo il Signor *Eulero*,

$$\frac{b(m+nx+n) \int z^{m:n} dz\ (b - bz)^{x}}{n(a+bx+b) \int z^{a:b} dz\ (n - nz)^{x}} = \mathcal{Q}$$

è il termine generale della ſerie

$$\frac{a+b}{m+n} + \frac{(a+b)\ (a+2b)}{(m+n)\ (m+2n)} + \text{ecc.}, \text{ e}$$

$$\frac{e\ (p+qx+q) \int z^{p:q} dz\ (e - ez)^{x}}{q(c+ex+e) \int z^{c:e} dz\ (q - qz)^{x}} = \mathcal{Q}'$$

è il termine generale della ſerie

$$\frac{c+e}{p+q} + \frac{(c+e)(c+2e)}{(p+q)(p+2q)} + \text{ecc.}$$

E però $\mathcal{Q}\ \mathcal{Q}'$ è il termine generale della ſerie (R). In conſeguenza ſi avrà queſto bel Teorema

$$\mathrm{e}^{(P)+(P')} = \mathcal{Q}\ \mathcal{Q}'$$

nel caſo di $z = 1$ dopo l'integrazione. E facendo $c = a$, $e = b$, $p = m$, $q = n$, ſarà

$$e^{2(P)} = \mathcal{Q}^2$$

$$e^{3(P)} = \mathcal{Q}^3$$

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$e^{\Delta(P)} = \mathcal{Q}^\Delta$$

PROBLEMA XXX.

Sommare le ſerie del Signor Eulero (Vol. XIX. de' nuovi Com. di S. Pietrob.)

$$l.\,2 + (l.\,3 - 2\,l.\,2) + \left(l.\,4 - 3\,l.\,3 + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}\,l.\,2\right)$$
$$+ \left(l.\,5 - 4\,l.\,4 + \frac{3 \cdot 4\,l.3}{1 \cdot 2} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,l.\,2\right) + \text{ecc.} \ldots \;(I)$$

RISOLUZIONE.

Avendo dimoſtrato queſto Geometra, che nel caſo di $z = 1$ dopo l'integrazione

$$\int \frac{(z-1)^x dz}{l.\,z} = l.(x+1) - \frac{x}{1}\,l.\,x + \frac{x.(x-1)}{1 \,.\, 2}\;l.(x-1)$$
$$- \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3.}\;l.(x-2)$$

$+$ ecc. è manifeſto, che queſta formula è il termine generale della ſerie (I). La ſi metta pertanto ſotto la forma differenziale

$$(A)\;\int\left(\frac{(z-1)^x dz}{(2-z)\,l.z}\right) - (B)\int\left(\frac{(z-1)^{x+1} dz}{(2-z)\,l.\,z}\right)$$

e avendo poſto l'unità in luogo di x nel termine (A), dalla quantità riſultante ſi ſottragga il ſecondo termine (B); l'eſpreſſione

$$\int \frac{(z-1)dz}{(2-z)l.z}\left(1-(z-1)^x\right)$$

ſarà, nel caſo di $z = 1$ dopo l'integrazione, la ſomma generale della ſerie (I). Il che ecc.

PROBLEMA XXXI.

Sommare la ſerie

$l.\,\text{ſen.}\,\Delta + l.\,\text{ſen.}\,2\Delta + l.\,\text{ſen.}\,3\Delta \ldots\ldots + l.\,\text{ſen.}\,x\Delta$

RISOLUZIONE.

Eſſendo dimoſtrato nel medeſimo luogo (*pag.* 86), che nel caſo di $z = 1$ dopo l'integrazione

$$\int \frac{z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1-z^{2n}} \cdot \frac{dz}{l.z} = l.\,\text{ſen.}\,\frac{\pi(n-u)}{2n}$$

mentre ſia π la circonferenza d' un cerchio, di cui l'unità è diametro; ſi faccia $\frac{\pi}{2n} = \Delta$, $u = \frac{\pi}{2\Delta} - x$; ſarà nel medeſimo caſo

$$\int \frac{z^{x-1}+z^{\pi:\Delta-x-1}}{1-z^{\pi:\Delta}} \cdot \frac{dz}{l.z} = l.\,\text{ſen.}\,x\Delta$$

il termine generale della propoſta ſerie.

Il ſi metta pertanto ſotto forma differenziale così

$$\int \frac{z^{x-1}dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})\,l.z} - \int \frac{z^{x}dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$
$$+\int \frac{z^{\pi:\Delta-x-1}dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})\,l.z} - \int \frac{z^{\pi:\Delta-x-2}dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

e ſi ponga l'unità in luogo di x nel primo e terzo termine. Si avrà

$$(A)\int \frac{dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})l.z},\quad (B)\int \frac{z^{\pi:\Delta-2}dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

Si ſottragga

Si ſottragga da (A) il ſecondo termine, e da (B) il quarto.

Si otterrà così l'eſpreſſione

$$\int \frac{(1-z^{x})dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})\,l.z} + \int \frac{z^{\pi:\Delta-2}(1-z^{-x})dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi.\Delta})\,l.z}$$

La quale ſi riduce alla ſeguente forma agevolmente

$$(M)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\int \frac{(1+z^{\pi:\Delta-x-1})(1-z^{x})dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

e ſarà ella la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA XXXII.

Sommare la ſerie

$l.\,\text{coſ.}\,\Delta + l.\,\text{coſ.}\,2\Delta + l.\,\text{coſ.}\,3\Delta \ldots\ldots + l.\,\text{coſ.}\,x\Delta$

RISOLUZIONE.

Se nell' eſpreſſione $\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1-z^{2n}}\right)$

ſi faccia $\frac{\pi}{2\Delta} = n$, $u = x$, eſſendo ſen. $\frac{\pi(n-u)}{2n} = \text{coſ.}\,\frac{\pi u}{2n}$,

ſarà $\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{\pi:2\Delta-x-1}+z^{\pi:2\Delta+x-1}}{1-z^{\pi:\Delta}}\right) = l.\,\text{coſ.}\,x\Delta$

il termine generale della ſerie propoſta.

Gli ſi dia pertanto la forma differenziale ſeguente

$$(1)\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{\pi:2\Delta-x-1}}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})}\right) - \int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{\pi:2\Delta-x-2}}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})}\right)(2)$$

$$(3) + \int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{\pi:2\Delta+x-1}}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})}\right) - \int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{\pi:2\Delta+x}}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})}\right)(4)$$

Si ſoſtituiſca poi l'unità in luogo di x ne' termini (1), (3), e dalle quantità riſultanti ſi ſottraggano riſpettivamente i termini (2), (4). Sarà

$$\int \frac{z^{\pi:2\Delta-2}(1-z^{-x})dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})l.z} + \int \frac{z^{\pi:2\Delta}(1-z^{x})dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

$$= \int \frac{z^{\pi:1\Delta}dz}{l.z} \left(\frac{(1+z^{-x-1})(1-z^{x})}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})} \right) \ldots\ldots (N)$$

La ſomma generale ricercata. Il che ecc.

COROLLARIO VIII.

Conſegue evidentemente dalle due Propoſizioni precedenti la verità di due importanti Teoremi; cioè, paſſando dai logaritmi ai numeri, ſarà generalmente

$$e^{(M)} = \text{ſen.}\,\Delta\ \text{ſen.}\,2\Delta\ \text{ſen.}\,3\Delta \ldots\ldots \text{ſen.}\,x\Delta$$

$$e^{(N)} = \text{coſ.}\,\Delta\ \text{coſ.}\,2\Delta\ \text{coſ.}\,3\Delta \ldots\ldots \text{coſ.}\,x\Delta$$

TEOREMA.

Sia (N′) *quello che diventa l'eſpreſſione* (N) *della Propoſizione precedente, mettendovi* $\frac{1}{2^x}$ *in luogo di* x: *dico, che quando* $x = \infty$, π *eſſendo la circonferenza d'un cerchio che ha l'unità per diametro, ſarà* $\pi = 2e^{-(N')}$

DIMOSTRAZIONE.

Facendo $\frac{\pi}{2} = K$, K è la quarta parte della circonferenza d'un cerchio, che ha l'unità per raggio. Ma ſi dimoſtra facilmente, eſſere

$$\frac{1}{\text{coſ.}\frac{K}{2}} = 2\ \text{ſen.}\,\frac{K}{2}$$

$$\frac{1}{\text{coſ.}\frac{K}{2}\ \text{coſ.}\frac{K}{4}} = 4\ \text{ſen.}\,\frac{K}{4}$$

. . . .

$$\frac{1}{\text{coſ.}\,\frac{K}{2}\,\text{coſ.}\,\frac{K}{4}\,\ldots\ldots\,\text{coſ.}\,\frac{K}{2^x}} = 2^x\,\text{ſen.}\,\frac{K}{2^x}\,.$$

Eſſendoſi dunque dimoſtrato (*Coroll. VIII.*), che

$$e^{-(N)} = \frac{1}{\text{coſ.}\,K\,\text{coſ.}\,2K\,\text{coſ.}\,3K\,\text{ecc.}\ldots\ldots\text{coſ.}\,xK}$$

ſarà, mettendo $\frac{1}{2^x}$ in luogo di x,

$$e^{-(N')} = \frac{1}{\text{coſ.}\frac{K}{2}\,\text{coſ.}\frac{K}{4}\,\text{coſ.}\frac{K}{16}\,\text{ecc.}} = 2^x\,\text{ſen.}\,\frac{K}{2^x}$$

Ma nel caſo di $x = \infty$, 2^x ſen. $\frac{K}{2^x} = K$. Dunque nel caſo di $z = 1$ dopo l'integrazione, e di $x = \infty$ ſarà

$$2e^{-(N')} = 2e^{-\int\frac{(1+z^{1:2^x})(1-z^{1:2^x})dz}{z^{1:2^x}(1-z)(1-z^2)l.z}} = 2K = \pi\,.$$

ch'è un'eſpreſſione del cerchio totalmente nuova. Il che ecc.

PROBLEMA XXXIII.

Sommare la ſerie

$l.\,\text{tang.}\,a + l.\,\text{tang.}\,2a + l.\,\text{tang.}\,3a \ldots\ldots l.\,\text{tang.}\,xa$

RISOLUZIONE.

Poichè nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{z^{n+x-1} - z^{n-x-1}}{1+z^{2n}}\cdot\frac{dz}{l.z} = l.\,\text{tang.}\,\frac{\pi(n+x)}{4n}$$

ſiccome è dimoſtrato nel *XIX Vol. de' nuovi Com. di S.*

Pietrob., ſi faccia $\frac{\pi}{4n}=a$, e ſi metta $x-\frac{\pi}{4a}$ in luogo di x; l' eſpreſſione

$$\int \frac{z^{x-1}-z^{\pi:2a-x-1}}{1+z^{\pi:2a}}\cdot\frac{dz}{l.z}$$

ſarà il termine generale della ſerie. Gli ſi dia perciò la forma differenziale, che ſegue

$$(1)\int\frac{z^{x-1}dz}{(1-z)(1+z^{\pi:2a})l.z}-(2)\int\frac{z^{x}dz}{(1-z)(1+z^{\pi:2a})l.z}$$

$$(3)-\int\frac{(z^{\pi:2a-x-1})dz}{(1-\frac{1}{z})(1+z^{\pi:2a})l.z}+(4)\int\frac{(z^{\pi:2a-x-2})dz}{(1-\frac{1}{z})(1+z^{\pi:2a})l.z}$$

Poſta quindi l' unità in luogo di x ne' due termini (1), (3), ſi ſottraggano dalle quantità riſultanti i termini (2), (4). Sarà

$$\int\frac{(1-z^{x})dz}{(1-z)(1+z^{\pi:2a})l.z}-\int\frac{z^{\pi:2a-2}(1-z^{-x})dz}{(1-\frac{1}{z})(1+z^{\pi:2a})l.z}$$

$$=\int\frac{(1-z^{\pi:2a-x-1})dz(1-z^{x})}{(1-z)(1+z^{\pi:2a})l.z}\;\ldots\ldots\;(P)$$

la ſomma generale della ſerie propoſta nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

COROLLARIO IX.

Ed eſſendo $\frac{1}{\text{cot.}\,xa}=\text{tang.}\,xa$, e $l.\,\text{tang.}\,xa=-l.\,\text{cot.}\,xa$, la ſomma generale della ſerie

$l.\ \text{cot. } a + l.\ \text{cot. } 2a + l.\ \text{cot. } 3a \ldots\ldots l.\ \text{cot. } xa$
ſarà evidentemente

$$\int \frac{\left(z^{\pi:2a-x-1}-1\right)\left(1-z^{x}\right)dz}{(1-z)\left(1+z^{\pi:2a}\right)l.z} \ldots\ldots (\mathcal{Q})$$

COROLLARIO X.

Avremo dunque, in aggiunta agli altri, anche i due Teoremi, che ſeguono

$$e^{(P)} = \text{tang. } a \text{ tang. } 2a \text{ tang. } 3a \ldots \text{ tag. } xa$$

$$e^{(\mathcal{Q})} \quad \text{cot. } a \text{ cot. } 2a \text{ cot. } 3a \ldots \text{ cot. } xa \quad ,$$

facendo paſſaggio dai logaritmi ai numeri.

CAPITOLO OTTAVO

DELLE SERIE A PRODOTTI INFINITI.

NOn è ignota la teoria de' prodotti infiniti dopo ciò che ne hanno ſapientemente ſcritto *Wallis*, *Euler*, *de la Grange*, ed altri Geometri. Ma, avendolo trovato utile in alcune occaſioni, credo, che importi il metterli per la prima volta in ſerie, e il formarne un ordine appoſito. Ogni termine è realmente finito, ma appariſce ſotto una forma infinita, eſſendo compoſto d' un numero infinito di fattori, che formano un prodotto continuo.

TEOREMA I.

Nel caſo di $z = 1$ *dopo l' integrazione*

$$(A)\int z^{a-1}dz(1-z^{b})^{(m+p):p}$$
$$=(B)\frac{1}{b}\int z^{a:b-1}dz(1-z)^{(m+p):p}$$

Dimostrazione.

Si faccia $a-1=n$, $\frac{m+p}{p}=r$, e ſi ſviluppi l'eſpreſſione integrale (A). Si avrà pertanto

$$(1-z^{b})^{r}=1-\frac{rz^{b}}{1}+\frac{r(r-1)z^{2b}}{1.2}-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}z^{3b}+\text{ecc.}$$

e però

$$\int z^{n}dz(1-z^{b})^{r}=\frac{z^{n}}{n+1}-\frac{rz^{n+b+1}}{1(n+b+1)}$$
$$+\frac{r.(r-1)z^{n+2b+1}}{1.2(n+2b+1)}-\text{ecc.}$$

Ma poichè, facendo $z=0$, tutto ſvaniſce, ſi faccia $z=1$, e ſi avrà

$$\frac{1}{a}-\frac{r}{1(a+b)}+\frac{r(-1)}{1.2(a+2b)}-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3(a+3b)}+\text{ecc}\ldots..(M)$$

Similmente ſviluppando la formula (B), ſarà

$$(1-z)^{r}=1-\frac{rz}{1}+\frac{r(r-1)}{1.2}z^{2}-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}z^{3}+\text{ecc.}$$

$$\int z^{a:b-1}dz(1-z)^{r}=\frac{bz^{a:b}}{a}-\frac{brz^{a:b+1}}{1(a+b)}$$
$$+\frac{br(r-1)z^{a:b+2}}{1.2(a+2b)}-\text{ecc.}$$

e infine, poſto $z=1$,

$$\frac{1}{b}\int z^{a:b-1}dz(1-z)^{r}=\frac{1}{a}-\frac{r}{1(a+b)}+\frac{r(r-1)}{1.2(a+2b)}$$

$$-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3.(a+3b)}+\text{ecc.}$$

ch' è appunto la ſerie (M). Dunque ecc.
Il che ecc.

COROLLARIO I.

E poichè ſi dimoſtrerebbe nello ſteſſo modo, che

$$\int z^{f-1}dz(1-z^{g})^{(m+p):p}=\frac{1}{g}\int z^{f:g-1}dz(1-z)^{(m+p):p}$$

ſi conchiuda, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione,

$$\frac{\int z^{a-1}dz(1-z^{b})^{(m+p):p}}{\int z^{f-1}dz(1-z^{g})^{(m+p):p}}=\frac{g\int z^{a:b-1}dz(1-z)^{(m+p):p}}{b\int z^{f:g-1}dz(1-z)^{(m+p):p}}$$

TEOREMA II.

Nel caſo di $z=1$ *dopo l' integrazione*

$$\int z^{a-1}dz(1-z^{b})^{(m-p):p}=\frac{p}{am}\cdot\frac{2(ap+bm)}{(a+b)(m+p)}\cdot\frac{3(ap+b(m+p))}{(a+2b)(m+2p)}\cdot\frac{4(ap+b(m+2p))}{(a+3b)(m+3p)}\ \text{ecc.}$$

all' infinito . . . . . . (P)
Se ne vegga la dimoſtrazione nel *I Vol. del Calc. Integrale* del Sig. *Eulero pag.* 264.

TEOREMA III.

Nel caſo di $z=1$ *dopo l' integrazione*

$$\frac{\int z^{a-1}dz(1-z^{p})^{(m-p):p}}{\int z^{f-1}dz(1-z^{p})^{(q-p):p}}$$

$$=\frac{fq(a+m)}{am(f+q)}\cdot\frac{(p+f)(q+p)(a+m+p)}{(a+p)(m+p)(f+q+p)}\cdot\frac{(p+2f)(q+2p)(a+m+2p)}{(a+2p)(m+2p)(f+q+2p)}$$

$$\cdot\frac{(p+3f)(q+3p)(a+m+3p)}{(a+3p)(m+3p)(f+q+3p)}\text{ ecc.}\ldots\ldots(Q)$$ (*ibidem pag.* 269)

PROBLEMA XXXIV.

Trovare la ſomma generale della ſerie (B)

$$\frac{p}{a}\cdot\frac{2(ap+b)}{(a+b)(1+p)}\cdot\frac{3\big(ap+b(p+1)\big)}{(a+2b)(1+2p)}\cdot\frac{4\big(ap+b(2p+1)\big)}{(a+3b)(1+3p)}\text{ ecc.}$$

$$+\frac{p}{2a}\cdot\frac{2(ap+2b)}{(a+b)(2+p)}\cdot\frac{3\big(ap+b(p+2)\big)}{(a+2b)(2+2p)}\cdot\frac{4\big(ap+b(2p+2)\big)}{(a+3b)(2+3p)}\text{ ecc.}$$

$$+\frac{p}{3a}\cdot\frac{2(ap+3b)}{(a+b)(3+p)}\cdot\frac{3\big(ap+b(p+3)\big)}{(a+2b)(3+2p)}\cdot\frac{4\big(ap+b(2p+3)\big)}{(a+3b)(3+3p)}\text{ ecc.}$$

$$+\text{ ecc.}\ldots\ldots\ldots(B)$$

RISOLUZIONE.

Se ſi metta x, eſponente ordinario de' termini, in luogo di m nell' equazione (*P*) *del II Teorema*, è manifeſto, che ſoſtituendo nel prodotto infinito i numeri naturali ſucceſſivamente in luogo di x, ne riſulta la ſerie (*B*), di cui la formula

$$\int z^{a-1}dz(1-z^b)^{\overline{x-p}:p}$$

ſarà neceſſariamente il termine generale. Poſto ciò, ſi metta queſta formula ſotto la forma differenziale

$$\int\frac{z^{a-1}dz(1-z^b)^{\overline{x-p}:p}}{1-(1-z^b)^{1:p}}-\int\frac{z^{a-1}dz(1-z^b)^{\overline{x-p+1}:p}}{1-(1-z^b)^{1:p}}$$

e, poſta poi l' unità in luogo di x nel primo termine, ſe ſi ſottraga il ſecondo termine dalla quantità riſultante, l' eſpreſſione, che ſegue

$$\int \frac{z^{a-1}dz(1-z^{b})^{(1-p):p}\left(1-(1-z^{b})^{x:p}\right)}{1-(1-z^{b})^{1:p}}$$

ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA XXXV.

Sommare la ſerie (*M*)

$$\frac{p}{m}\cdot\frac{2(p+bm)}{(1+b)(m+p)}\cdot\frac{3\left(p+b(m+p)\right)}{(1+2b)(m+2p)}\cdot\frac{4\left(p+b(m+2p)\right)}{(1+3b)(m+3p)}\ \text{ecc.}$$
$$+\frac{p}{2m}\cdot\frac{2(2p+bm)}{(2+b)(m+p)}\cdot\frac{3\left(2p+b(m+p)\right)}{(2+2b)(m+2p)}\cdot\frac{4\left(2p+b(m+2p)\right)}{(2+3b)(m+3p)}\ \text{ecc.}$$
$$+\frac{p}{3m}\cdot\frac{2(3p+bm)}{(3+b)(m+p)}\cdot\frac{3\left(3p+b(m+p)\right)}{(3+2b)(m+2p)}\cdot\frac{4\left(3p+b(m+2p)\right)}{(3+3b)(m+3p)}\ \text{ecc.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ (M)$$

RISOLUZIONE.

Si ponga x in luogo di a nell'equazione (P) del *II. Teorema*. E' manifeſto, che l'eſpreſſione

$$\int z^{x-1}dz(1-z^{b})^{(m-p):p}$$

ſarà il termine generale della ſerie (*M*). Il ſi metta pertanto ſotto la forma differenziale

$$\int\frac{z^{x-1}dz(1-z^{b})^{(m-p):p}}{1-z}-\int\frac{z^{x}dz(1-z^{b})^{(m-p):p}}{1-z}$$

e, procedendo come nella Propoſizione antecedente, ſi avrà l'eſpreſſione

$$\int\frac{dz(1-z^{x})(1-z^{b})^{(m-p):p}}{1-z}$$

La quale, nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione, ſarà la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

COROLLARIO II.

Con queſto metodo ſi potranno convertire in ſerie i prodotti infiniti degli Eſempj I, II, III, IV del calcolo integrale ſopraccitato *Vol. I. pag.* 265, ed altri ſenza numero, ſubordinandoli a queſta claſſe, e determinando col noſtro metodo le ſomme a parte a parte.

PROBLEMA XXXVI.

Sommare la ſerie (I)

$$\frac{p}{(f+g)(p+q+r)}\cdot\frac{2\big(p\,(f+g)+b\,(p+q+r)\big)}{(f+g+b)(2p+q+r)}\cdot\frac{3\big(p\,(f+g)+b\,(2p+q+r)\big)}{(f+g+2b)\;(3p+q+r)}\ \text{ecc.}$$
$$+\frac{p}{(f+2g)(p+q+2r)}\cdot\frac{2\big(p(f+2g)+b(p+q+2r)\big)}{(f+2g+b)(2p+q+2r)}\cdot\frac{3\big(p(f+2g)+b(2p+q+2r)\big)}{(f+2g+2b)\;(3p+q+2r)}\text{ecc.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ (I)$$

RISOLUZIONE.

Si metta $f+gx$ in luogo di a nell'equazione (P) del II Teorema, $p+q+rx$ in luogo di m. Il prodotto infinito, ſoſtituendo ſucceſſivamente i numeri naturali in luogo di x, darà la ſerie (I), e l'eſpreſſione

$$\int z^{f+gx-1}dz(1-z^{b})^{(q+rx):p}$$

ſarà il ſuo termine generale. Gli ſi dia pertanto la forma differenziale

$$\int\frac{z^{f+gx-1}dz(1-z^{b})^{(q+rx):p}}{1-z^{g}(1-z^{b})^{r:p}}-\int\frac{z^{(f+g(x+1)-1}dz(1-z^{b})^{\left(q+r(x+1)\right):p}}{1-z^{g}(1-z^{b})^{r:p}}$$

e ſoſtituendo l'unità in luogo di x nel primo termine, ſi ſottragga il ſecondo dalla quantità, che ne riſulta; ſarà la formula

$$\int \frac{z^{f+g-1}dz(1-z^b)^{(q+r):p}\left(1-z^{gx}(1-z^b)^{rx:p}\right)}{1-z^g(1-z^b)^{r:p}}$$

la ſomma generale della ſerie (I) nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

TEOREMA IV.

Nel caſo di $z=1$ *dopo l'integrazione*

$$\int z^{\mu-1}dz(1-z)^{\omega-1}=\int z^{\omega-1}dz(1-z)^{\mu-1}$$

DIMOSTRAZIONE.

E' dimoſtrato dal Sig. *Eulero*, che in queſto caſo

$$\int z^{m-1}dz(1-z^n)^{(K-n):n}=\int z^{k-1}dz(1-z^n)^{(m-n):n}$$

(*ved. il calc. integr. T.* 5 *pag.* 262). Si faccia $K:n=\mu$, $m:n=\omega$. Sarà ſteſſamente

$$\int z^{m-1}dz\left(1-z^n\right)^{\mu-1}=\int z^{K-1}dz\left(1-z^n\right)^{\omega-1}$$

Ma

$$\int z^{m-1}dz\left(1-z^n\right)^{\mu-1}=\frac{1}{n}\int z^{m:n-1}dz\left(1-z\right)^{\mu-1}$$

$$\int z^{K-1}dz\left(1-z^n\right)^{\omega-1}=\frac{1}{n}\int z^{K:n-1}dz\left(1-z\right)^{\omega-1}$$

per ciò che abbiamo dimoſtrato nel I Teorema. Rimettendo dunque i valori $K:n$, $m:n$, ſarà evidentemente nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione

$$\int z^{\mu-1}dz\left(1-z\right)^{\omega-1}=\int z^{\omega-1}dz\left(1-z\right)^{\mu-1}$$

Il che ecc.

PROBLEMA XXXVII.

Sommare la ſerie (M)

$$\frac{f(a+p)}{a(f+p)}\cdot\frac{(p+f)(a+2p)}{(a+p)(f+2p)}\cdot\frac{(p+2f)(a+3p)}{(a+2p)(f+3p)}\text{. ecc.}$$

$$+\frac{f(a+2p)}{a(f+2p)}\cdot\frac{(p+f)(a+3p)}{(a+p)(f+3p)}\cdot\frac{(p+2f)(a+3p)}{(a+2p)(f+4p)}\text{ ecc.}$$

$$+\text{ ecc. . . . . } (M)$$

RISOLUZIONE.

Si ponga px in luogo di m, e di q nell' equazione ($\mathfrak{Q}$) del III Teorema; il prodotto infinito con la ſoſtituzione ſucceſſiva de' numeri naturali in luogo di x darà la ſerie (M), di cui ſarà per conſeguenza termine generale la formula (S)

$$\frac{\int z^{a-1}dz\left(1-z^{p}\right)^{x-1}}{\int z^{f-1}dz\left(1-z^{p}\right)^{x-1}}\text{ . . . . . } (S)$$

Ma l' eſpreſſione (S) pel *I Coroll. del Teor. I* ſi cangia nell' eſpreſſione (T)

$$\frac{\int z^{a:p-1}dz\left(1-z\right)^{x-1}}{\int z^{f:p-1}dz\left(1-z\right)^{x-1}}\text{ . . . . . } (T)$$

Si metta per tanto (T) ſotto la forma differenziale

$$\frac{(a-p)\int z^{a:p-2}dz(1-z)^{x-1}}{(a-f-p)\int z^{f:p-1}dz(1-z)^{x-1}}-\frac{(a-p)\int z^{a:p-2}dz(1-z)^{x}}{(a-f-p)\int z^{f:p-1}dz(1-z)^{x}}$$

(*veggaſi il II Teorema del Cap. VI*), e fatte le ſteſſe operazioni della Prop. XXII, ſarà

$$-\frac{\int z^{a:p-2}dz(1-z)^{x}}{\int z^{f:p-2}dz(1-z)^{x}}$$

la ſomma generale della ſerie (M). Il che ecc.

COROLLARIO III.

Nello ſteſſo modo ſi troverebbe la ſomma della ſerie di cui

$$(M)\ldots\frac{\int z^{x-1}dz(1-z)^{m-1}}{\int z^{x-1}dz(1-z)^{q-1}}=\frac{q(m+x)1+x)(1+q)(m+x+1)}{m(q+x)(1+x)(1+m)(q+x+1)}\cdot\frac{(1+2x)(2+q)(m+x+2)}{(2+x)(2+m)(q+x+2)}\cdot\frac{(1+3x)(3+q)(m+x+3)}{(3+x)(3+m)(q+x+3)}\text{ ecc.}$$

è il termine generale. Imperciocchè, eſſendoſi dimoſtrato, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, l' eſpreſſione $(M)=\dfrac{\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}}{\int z^{q-1}dz(1-z)^{x-1}}$ (*IV Teor.*), la ſomma della ſerie ſi riduce agevolmente a quella della Prop. antecedente.

SCOLIO.

Queſta Claſſe di ſerie è ſuſcettibile di grandiſſima ampliazione. E molto vi avrebbe da oſſervare ravvicinandola a quella de' fattori creſcenti. Non vo' per altro occuparmivi preſentemente di più, e mi fo a prendere per mano un altr' ordine di ſerie anologhe, le quali hanno per termini ſerie infinite, di valore per altro finito, al par de' prodotti infiniti, ma traſcendente.

CAPITOLO NONO

DELLE SERIE A TERMINI TRASCENDENTI.

PROBLEMA XXXVIII.

Sommare la ſerie (*A*)

$$
\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\text{ecc.}\\
+\;&1-\frac{2}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}-\frac{2^3}{4^4}+\text{ecc.}\\
+\;&1-\frac{3}{2^2}+\frac{3^2}{3^3}-\frac{3^3}{4^4}+\text{ecc.}\\
+\;&\text{ecc.}\;\ldots\ldots\ldots\;(A)
\end{aligned}
$$

RISOLUZIONE.

Eſſendo dimoſtrato (*Calc. Integr. di Eulero T. I pag.* 144.) che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int z^{xz}dz=1-\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{3^3}-\frac{x^3}{4^4}+\text{ecc.}$$

è manifeſto, che l' integrale ſviluppato ſomminiſtra la ſerie (*A*) con la ſoſtituzione ſucceſſiva de' numeri naturali in luogo di x, oppur anche la ſerie (A')

$$\int z^{z}dz+\int z^{2z}dz+\int z^{3z}dz+\text{ecc.}\;\ldots\;(A')$$

che ha $\int z^{xz}dz$ per termine generale.

Poſto ciò, ſi metta queſto termine generale ſotto la forma differenziale

$$\int\frac{z^{xz}dz}{1-z^z}-\int\frac{z^{z(x+1)}dz}{1-z^z}$$

e ſi ſoſtituiſca l'unità in luogo di x nel primo termine. Si prenda la differenza tra il ſecondo termine, e la quantità $\int \frac{z^z dz}{1-z^z}$ che ne riſulta; ſarà ella

$$\int \frac{z^z dz(1-z^{xz})}{1-z^z}$$

ed eſprimerà nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, la ſomma generale della ſerie (A), e generalmente la ſomma generale della ſerie (A'). Il che ecc.

PROBLEMA XXXIX.

Sommare la ſerie (B)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m+1} - \frac{1}{(m+2)^2} - \frac{1}{(m+3)^3} - \frac{1}{(m+4)^4} + \text{ecc.} \\ &+ \frac{1}{m+1} - \frac{2}{(m+2)^2} - \frac{2^2}{(m+3)^3} - \frac{2^3}{(m+4)^4} + \text{ecc.} \\ &+ \frac{1}{m+1} - \frac{3}{(m+2)^2} - \frac{3^2}{(m+3)^3} - \frac{3^3}{(m+4)^4} + \text{ecc.} \\ &+ \text{ecc.} \; \ldots\ldots\ldots \; (B) \end{aligned}$$

Risoluzione.

Eſſendo dimoſtrato nel medeſimo luogo, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione,

$$\int z^{xz} z^m dz = \frac{1}{m+1} - \frac{x}{(m+2)^2} + \frac{x^2}{(m+3)^3} - \frac{x^3}{(m+4)^4} + \text{ecc.}$$

purchè non ſia m quantità negativa, ſarà queſt' eſpreſſione il termine generale della ſerie (B), oppure della ſerie (B')

$$\int z^{z+m} dz + \int z^{2z+m} dz + \int z^{3z+m} dz + \text{ecc.} \; \ldots\ldots\ldots \; (B')$$

Si dia pertanto alla formula integrale la forma differenziale

$$\int \frac{z^{xz}z^m dz}{1-z^z} - \int \frac{z^{z(x+1)}z^m dz}{1-z^z}$$

Con un' operazione ſimile all' antecedente ſi ricaverà l' eſpreſſione

$$\int \frac{z^z z^m dz(1-z^{xz})}{1-z^z}$$

che ſarà la ſomma generale della ſerie (*B*) nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, e generalmente della ſerie (*B'*). Il che ecc.

PROBLEMA XL.

Sommare la ſerie (A)

$$\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(3p-1)^2}+\frac{1}{(3p+1)^2}+\frac{1}{(5p-1)^2}+\frac{1}{(5p+1)^2}+\text{ecc.}$$
$$+\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}+\frac{1}{(3p-2)^2}+\frac{1}{(3p+2)^2}+\frac{1}{(5q-2)^2}$$
$$+\text{ecc.} \;.\;.\;.\;.\;.\; (A)$$

RISOLUSIONE.

E' dimoſtrato nel *XIX Vol. de' nuovi Com. di S. Pietrob.*, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int \frac{z^{p-x}+z^{p+x}}{z^{2p}-1} \cdot \frac{dzl.z}{z} = \frac{\pi^2}{4p^2 \operatorname{coſ.} \pi x^2:2p} =$$

$$\frac{1}{(p-x)^2}+\frac{1}{(p+x)^2}+\frac{1}{(3p-x)^2}+\frac{1}{(3p+x)^2}+\text{ecc.}$$

eſſendo π la circonferenza di un cerchio che ha l' unità per diametro. Per conſeguenza ciaſcheduna di queſte eſpreſſioni è il termine generale della ſerie (*A*), e parimenti delle ſerie (*A'*), (*A''*), facendo $\pi:2p=\Delta$

$$\int \frac{z^{p-1}+z^{p+1}}{z^{2p}-1} \cdot \frac{dz l.z}{z} + \int \frac{z^{p-2}+z^{p+2}}{z^{2p}-1} \cdot \frac{dz l.z}{z}$$

$+$ ecc. . . . . (*A'*)

$$\Delta^2 \left(\frac{1}{\text{coſ.}\,\Delta} + \frac{1}{\text{coſ.}\,4\Delta} + \frac{1}{\text{coſ.}\,9\Delta} + \text{ecc.} \right) \;.\;.\;.\;.\;. \;(A)$$

Poſto ciò ſi metta l' eſpreſſione integrale ſotto la forma differenziale, che ſegue

$$(1) \int \frac{z^{p-x-1} dz.\,l.\,z}{(1-\frac{1}{z})(z^{2p}-1)} - (2) \int \frac{z^{p-x-2} dz.\,l.\,z}{(1-\frac{1}{z})(z^{2p}-1)}$$

$$(3) \int \frac{z^{p+x-1} dz.\,l.\,z}{(1-z)(z^{2p}-1)} - (4) \int \frac{z^{p+x} dz..\,l.\,z}{(1-z)(z^{2p}-1)}$$

Si ſoſtituiſca poi l' unità in luogo di x ne' termini (1), (3), e ſi ſottraggano riſpettivamente dalle quantità riſultanti li termini (2), (4). Sarà l' eſpreſſione

$$\int \frac{z^{p-2}(1-z^{-x}) dz.\,l.\,z}{(1-\frac{1}{z})(z^{2p}-1)} + \int \frac{z^{p}(1-z^{x}) dz.\,l.\,z}{(1-z)(z^{2p}-1)} =$$

$$\int z^p dz\, l.\,z \left(\frac{(1-z^{-x-1})(1-z^{x})}{(1-z)(z^{2p}-1)} \right)$$

la ſomma generale ricercata delle ſerie (*A*), (*A''*) nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione, e generalmente della ſerie (*A'*). Il che ecc.

PROBLEMA XLI.

Sommare la ſerie (A)

$$1 + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2p-1} + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{3p-1} - \text{ecc.}$$

$$+\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2p-2}+\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{2p-2}-\text{ecc.}$$

$$+\frac{1}{3}+\frac{1}{p-3}-\text{ecc.}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(A)$$

RISOLUZIONE.

Eſſendo nel medeſimo Volume dimoſtrato, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{(z^{x-1}+z^{p-x-1})dz}{1+z^p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}-\frac{1}{p+x}-\frac{1}{2p-x}+\frac{1}{2p+x}+\text{ecc.}$$

queſt' eſpreſſione ſarà il termine generale della ſerie (A). Si metta pertanto la formula integrale ſotto la forma differenziale, che ſegue

$$\int\frac{(z^{x-1}-z^{p-x})dz}{(1-z)(1+z^p)}-\int\frac{(z^{x}-z^{p-x-1})dz}{(1-z)(1+z^p)}$$

e, ſoſtituita l' unità in luogo di x nel primo membro, ſi ſottragga il ſecondo dalla quantità, che ne riſulta; ſarà l' eſpreſſione

$$\int\frac{(1+z^{p-x-1})(1-z^{x})dz}{(1-z)(1+z^p)}$$

la ſomma Generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA XLII.

Sommare la ſerie

$$1-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2p-1}+\frac{1}{2p+1}-\frac{1}{3p-1}+\frac{1}{3p+1}-\text{ecc.}$$

$$+\frac{1}{2}-\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2p-2}+\frac{1}{2p+2}-\frac{1}{3p-2}+\frac{1}{3p+2}-\text{ecc.}$$

$$+\frac{1}{3}-\frac{1}{p-3}+\frac{1}{p+3}-\text{ecc.}$$

RISOLUZIONE.

E' dimoſtrato nel medeſimo Volume, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{(z^{x-1}-z^{p-x-1})dz}{1-z^p}=\frac{1}{x}-\frac{1}{p-x}+\frac{1}{p+x}-\frac{1}{2p-x}+\frac{1}{2p+x}-\text{ecc.}$$

Dunque, eſſendo queſt' eſpreſſione integrale in tal caſo il termine generale della ſerie propoſta, la ſi metta ſotto la forma differenziale

$$\int\frac{(z^{x-1}-z^{p-x})dz}{(1-z)(1-z^p)}-\int\frac{(z^{x}-z^{p-x-1})dz}{(1-z)(1-z^p)}$$

e operando come nella Prop. antecedente, ſi troverà, che l' eſpreſſione

$$\int\frac{(1-z^{p-x-1})(1-z^{x})dz}{(1-z)(1-z^p)}$$

ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

CAPITOLO DECIMO.

DELLE SERIE DIRETTE E RECIPROCHE DE' SENI, CO-SENI, TANGENTI, E CO-TANGENTI.

LE ſerie dirette, che hanno per termini potenze ſimili di ſeni, e coſeni d' archi che formano tra di sè una progreſſione Aritmetica, ſono ſtate più d'una volta preſe per mano da' Geometri (*Vegg. il Signor* Euler *nell' Introd. all' anal. degl' Inf.*, *il Sig.* Boſſut *nelle Mem. della Soc. Reale per l' anno* 1769, *e li Signori* Bernoulli *e* Lexel *nel XVIII. Vol. de' nuovi Com. di S. Pietrob.*). Ma non ſi ſono ancora laſciate ridurre le potenze ſimili delle tangenti, e delle co-tangenti; e molto meno poi tutta la claſſe reciproca di quelle e di queſte. Avendo pertanto allo ſteſſo metodo ſoggettate le une e le altre, e le loro reciproche, mi luſingo di far coſa grata a' Geometri accoppiando agli altri anche queſto importante ramo della teoria delle ſerie.

TEOREMI.

Se a rappreſenti un Arco di cerchio che ha l' unità per raggio, dico, che

I. $2\,\text{Coſ.}\ xa\ \text{ſen.}\ xa = \text{ſen.}\ 2xa$

II. $\text{Sen.}\,(x+1)\,a + \text{ſen.}\,(x-1)\,a = 2\,\text{coſ.}\,a\ \text{ſen.}\,xa$

III. $\text{Sen.}\,(x+1)\,a - \text{ſen.}\,(x-1)\,a = 2\,\text{coſ.}\,xa\,\text{ſen.}\,a$

IV. $\text{Sen.}\,(2x+1)\,a + \text{ſen.}\,a = 2\,\text{coſ.}\,xa\,\text{ſen.}\,(x+1)\,a$

V. $\text{Sen.}\,(2x-1)\,a + \text{ſen.}\,a = 2\,\text{coſ.}\,(x-1)\,a\,\text{ſen.}\,xa$

VI. $e^{nx} = (\text{coſ.}\,a + \sqrt{-1}\ \text{ſen.}\,a)^{x}$, ſe ſia e la baſe de' logaritmi Iperbolici, $n = a\sqrt{-1}$.

VII. $e^{-nx} = (\text{coſ.}\,a - \sqrt{-1}\ \text{ſen.}\,a)^{x}$

Tutti queſti Teoremi ſi dimoſtrano agevolmente con le regole cognite del calcolo de' ſeni e co-ſeni.

PROBLEMA XLIII.

Trovare la forma differenziale dell' eſpreſſione ſen. xa.

Risoluzione.

Eſſendo $2\,\text{coſ.}\,xa\,\text{ſen.}\,xa = \text{ſen.}\,2xa$ (*Teor. I.*); ſi moltiplichi queſt' equazione per ſen. a; ſarà

$$2\,\text{ſen.}\,xa\,\text{coſ.}\,xa\,\text{ſen.}\,a = \text{ſen.}\,a\,\text{ſen.}\,2xa\,;$$

ma pel III. Teorema

$$2\,\text{coſ.}\,xa\,\text{ſen.}\,a = \text{ſen.}\,(x+1)\,a - \text{ſen.}\,(x-1)\,a.$$

Per conſeguenza, mettendo $a{:}2$ in luogo di a, ſi avrà

$$\frac{\text{ſen.}\left(\frac{x+1}{2}\right) a \,\text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\; a:2} - \frac{\text{ſen.}\left(\frac{x-1}{2}\right) a \,\text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\; 2:a} = \text{ſen.}\; xa$$

Il che ecc.

Altrimenti.

Eſſendo ſen. $(x+1)a +$ ſen. $(x-1)a = 2$ coſ. a ſen. xa, pel II. Teorema, ſi aggiunga da ambe le parti 2 ſen. $xa +$ ſen. a; ſi avrà

$$\text{ſen.}a + 2\,\text{ſen.}xa - \text{ſen.}(x+1)a - \text{ſen.}(x-1)a = 2\,\text{ſen.}xa(1-\text{coſ.}a) + \text{ſen.}a$$

Per conſeguenza

$$\frac{\text{ſen.}a + \text{ſen.}xa - \text{ſen.}(x+1)a}{2-2\,\text{coſ.}a} - \frac{\text{ſen.}a + \text{ſen.}(x-1)a - \text{ſen.}xa}{2-2\,\text{coſ.}\; a} = \text{ſen.}xa.$$

Il che ecc.

PROBLEMA XLIV.

Trovare la forma differenziale dell' eſpreſſione coſ. xa

RISOLUZIONE.

Poichè pel III. Teorema

$$2\;\text{coſ.}\; xa\,\text{ſen.}\; a = \text{ſen.}\;(x+1)\,a - \text{ſen.}\;(x-1)\,a$$

ſi metta $2x$ in luogo di x, e ſi aggiunga da ambe le parti ſen. a. Si avrà

$$\text{ſen.}a + 2\,\text{coſ.}\,2xa\,\text{ſen.}a = \text{ſen.}\;(2x+1)\,a - \text{ſen.}\;(2x-1)\,a + \text{ſen.}a\,;$$

Ma

ſen. $(2x+1)a +$ ſen. $a = 2$coſ. xa ſen. $(x-1)\,a$ (*IV Teorema*)

ſen. $(2x-1)a +$ ſen. $a = 2$coſ.$(x-1)\,a$ ſen.xa (*V Teorema*)

Dunque, ponendo $a:2$ in luogo di a, ſarà

$$\frac{\text{coſ.}\frac{xa}{2}\;\text{ſen.}\left(\frac{1+x}{2}\right)a}{\text{ſen.}\; a:2} - \frac{\text{coſ.}\left(\frac{x-1}{2}\right)a\;\text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\; a:2} = \text{coſ.}\; xa$$

Il che ecc.

PROBLEMA XLV.

Sommare la ſerie (*A*)
$\text{ſen.}\,a + \text{ſen.}\,2a + \text{ſen.}\,3a + \text{ecc.} \ldots\ldots \text{ſen.}\,xa \ldots. (A)$

RISOLUZIONE.

Eſſendo ſen. xa il termine generale della ſerie (*A*), il ſi metta ſotto la forma differenziale trovata poco fa (*Prop. XLIII.*)

$$\frac{\text{ſen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a\,\text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\,a:2} - \frac{\text{ſen.}\left(\frac{x-1}{2}\right)a\,\text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\,a:2}$$

Si ſoſtituiſca l'unità in luogo di x nel ſecondo termine. Ma l'eſpreſſione ſvaniſce a cagione di $0a = 0$. Non reſtando dunque che il primo termine

$$\frac{\text{ſen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a\,\text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\,a:2}$$

ſarà egli neceſſariamente la ſomma generale della ſerie (*A*). Il che ecc.

PROBLEMA XLVI.

Sommare la ſerie (*B*),
$1 + \text{coſ.}\,a + \text{coſ.}\,2a + \text{coſ.}\,3a + \text{ecc.} \ldots\ldots \text{coſ.}\,xa \ldots. (B)$

RISOLUZIONE.

Si metta il termine generale xa della ſerie ſotto la forma differenziale trovata nella Prop. XLIV.

$$\frac{\text{coſ.}\frac{xa}{2}\,\text{ſen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a}{\text{ſen.}\,a:2} - \frac{\text{coſ.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a\,\text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\,a:2}$$

e ſi faccia $x=0$ nel ſecondo termine, perchè il primo termine della ſerie è l'unità, e non potrebbe egli riſultare da coſ. xa, ſe non ſi cominciaſſe la ſoſtituzione de' numeri naturali in luogo di x da $x=0$. Reſtando pertanto il ſolo primo termine di queſta eſpreſſione

$$\frac{\text{coſ.}\ \frac{xa}{2}\ \text{ſen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a}{\text{ſen.}\ a:2}$$

ſarà egli la ſomma generale della ſerie (B). Il che ecc.

COROLLARIO I.

Nello ſteſſo modo ſi troverebbe

$$\frac{\text{coſ.}\left(\frac{1+x}{2}\right)a\ \text{ſen.}\ \frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\ a:2}$$

per la ſomma generale della ſerie

$$\text{coſ.}\ a+\text{coſ.}\ 2a+\text{coſ.}\ 3a\ \text{ecc.}$$

COROLLARIO II.

Queſte due Propoſizioni ſono veramente fondamentali in queſta teoria, ſiccome quelle alle quali ſi riducono le ſomme d'altre ſerie di ſeni, e coſeni più compoſte. Di fatto

I.

Se ſi abbia la ſerie

$$(A)\ldots\text{coſ.}a\ \text{coſ.}b+\text{coſ.}2a\ \text{coſ.}2b+\text{coſ.}3a\ \text{coſ.}3b\ldots+\text{coſ.}xa\ \text{coſ.}xb,$$

poichè $\text{coſ.}\ xa\ \text{coſ.}\ xb=\frac{\text{coſ.}\ x(a-b)+\text{coſ.}\ x(a+b)}{2}$ per la teoria de' ſeni, e coſeni, ella ſi traſformerà nelle due ſeguenti

$$\frac{\text{coſ.}\,(a-b)+\text{coſ.}\,2\,(a-b)+\text{coſ.}\,3\,(a-b)\ldots+\text{coſ.}\,x(a-b)}{2}$$

$$+\;\frac{\text{coſ.}\,(a+)+\text{coſ.}\,2(a+b)+\text{coſ.}\,3\,(a+b)\ldots\text{coſ.}\,x\,(a+b)}{2}$$

ognuna delle quali è ſommabile pel Corollario I. della Propoſizione antecedente.

II.

Similmente trattandoſi di ſommare la ſerie ſen. a ſen. b + ſen. $2a$ ſen. $2b$ + ecc. . . . . . ſen. xa ſen. xb, poichè ella è reducibile alle due

$$\frac{\text{coſ.}\,(a-b)+\text{coſ.}\,2(a-b)\;+\text{ecc.}}{2}$$

$$-\;\frac{\text{coſ.}\,(a+b)+\text{coſ.}\,2(a+b)+\text{ecc.}}{2}$$

potrà nello ſteſſo modo ſommarſi agevolmente.

III.

Parimenti eſſendo propoſta la ſerie

$(B)\ldots$ ſen. a coſ. b + ſen. $2a$ coſ. $2b$ + ecc. . . . ſen. xa coſ. xb ſi potrà ſenza difficoltà determinarne la ſomma. Imperciocchè, eſſendo

$$\text{ſen.}\,xa\;\text{coſ.}\,xb=\frac{\text{ſen.}\,x\,(a+b)+\text{ſen.}\,x\,(a-b)}{2}$$

La ſerie (B) ſi trasforma nelle due

$$\text{ſen.}\,(a+b)+\text{ſen.}\,2(a+b)+\text{ecc.}\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{ſen.}\,x(a+b)$$
$$+\;\text{ſen.}\,(a-b)+\text{ſen.}\,2(a-b)+\text{ecc.}\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{ſen.}\,x(a-b)$$

ciaſcheduna delle quali è ſommabile per la Prop. XLV.

IV.

Di più cogli ſteſſi fondamenti ſi poſſono ſommare

le ſerie

le ſerie di ſeni, e coſeni d' archi procedenti ſecondo qualſivoglia progreſſione aritmetica $p+qx$, come ſono le ſerie (C), (D)

$$(C)\ldots\ \text{ſen.}\,(p+q)\,a+\text{ſen.}\,(p+2q)\,a+\text{ecc.}\ldots\ldots\ \text{ſen.}\,(p+qx)\,a$$
$$(D)\ldots\ \text{coſ.}\,(p+q)\,a+\text{coſ.}\,(p+2q)\,a+\text{ecc.}\ldots\ldots\ \text{coſ.}\,(p+qx)\,a$$

Imperciocchè, eſſendo

$$\text{ſen.}\,(p+qx)\,a=\text{ſen.}\,pa\ \text{coſ.}\,xqa+\text{coſ.}\,pa\ \text{ſen.}\,xqa$$

Se ſi ſvolgano in ſerie i due Termini generali, ſi traſformerà la ſerie (C) nelle due

$$\text{ſen.}\,pa\,(\text{coſ.}\,qa+\text{coſ.}\,2qa+\text{coſ.}\,3qa\ldots\ldots\ \text{coſ.}\,xqa)$$
$$+\,\text{coſ.}\,pa\,(\text{ſen.}\,qa+\text{ſen.}\,2qa+\text{ſen.}\,3qa\ldots\ \text{ſen.}\,xqa)$$

le quali ſi poſſono ſommare per le Prop. precedenti. Lo ſteſſo accaderà della ſerie (D), la quale potrà agevolmente ridurſi a ſerie ſommabili per le medeſime propoſizioni.

SCOLIO.

Non ſarebbe difficile coſa il ſommare con lo ſteſſo metodo le ſerie

$$\text{ſen.}^m\,a+\text{ſen.}^m\,2a+\text{ſen.}^m\,3a\ldots\ldots\ \text{ſen.}^m\,xa$$
$$\text{coſ.}^m\,a+\text{coſ.}^m\,2a+\text{coſ.}^m\,3a\ldots\ldots\ \text{coſ.}^m\,xa$$

mettendo ſucceſſivamente i numeri naturali in luogo di m, come appunto hanno fatto gli autori ſopraccitati. Ma avendo oſſervato che non traeva alcun vantaggio da' caſi particolari, onde poggiare alla ſoluzione generale, l' ho cercata direttamente.

Una felice ſoſtituzione non ha reſo inutili i miei sforzi, e in tal guiſa abbiamo per un' altra via la ſoluzione generale del Problema.

PROBLEMA XLVII.

Sommare generalmente la ſerie (I)

$$\text{ſen.}^m\,a+\text{ſen.}^m\,2a+\text{ſen.}^m\,3a+\text{ecc.}\ldots\ldots\ \text{ſen.}^m\,xa\ldots\ (I)$$

RISOLUZIONE.

Poichè

$$\text{ſen.}^m\, xa = \left(\frac{(\text{coſ.}\, a + \sqrt{(-1)}\, \text{ſen.}\, a)^x - (\text{coſ.}\, a - \sqrt{(-1)}\, \text{ſen.}\, a)^x}{2\sqrt{(-1)}} \right)^m$$

ed è $e^{xa\sqrt{(-1)}} = e^{nx} = (\text{coſ.}\, a + \sqrt{(-1)}\, \text{ſen.}\, a)^x$ (*VI Teorema*)

$e^{-xa\sqrt{(-1)}} = e^{-nx} = (\text{coſ.}\, a - \sqrt{(-1)}\, \text{ſen.}\, a)^x$ (*VII Teorema*)

il termine generale $\text{ſen.}^m\, xa$ prende manifeſtamente la ſeguente forma

$$(e^{nx} - e^{-nx})^m : (2\sqrt{(-1)})^m \ldots\ldots (M)$$

Si alzi queſto binomio alla potenza m. Il termine generale della ſerie (I) diverrà l' eſpreſſione

$$\frac{1}{(2\sqrt{(-1)})^m} \left(e^{mnx} - \frac{m}{1} e^{(m-2)nx} + \frac{m(m-1)}{1.2} e^{(m-4)nx} \right.$$
$$\left. - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} e^{(m-6)nx} + \text{ecc.} \right)$$

compoſta di $m+1$ termini generali ſempliciſſimi. Se dunque $S.A$ rappreſenti la ſomma generale di una ſerie, di cui A è il termine generale ſi troverà, ricorrendo alla Prop. IV del III Cap.,

$$S.\, e^{mnx} = \frac{e^{mn}}{e^{mn}-1} (e^{mnx} - 1)$$

$$S.\, \frac{m}{1} e^{(m-2)nx} = \frac{m e^{(m-2)n}}{e^{(m-2)n} - 1} (e^{(m-2)nx} - 1)$$

$$S.\, \frac{m(m-1)}{1.2} e^{(m-4)nx} = \frac{m(m-1) e^{(m-4)n}}{1.2(e^{(m-4)n} - 1)} (e^{(m-4)nx} - 1)$$

ecc. e però generalmente, unendo inſieme tutte queſte ſomme particolari, ſarà l' eſpreſſione ſeguente

$$\frac{1}{(2\sqrt{(-1)})^m}\Bigg(\frac{e^{mn}}{e^{mn}-1}(e^{mnx}-1)-\frac{me^{(m-2)n}}{e^{(m-2)n}-1}(e^{(m-2)nx}-1)$$

$$+\frac{m(m-1)\,e^{(m-4)n}}{1.2(e^{(m-4)n}-1)}(e^{(m-4)nx}-1)$$

$$-\frac{m(m-1)\,(m-2)\,e^{(m-6)n}}{1.2.3\,(e^{(m-6)n}-1)}(e^{(m-6)nx}-1)+\text{ecc.}\Bigg)$$

la ſomma generale della ſerie (I). Il che ecc.

COROLLARIO.

Eſſendo manifeſta la legge di queſta formula generale, non reſta, che ſoſtituire i valori convenienti ne' caſi particolari, ſenza che il ſi faccia qui togliendo all' eſpreſſione la ſomma ſemplicità, ond' è dotata.

PROBLEMA XLVIII.

Sommare la ſerie (I)

$$\text{coſ.}^m a+\text{coſ.}^m 2a+\text{coſ.}^m 3a+\text{ecc.}\ldots\ldots\text{coſ.}^m xa\ldots\ldots(I)$$

RISOLUZIONE.

Eſſendo

$$\text{coſ.}^m xa=\frac{1}{2^m}\left((\text{coſ.}a+\sqrt{(-1)}\,\text{ſen.}a)^x+(\text{coſ.}a-\sqrt{(-1)}\,\text{ſen.}a)^x\right)^m,$$

il termine generale della ſerie (I) prende la ſeguente forma

$$(e^{nx}+e^{-nx})^m : 2^m$$

per le ſoſtituzioni uſate nella Prop. antecedente.

Dunque, alzata queſt' eſpreſſione alla poteſtà m, e preſe inſieme le ſomme de' termini generali riſultanti da queſt' evoluzione, ſi perverrà, come precedentemente, alla formula che ſegue

$$\frac{1}{2^m}\left(\frac{e^{mn}}{e^{mn}-1}\left(e^{mnx}-1\right)+\frac{me^{(m-2)n}}{e^{(m-2)n}-1}\left(e^{(m-2)nx}-1\right)\right.$$
$$+\frac{m(m-1)e^{(m-4)n}}{1.2\left(e^{(m-4)n}-1\right)}\left(e^{(m-4)nx}-1\right)$$
$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)e^{(m-6)n}}{1.2.3\left(e^{(m-6)n}-1\right)}\left(e^{(m-6)nx}-1\right)+\text{ecc.}\ldots\right)$$

la quale ſarà la ſomma generale della ſerie (I). Il che ecc.

COROLLARIO II.

Ma havvi ancora una generalità più grande, che può darſi a queſte ſoluzioni, proponendoſi di ſommare le ſerie

(A)..ſen.$^m(p+q)a$+ſen.$^m(p+2q)a$+ſen.$^m(p+3q)a$+ecc..ſen.$^m(p+qx)a$
(B)..coſ.$^m(p+q)a$+coſ.$^m(p+2q)a$+coſ.$^m(p+3q)a$+ecc..coſ.$^m(p+qx)a$

Imperciocchè col mezzo delle ſoſtituzioni praticate nelle due Prop. antecedenti i termini generali di queſte due ſerie prendono le ſeguenti forme

$$\left(e^{n(p+qx)}-e^{-n(p+q)}\right)^m:\left(2\sqrt{(-1)}\right)^m,$$
$$\left(e^{n(p+qx)}-e^{-n(p+qx)}\right)^m:2^m$$

e però ſvolgendole, e ſommando le ſerie parziali, come s' è fatto precedentemente, ſi può agevolmente definire cogli aggregati di queſte ſomme particolari le ſomme generali delle propoſte ſerie (A), (B).

PROBLEMA XLIX.

Sommare la ſerie (A)

tang. $a +$ tang. $2a +$ tang. $3a +$ ecc.... tang. xa .... (A)

Risoluzione.

E' dimoſtrato nel *XIX. Vol. de' nuovi Com. di S. Pietrob. pag.* 5. che nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione

$$\int \frac{z^{p-x} - z^{p+x}}{1 - z^{2p}} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{\pi}{2p} \text{ tang. } \frac{\pi x}{2p}$$

eſſendo π la circonferenza di un cerchio che ha l' unità per diametro. Si faccia pertanto Arc. $a = \frac{\pi}{2p}$.

Sarà

$$\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a-x-1} - z^{\pi:2a+x-1}}{1 - z^{\pi:a}} . dz = \text{tang. } xa \ldots . (N)$$

il termine generale della ſerie (A). Si metta ora l' eſpreſſione integrale (N) ſotto la forma differenziale, che ſegue

$$(1) \frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a-x-1}\, dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:a})} - (2)\, \frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a-x-2}\, dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:a})}$$

$$(3) - \frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a+x-1}\, dz}{(1-z)(1-z^{\pi:a})} + (4) \frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a+x}\, dz}{(1-z)(1-z^{\pi:a})}$$

e ſi ſoſtituiſca l' unità in luogo di x ne' termini (1), (3), e dalle quantità riſultanti ſi ſottraggano riſpettivamente i termini (2), (4). Si avranno le due formule

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-2}dz\left(1-z^{-x}\right)}{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}-\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}dz\left(1-z^{x}\right)}{(1-z)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

la quali ſi riducono facilmente alla ſeguente

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}dz\left(1-z^{x}\right)\left(z^{-x-1}-1\right)}{(1-z)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

che ſarà la ſomma generale della ſerie (*A*) nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

PROBLEMA L.

Sommare la ſerie (*M*)
cot. a + cot. $2a$ + cot. $3a$ + ecc.... cot. xa.... (*M*)

RISOLUZIONE.

Eſſendo dimoſtrato nel luogo citato qui innanzi, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{x-1}-z^{\pi:a-x-1}}{1-z^{\pi:a}}.dz=\cot.xa$$

ſarà queſt' eſpreſſione integrale il termine generale della ſerie (*M*). La ſi metta dunque ſotto la ſeguente forma differenziale

$$(1)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{x-1}dz}{(1-z)\left(1-z^{\pi:a}\right)}-(2)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{x}dz}{(1-z)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

$$-(3)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:a-x-1}dz}{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}+(4)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:a-x-2}dz}{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

e, fatte le operazioni della Prop. antecedente, ſi avrà l' eſpreſſione ridotta di queſta forma

$$\frac{1}{a}\int\frac{\left(1-z^{\pi:a-x-1}\right)\left(1-z^{x}\right)dz}{(1-z)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

che ſarà la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA LI.

Sommare la ſerie (*A*)
tang. $(p+q)a+$tang.$(p+2q)a+$tang.$(p+3q)a$......tang.$(p+qx)a$
. . . . (*A*)

RISOLUZIONE.

Si ponga $p+qx$ in luogo di x nell' eſpreſſione integrale (*N*) della Prop. XLIX. Diverrà ella

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-p-qx}-z^{\pi:2a+p+qx}}{1-z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\text{tang.}\,(p+qx)a$$

nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione; e però ſarà queſto il termine generale della ſerie (*A*).

Il ſi metta ſotto la forma differenziale

$$(1)\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-p-qx}}{\left(1-z^{-q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}-(2)\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-p-qx-q}}{\left(1-z^{-q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$-(3)\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a+p+qx}}{\left(1-z^{q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}+(4)\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a+p+qx+q}}{\left(1-z^{q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}$$

e operando, come nelle Prop. antecedenti, ſi avrà l'eſpreſſione ridotta

$$\frac{1}{a}\int \frac{z^{\pi:2a}(1-z^{qx})(z^{-p-qx}-z^{p+q})}{(1-z^{q})(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione ſarà la ſomma generale della propoſta ſerie (A). Il che ecc.

COROLLARIO III.

Nello ſteſſo modo ſi ſommerà la ſerie
$\cot.(p+q)a + \cot.(p+2q)a + \cot.(p+3q)a +$ ecc..... $\cot.(p+qx)a$

PROBLEMA LII.

Sommare la ſerie riciproca de' ſeni

$$\frac{1}{\text{ſen.}(p+q)a}+\frac{1}{\text{ſen.}(p+2q)a}+\frac{1}{\text{ſen.}(p+3q)a}\ldots\ldots+\frac{1}{\text{ſen.}(p+qx)a}$$

RISOLUZIONE.

Egli è dimoſtrato nel medeſimo Volume, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{z^{m}+z^{n-m}}{1+z^{n}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{n\,\text{ſen.}\frac{m\pi}{n}}$$

Si faccia pertanto $\frac{\pi}{n}=a$, $m=p+qx$; l' eſpreſſione

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx}+z^{\pi:a-p-qx}}{1+z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{1}{\text{ſen.}(p+qx)a}$$

ſarà il termine generale della ſerie. Gli ſi dia perciò la ſeguente forma differenziale

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx}-z^{\pi:a-p-qx+q}}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx+q}-z^{\pi:a-p-qx}}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

e poſta l' unità in luogo di x nel primo membro, ſi ſottragga il ſecondo dalla quantità che riſulta da quella ſoſtituzione. Sarà la formula

$$\frac{1}{a}\int\frac{(1-z^{qx})(z^{p+q}+z^{\pi:a-p-qx})}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

la ſomma generale ricercata, nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

PROBLEMA LIII.

Sommare la ſerie reciproca de' Co-Seni

$$\frac{1}{\text{coſ.}(p+q)a}+\frac{1}{\text{coſ.}(p+2q)a}+\frac{1}{\text{coſ.}(p+3q)a}\cdots\frac{1}{\text{coſ.}(p+qx)a}$$

RISOLUZIONE.

Se nell' eſpreſſione

$$\int\frac{z^{x}+z^{n-x}}{1+z^{n}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{n\,\text{ſen.}\,\frac{\pi x}{n}}$$

da cui abbiamo tratto poco fa il termine generale della ſerie reciproca de' ſeni, ſi faccia $n=2p$, e ſi metta $p-x$ in luogo di x, ſi ha

$$\int\frac{z^{p-x}+z^{p+x}}{1+z^{2p}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{2p\,\text{ſen.}\,\frac{\pi(p-x)}{2p}};$$

Ma $\frac{\pi}{2p\,\text{ſen.}\,\frac{\pi(p-x)}{2p}}=\frac{\pi}{2p\,\text{coſ.}\,\frac{\pi x}{2p}}$. Dunque facendo $\frac{\pi}{2p}=a$ e ponendo $p+qx$ in luogo di x, ſi avrà

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-p-qx}+z^{\pi:2a+p+qx}}{1+z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{1}{\text{coſ.}\,(p+qx)a}$$

pel termine generale della propoſta ſerie.

Il ſi metta pertanto ſotto la forma differenziale

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a+p+qx}-z^{\pi:2a-p-qx+q}}{(1-z^{q})(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a+p+qx+q}-z^{\pi:2a-p-qx}}{(1-z^{q})(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

e operando, come s' è fatto nella Prop. antecedente, ſi troverà l' eſpreſſione

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}(1-z^{qx})(z^{-p-qx}+z^{p+q})}{(1-z^{q})(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

che ſarà la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA LIV.

Sommare la ſerie reciproca delle Tangenti

$$\frac{1}{\text{tang.}(p+q)a}+\frac{1}{\text{tang.}(p+2q)a}+\frac{1}{\text{tang.}(p+3q)a}\dots\frac{1}{\text{tang.}(p+qx)a}$$

RISOLUZIONE.

Eſſendo nel medeſimo luogo dimoſtrato, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{z^{x}-z^{n-x}}{1-z^{n}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{n\,\text{tang.}\,\frac{\pi x}{n}}$$

ſe ſi ponga a in luogo di $\frac{\pi}{n}$, $p+qx$ in luogo di x, ſi avrà il termine generale della ſerie ſotto queſta forma

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx}-z^{\pi:a-p-qx}}{1-z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{1}{\text{tang.}\,(p+qx)a}$$

Gli ſi dia la forma differenziale ſeguente

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx}+z^{\pi:a-p-qx+q}}{(1-z^{q})(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx+q}+z^{\pi:a-p-qx}}{(1-z^{q})(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

e operando, come nelle *Prop.* precedenti, ſi perverrà all' eſpreſſione

$$\frac{1}{a}\int\frac{(1-z^{qx})(z^{p+q}-z^{\pi:a-p-qx})}{(1-z^{q})(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

che, nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA LV.

Sommare la ſerie reciproca delle Cotangenti

$$\frac{1}{\text{cot.}\,(p+q)a}+\frac{1}{\text{cot.}\,(p+2q)a}+\frac{1}{\text{cot.}(p+3q)a}\ldots\frac{1}{\text{cot.}(p+qx)a}$$

RISOLUZIONE.

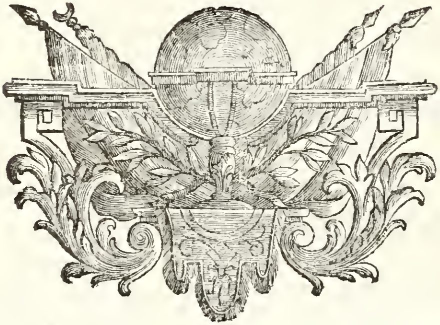
Eſſendo $\dfrac{\pi}{2p\,\text{cot.}\,\dfrac{\pi x}{2p}}=\dfrac{\pi\,\text{tang.}\,\dfrac{\pi x}{2p}}{2p}$, è manifeſto, che ſarà $\dfrac{1}{\text{cot.}\,(p+qx)a}=\text{tang.}\,(p+qx)a$. Si ripigli pertanto la formula integrale della *Prop.* LI, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione eſprime la ſomma generale della ſerie, che ha per termine tang. $(p+qx)a$, cioè

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}(1-z^{qx})(z^{-p-qx}-z^{p+q})}{(1-z^{q})(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

Sarà ella la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

SCOLIO.

Se i limiti di una Memoria il comportaſſero, non ſarebbe difficile coſa l' inoltrare queſta Teoria, e ſommare le ſerie de' prodotti, potenze, ed altre affezioni delle tangenti, e cotangenti d' archi procedenti ſecondo qualſivoglia aritmetica progreſſione. Ma ciò per ora baſti intorno alle ſerie in generale, non eſſendo impoſſibile, che cada in animo ad alcuno di ſtendere e compilare ſulle tracce di queſta Memoria non meno, che col fondamento de' Saggi moltiplici, che ſi trovano ſparſi nell' opere de' più illuſtri Geometri, un Trattato generale ſu queſt' ardua e importantiſſima Scienza delle Serie.



RICERCHE

Intorno al Calcolo Integrale dell' equazioni differenziali finite.

Del Sig. Anton-Mario Lorgna Direttore delle Scuole Militari di Verona.

SE una quantità variabile riceva una qualche variazione effettiva, è certo, che qualſivoglia funzione di quella variabile varia anch' eſſa nello ſteſſo tempo. E ſiccome ſottraendo dalla quantità variata la quantità primitiva, ſi ottiene l' incremento ſteſſo o il decremento indotto nella quantità variabile; così dalla forma variata, qualunque ella ſiaſi, ſottraendo la funzione primitiva, ſi conſeguiſce la quantità della variazione incontrata dalla funzione variata. Le quantità pertanto, che riſultano da queſte ſottrazioni, diconſi in generale differenze, e queſte infinitamente piccole, ſe infinitamente piccolo è l' incremento o il decremento indotto nella variabile; e differenze finite, ſe di valore finito ſia la variazione apportata alla variabile. Quindi i due rami elementari, uno di calcolo differenziale, onde trovare le differenze infiniteſime, e le finite di qualſivoglia funzione d' una propoſta variabile; e l' altro di calcolo integrale, ove ſi tratta dalle differenze infiniteſime, e finite di rimontare alla funzione ſteſſa, di cui elle ſono le differenze. Ma come può avervi relazione tra due o più variabili eſpreſſa per equazioni, così può avervi del pari relazione tra le differenze di due o più variabili, ed equazioni differenziali eſprimenti la ragione tra di sè delle variazioni così infiniteſime come finite, indotte nelle funzioni per l' incremento o decremento ricevuto dalle variabili, delle quali ſono elle funzioni. Quindi di nuovo i due altri rami di calcolo differenziale per le variazioni infiniteſime e finite dell'equazioni finite; e di calcolo integrale, onde trovare con la relazione data di queſte variazioni la relazione finita tra le variabili. Ancorchè nel Libro del Sig. *Moivre*, che ha per titolo (*Miſcellan. Analytica de Ser.*), e più particolarmente nel Trattato delle Serie del Sig. *Stirling*, ſi trovino maneggiate equazioni a differenze finite, ben conſiderandone la natura, elle ſi riducono piuttoſto a differenziali ed integrali di ſemplici funzioni, di quello che al calcolo delle equazioni propriamente a due o più variabili, ch'è materia totalmente nuova. Lo ſteſſo può dirſi del calcolo intorno alle differenze finite, che ci ha dato l' immortale Sig. *Eulero* nelle ſue eccellenti Inſtituzioni, il quale tutto ſi aggira ſulle funzioni d'una variabile. L' epoca vera di queſto nuovo calcolo integrale dell' equazioni differenziali a differenze finite, e a più variabili è recentiſſima, dopo che il ſommo Geometra Sig. de la *Grange* pubblicò nel primo volume degli Atti della Società Reale di Torino un metodo nel 1759. di trattare la Teoria delle Serie ricorrenti dipendentemente dall' integrazione d' una ſorta di queſte equazioni a due variabili. Preſero in ſeguito diverſi illuſtri Geometri a coltivarlo ed eſtenderlo con dottiſſime ricerche, tra' quali ſi diſtinſero i Signori de la *Place*, de *Condorcet*, *Monge*, e di nuovo il Sig. de la *Grange* (*ſi veggano* il T. IV. delle Mem. della *Soc. R.* di Torino, li T. VI. VII. e IX. delle *Mem.* preſentate alla *Soc. R.* di Parigi, le Mem. della med. *Soc. R.* per gli anni 1769, 1770, 1771, e quelle della *R. Soc.* di Berlino per l' anno 1774). Non è a mia cognizione che dopo queſti celebri uomini abbia fatto alcun altro progreſſi importanti in queſta materia. Al più il

Sig. Ab. *Paoli* di queſta *Società* in un eccellente Opuſcolo pubblicato in Livorno nel 1780. alla progreſſione aritmetica x, $x+a$, $x+2a$, ecc. degl'incrementi ha ſoſtituito la geometrica ax, a^2x, a^3x, ecc.

Ma in un Paeſe di nuova ſcoperta è naturale coſa, che ci ſi offeriſcano agli occhi oggetti ſempre nuovi. Nel fare pertanto qualche ſtudio ſu queſto calcolo parvemi che il ſi poteſſe ampiare e promovere, battendo nuove vie nel maneggiarlo, e adoperando altri metodi dagli uſati finora, coll'adattarlo non ſolamente alle differenze finite coſtanti, ma alle variabili eziandio. Non vi era poi fatto alcun paſſo intorno alle equazioni differenziali a coefficienti variabili; reſtavano da trattarviſi parecchi articoli così ſu le funzioni arbitrarie, come ſu' maſſimi e minimi, e molti altri da ſvolgere, onde ravvicinarlo più e più al calcolo integrale comune, e alla Teoria delle equazioni a differenze parziali. Deſidero, che le indagini che ho fatto ſu tutti queſti argomenti meritar poſſano l'attenzione de' Geometri. Le ripartirò in più Memorie ſeguendo l' ordine ſteſſo con cui mi vi ſono ſucceſſivamente applicato.

MEMORIA I.

CAPITOLO PRIMO

DELLA DIFFERENZIAZIONE DELLE FUNZIONI ED INTEGRAZIONE DE' DIFFERENZIALI SEMPLICI.

DEFINIZIONI.

§. I. Ritenendo i conſueti ſegni (*Inſtituz. di Calc. Diff. del Sig. Eulero*) s' intenda generalmente per y' quello che diventa y, funzione qualunque della variabile x, ſe ſi ponga $x + X$ in luogo di x, eſſendo X qualſivoglia grandezza finita, ſia ella coſtante o una funzione di x qualunque. Similmente s' intenda per y'' ciò che diventa y', ſe in luogo di x ſi ponga in y' di nuovo $x + X$, e così ſucceſſivamente.

§. II. Steſſamente conſervando il ſegno caratteriſtico Δ per le differenze finite, ſia generalmente

$$y' - y = \Delta y$$

$$y'' - y' = \Delta y'$$

$$y''' - y'' = \Delta y''$$

- - - - - - - - -

$$y^{n+1} - y^{n} = \Delta y^{n}$$

COROLLARI.

§. III. Prendendo dunque ſucceſſivamente le differenze de' membri di queſte equazioni, ſi avranno le differenze ſeconde, le terze ecc. come ſegue

$\Delta y' - \Delta y = \Delta^2 y$

\- - - - - - - - - - - - - -

$\Delta y^{n+1} - \Delta y^n = \Delta^2 y^n$

$\Delta^2 y' - \Delta^2 y = \Delta^3 y$

\- - - - - - - - - - - - - -

$\Delta^2 y^{n+1} - \Delta^2 y^n = \Delta^3 y^n$

e così all' infinito

§. IV. E ſe in queſte equazioni ſi ſoſtituiſcano i valori ſucceſſivamente di Δy, $\Delta y'$ ecc. tratti dal §. II. ſi avrà

$\Delta y = y' - y$

$\Delta^2 y = y'' - 2y' + y$

$\Delta^3 y = y''' - 3y'' + 3y' - y$

ecc., e così all' infinito

§. V. Non dipenderà pertanto, come prima, la natura delle quantità variate y', y'' ecc. dalla ſola natura della funzione y, ma e da queſta, e da quella inſieme della grandezza X, che coſtituiſce l' incremento o il decremento ricevuto dalla variabile.

DEFINIZIONE.

§. VI. Si chiami $x + X$ il modulo generale delle differenze finite.

SCOLIO.

§. VII. Poichè y' è ciò che diviene la funzione y ponendovi il modulo $x + X$ in luogo di x, e y'' ciò che diviene y' ponendo $x + X$ in luogo di x, e così ſucceſſivamente (§. 1.), ſe nel modulo $x + X$ ſi metta lo ſteſſo modulo $x + X$ in luogo di x, sì che riſulti $x + X + X'$, eſſendo X' ciò che diviene X mettendovi il modulo $x + X$ in luogo di x; e poi di nuovo ſi ponga nel ſecondo termine $x + X + X'$ il modulo $x + X$ in luogo di x, sì che riſulti $x + X + X' + X''$, eſſendo X'' ciò che diventa X' ſoſtituendovi il modulo in luogo di x, e così ſucceſſivamente, sì che ne provenga la ſerie

$$x+X;\ x+X+X';\ x+X+X'+X'';\ x+X+X'+X''+X''';\ \text{ecc.}$$

egli è manifeſto, che riſulta la ſteſſa funzione y'', così ſe in luogo di x ſi ponga il modulo $x+X$ nella funzione y', come ſe per x ſi ſoſtituiſca nella funzione y il ſecondo termine di queſta ſerie $x+X+X'$. Similmente riſulta la funzione y''' tanto ponendo in y'' il modulo in luogo di x, quanto ſoſtituendo per x nella funzione y il terzo termine di queſta ſerie, e così ſempre. In conſeguenza queſta ſerie, e quella delle funzioni ſi corriſpondono in queſto modo

$$y \quad \left\{ \begin{array}{cccc} x+X; & x+X+X'; & x+X+X'+X''; & \text{ecc.} \\ y'; & y''; & y''; & \text{ecc.} \end{array} \right.$$

che ſe X ſia la coſtante a, la ſerie diventa

$$x+a;\ x+a+a;\ x+a+a+a;\ \text{ecc.}$$

che è il caſo notiſſimo della variazione coſtante, a cui ſi ſono comunemente limitati ſinora.

PROPOSIZIONE I.

§. VIII. *Eſſendo* y *una funzione qualſivoglia della variabile* x, *ſe* x *riceva un incremento o decremento finito* X, *la funzione* y *prende queſta forma*, *in cui* dx *è coſtante*,

$$y \pm \frac{Xdy}{dx} + \frac{X^2ddy}{1.2dx^2} \pm \frac{X^3d^3y}{1.2.3.dx^3} + \text{ ecc. all' infinito}$$

Veggaſi, per la dimoſtrazione, il Sig. *Taylor* (*Meth. increm. inv.*) che fu il primo a produrre queſt' importantiſſima eſpreſſione, ed il Sig. *Eulero* nelle ſue Inſtituzioni di Calcolo Diff. pag. 333. e ſeg., e pag. 353.

SCOLIO.

§. IX. L'eſpreſſione del valore di y, in cui ſia ſtato poſto $x \pm X$ in luogo di X, abbraccia, coll' ambiguità de' ſegni, così la variazione per incremento, come per decremento. Per facilità di calcolo ſi prenderà ſempre la ſerie col ſegno permanente poſitivo, eſſendo facile di alternare i ſegni al caſo che la variazione ſi faccia per decremento.

COROLLARIO.

§. X. Poichè dunque y'' è ciò che divien y ponendovi in luogo di x la quantità $x + X + X'$; e ſimilmente y''' ciò che diviene la ſteſſa funzione y ſoſtituendovi per x la quantità $x + X + X' + X''$, e così ſucceſſivamente (§. VII.); è facile da vedere, che torna lo ſteſſo, come ſe ſucceſſivamente riceveſſe la variabile x nella ſunzione y la variazione X, $X + X'$, $X + X' + X''$, ecc.

Sarà pertanto (§. VIII.)

$$y' = y + \frac{xdy}{dx} + \frac{X^2 ddy}{1.2dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y'' = y + (X + X')\frac{dy}{dx} + (X + X')^2 \frac{ddy}{1.2dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y''' = y + (X + X' + X'')\frac{dy}{dx} + (X + X' + X'')^2 \frac{ddy}{1.2dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y^{n+1} = y + (X + X' \ldots . X^n)\frac{dy}{dx} + (X + X' \ldots . X^n)^2 \frac{ddy}{1.2dx^2}$$

$$+ \ (X + X' \ldots . X^n)^3 \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3} + \text{ecc.}$$

PROPOSIZIONE II.

§. XI. *Data una funzione qualunque* y *della variabile* x *trovare le differenze finite di* y *di tutti gli ordini, poſta per modulo generale delle differenze l' eſpreſſione* x + X.

RISOLUZIONE.

Eſſendo $y' - y = \Delta y$ (§. IV), ſoſtituendo in queſt' equazione il valore di y' (§. X), ſarà la differenza prima

$$\Delta y = X \frac{dy}{dx} + X^2 \frac{ddy}{1.2dx^2} + X^3 \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Di nuovo eſſendo $y'' - 2y' + y = \Delta^2 y$, ſoſtituendo i valori di y', y'', e facendo $X = (m')$, $X + X' = (m'')$, ſi avrà

$$\Delta^2 y = \left((m'') - 2(m')\right) \frac{dy}{dx} + \left((m'')^2 - 2(m')^2\right) \frac{ddy}{1.2dx^2}$$

$$+ \left((m'')^3 - 2(m')^3\right) \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

E parimenti ſoſtituendo nell' equazione $y''' - 3y'' + 3y' - y = \Delta^3 y$ i valori di y', y'' ecc., e ponendo $X + X' + X'' = (m''')$, ſi otterrà la differenza terza della funzione y di queſta forma.

$$\Delta^3 y = \left((m''') - 3(m'') + 3(m')\right) \frac{dy}{dx} + \left((m''')^2 - 3(m'')^2 + 3(m')^2\right) \frac{ddy}{1.2dx^2}$$

$$+ \left((m''')^3 - 3(m'')^3 + 3(m')^3\right) \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Similmente, eſſendo $\Delta^4 y = y'''' - 4y''' + 6y'' - 4y' + y$, ſoſtituendo i valori corriſpondenti, e ponendo $(m'''') = X + X' + X'' + X'''$, ſarà

$$\Delta^4 y = \left((m'''') - 4(m''') + 6(m'') - 4(m')\right)\frac{dy}{dx} + \left((m'''')^2 - 4(m''')^2\right.$$

$$\left. + 6(m'')^2 - 4(m')^2\right)\frac{ddy}{1.2dx^2} + \left((m'''')^3 - 4(m''')^3 + 6(m'')^3\right.$$

$$\left. - 4(m')^3\right)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Per determinare dunque la forma corriſpondente alla differenza $n.^{ma}$ di y non è difficile lo ſcoprire, che tutto dipende dal determinare il coefficiente di $\frac{dy}{dx}$, mentre prendendo a parte a parte le ſeconde potenze, poi le terze, quarte ecc. d' ogni termine (m^n), (m^{n-1}), (m^{n-2}) ecc. di queſto coefficiente, ſi ottengono ſucceſſivamente i coefficienti di $\frac{ddy}{1.2dx^2}$, $\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$ ecc. Ora il coefficiente di $\frac{dy}{dx}$ è manifeſtamente uguale alla potenza $n.^{ma}$ di $m-1$, da cui ſia ſempre tolto l' ultimo termine, ch' è l' unità, cioè di queſta forma

$$(m^{n}) - \frac{n}{1}(m^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{1.2}(m^{n-2}) - \frac{n..(n-2)}{1.2.3}(m^{n-3}) + \text{ecc.} \pm 1$$

eſſendo l' unità poſitiva o negativa ſecondo che n ſarà diſpari o pari. In conſeguenza ſarà generalmente la differenza $n.^{ma}$ di qualunque funzione y della variabile x della forma ſeguente.

$$\Delta^{n} y = \left((m^{n}) - \frac{n}{1}(m^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{1.2}(m^{n-2}) \right.$$

$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(m^{n-3}) + \text{ecc.} \pm 1 \right)\frac{dy}{dx}$$

$$+ \left((m^{n})^2 - \frac{n}{1}(m^{n-1})^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}(m^{n-2})^2 \right.$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(m^{n-3}\right)^2 + \text{ecc.} \pm 1 \Big) \frac{ddy}{1.2dx^2}$$
$$+\Big(\left(m^{n}\right)^3 - \frac{n}{1}\left(m^{n-1}\right)^3 + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(m^{n-2}\right)^3$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(m^{n-3}\right)^3 + \text{ecc.} \pm 1 \Big) \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

eſſendo $\left(m^{n}\right) = X + X' + X''....X^{n-1}$, e $\frac{dy}{dx}, \frac{ddy}{dx^2}$ ecc. quantità cognite e neceſſariamente finite. Il che ecc.

SCOLIO.

§. XII. Ancorchè l' uſo di queſta formula per ritrovare le differenze finite d' ogni grado di qualſivoglia funzione di x col modulo $x + X$ non poſſa avere alcuna difficoltà, ne faremo qualche applicazione a' caſi particolari per riſchiaramento.

I. ESEMPIO.

Sia propoſto di trovare la differenza ſeconda di x^2, eſſendo il modulo $x + ax^2$. Sarà pertanto $X = ax^2$, $y = x^2$, $dy = 2xdx$, $ddy = 2dx^2$, e d^3y con tutti gli altri differenziali ſucceſſivi $= 0$. E perciò ſi avrà dalla formula

$\Delta^2 x^2 = \big((m'') - 2(m')\big)2x + \big((m'')^2 - 2(m')^2\big)$

Ma $(m') = X = ax^2$, $(m'') = X + X' = ax^2 + a(x + ax^2)^2$;

Dunque $2x(m'') = 4ax^3 + 4a^2x^4 + 2a^3x^5$; $4x(m') = 4ax^3$, $(m'')^2 = (2ax^2 + 2a^2x^3 + a^3x^4)^2$, $2(m')^2 = 2a^2x^4$, e però

$\Delta^2 x^2 = a^6x^8 + 4a^5x^7 + 8a^4x^6 + 10a^3x^5 + 6a^2x^4$.

II. ESEMPIO.

Si cerchi la differenza terza di x col modulo $x + l.x$. Eſſendo $X = l.x$, $n = 3$, $y = x$, $dy = dx$, e ddy, d^3y ecc. $= 0$, ſarà
$\Delta^3 x = (m''') - 3(m'') + 3(m')$. Ma $(m') = X = l.x$,
$(m'') = X + X' = l.x + l.(x + l.x)$, $(m''') = X + X' + X''$
$= l.x + l.(x + l.x) + l.\big(x + l.x + l.(x + l.x)\big)$. Dunque
$\Delta^3 x = l.x + l.(x + l.x) + l.\big(x + l.x + l.(x + l.x)\big) - 3l.x -$
$3l.(x + l.x) + 3l.x = l.x - 2l.(x + l.x) + l.\big(x + l.x + l.(x + l.x)\big)$

III. ESEMPIO.

Sia da determinarſi la differenza prima di $bx + cx^2$ eſſendo $x - ax + bx^2$ il modulo delle differenze. Sarà pertanto $X = bx^2 - ax$, $n = 1$, $y = bx + cx^2$, $dy = bdx + 2cxdx$, $ddy = 2cdx^2$, d^3y, d^4y ecc. $= 0$. E però
$\Delta y = \Delta(bx + cx^2) = (m')(b + 2cx) + (m')^2 c$
Ma $(m') = X = bx^2 - ax$. Dunque $\Delta y = (b^2 + a^2c - 2ac)x^2 + (2bc - 2abc)x^3 - abx + b^2cx^4$.

COROLLARIO.

§. XIII. Dalla forma univerſale delle differenze finite d' una qualunque funzione di x, che abbiamo determinato, ſi può facilmente ricavare quella, che conviene alla differenza d' ogni ordine coll' incremento coſtante, cioè col modulo comune $x + a$. Egli è di molta utilità l' avere una ſola forma generale, che eſprima le differenze $n.^{me}$ di qualſivoglia funzione in queſto caſo particolare, ch' è il più comune, e più in uſo preſſo i Geometri; tanto più, che non appariſce agevolmente, come ſi poſſa dedurre un' eſpreſſione generale dalle forme particolari date a queſte differenze a parte a parte dal Sig. *Eulero* alla pag. 343. delle ſue Inſtituzioni.

Baſta pertanto rifletterere, che nel caſo dell' incremento coſtante a, ſi ha

$$\begin{aligned} &X = a = (m') \\ &X + X' = a + a = 2a = (m'') \\ &X + X' + X'' = a + a + a = 3a = (m''') \\ &\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -} \\ &X + X' \ldots . X^{n-1} = na = (m^n) \end{aligned}$$

e però ſoſtituendo queſti multipli di a nella formula univerſale, ſi avrà generalmente per gl' incrementi coſtanti.

$$\begin{aligned} \Delta^n y = &\left(na - \frac{n(n-1)a}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)a}{1.2} - \text{ecc.}\right)\frac{dy}{dx} \\ &+\left(n^2a^2 - \frac{n(n-1)^2a^2}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2a^2}{1.2} - \text{ecc.}\right)\frac{ddy}{1.2dx^2} \\ &+\left(n^3a^3 - \frac{n(n-1)^2a^3}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3a^3}{1.2} - \text{ecc.}\right)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} \\ &+ \text{ecc.} \end{aligned}$$

forma, in cui la legge è viſibile. In fatti ſia $n = 1$.

$$\Delta y = \frac{ady}{dx} + \frac{a^2ddy}{2dx^2} + \frac{a^3d^3y}{6dx^3} + \text{ecc.}$$

poſto $n = 2$

$$\Delta^2 y = \frac{a^2ddy}{dx^2} + \frac{3a^3d^3y}{3dx^3} + \frac{7a^4d^4y}{3.4dx^4} + \text{ecc.}$$

e così ſucceſſivamente come porta la Tavola del Sig. *Eulero*.

SCOLIO.

§. XIV. Veduto abbaſtanza della differenziazione delle funzioni finite, ci faremo a verſare ſopra l' integrazione delle funzioni differenziali. Siccome una funzione può eſſere conſiderata integrale d' una funzione ignota, la quale ſi determina colla differenziazione di quella

ſteſſa

ſteſſa quantità, che ſi ſuppone eſſere il ſuo Integrale; così ogni funzione può eſſere propoſta come differenziale d' una funzione incognita, la quale non può definirſi, che trovando l' Integrale della funzione propoſta. Ma quanto è agevole e ſoggetto a Canoni generali, come s' è veduto, il primo Calcolo, altrettanto quello dell' integrazione delle funzioni è difficile ſommamente, e forſe non fatto per ſottometterſi a regole univerſali. Appena può egli dirſi tocco da' Geometri. ſe qualche caſo ſi eccettui ſvolto ingegnoſamente dal Sig. *Eulero* nel I. Cap. di ſue Iſtituzioni. E tanto più fa meraviglia, che non ſe ne ſieno occupati prima d' ogn' altra coſa, che il Calcolo Integrale dell' Equazioni differenziali tutto ripoſa ſugl' Integrali delle funzioni differenziali, e non può un' equazione avere un Integrale finito, e ſviluppato, ſe non s' abbia quello delle funzioni, all' integrazione delle quali egli ſi riduce neceſſariamente. Ma penſando, che a poco avrebbero ſervito le mie ricerche, ſe mi foſſi intrattenuto ſu de' caſi particolari, mi poſi a tentare qualche coſa di generale, per quanto il permette l' arduità dell' aſſunto. E come è noto, che la parte più luminoſa, e più uſuale, cioè quella, in cui gl' incrementi o decrementi ſeguono la progreſſione de' numeri naturali 1, 2, 3, 4, ecc., ha relazione colle ſomme generali di ſerie aventi per termine generale le funzioni ſteſſe, di cui ſi cerca l' integrale; mi ſono dato anche a coltivare di propoſito la Teoria delle ſerie con un metodo, che ha il vantaggio di legarſi ſpontaneamente col Calcolo integrale delle funzioni differenziali finite, ond' è poi nata la Memoria precedente, di cui vedremo qui un' immediata applicazione.

DEFINIZIONE.

§. XV. La Caratteriſtica $\int$ denoti l' integrale d' una funzione qualunque, che n' è affetta, come nel Calcolo integrale a differenze infiniteſime, a diſtinzione della Caratteriſtica S, che deve indicare la ſomma generale d' una ſerie, che abbia per termine generale la funzione affetta. In tal guiſa ſarà $\int M$ l' integrale della funzione M della variabile x, conſiderata come un differenziale finito, ed SM ſarà la ſomma generale di una ſerie, che ha per termine generale la funzione M, e per indice la ſteſſa variabile x.

PROPOSIZIONE III.

§. XVI. *Propoſta qualſivoglia funzione differenziale* M *di* x *e coſtanti col modulo* x + X *delle differenze finite, trovare l' equazione, a cui ſi riduce generalmente l' integrazione della funzione* M.

RISOLUZIONE.

Sia y l' integrale ricercato. Dovrà eſſere $y = \int M +$ coſt.; e differenziando $\Delta y = y' - y = M$. Ma abbiamo veduto eſſere

$$y' = y + \frac{Xdy}{dx} + \frac{X^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{X^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Si avrà dunque l' equazione generale

$$(A) \ldots\ldots M = \frac{Xdy}{dx} + \frac{X^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{X^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

E però ſe ſi trovi un ſolo valore t per y ſoddisfacente all' equazione (A), ſarà $t +$ coſt. l' integrale completo della funzione M. Il che ecc.

PROPOSIZIONE IV.

§. XVII. *Trovare tutte le funzioni* M, *che ammettono integrale completo algebraico razionale ed intiero, con qualſivoglia modulo* $x+X$.

RISOLUZIONE.

Sia primieramente $y=\int M=K+bx$. Soſtituendo queſto valore nell' equazione (A) della Propoſizione precedente, ſarà $M=bX$, e però qualunque funzione di x algebraica o traſcendente, ch' eſſer poſſa l' incremento X, ſarà $\int M=b\int X=K+bx$, e K ſarà la coſtante arbitraria.

Sia in ſecondo luogo $y=\int M=K+bx+cx^2$. Sarà

$$M=(b+2cx)X+cX^2$$

e qualunque funzione di x ſia X, ſarà $K+bx+cx^2$ l' integrale completo di $(b+2cx)X+cX^2$. Dunque generalmente eſſendo

$$\begin{aligned}M=&(b+2cx+3ex^2+4fx^3+\text{ecc.}\ldots\ldots)X\\&+(1.2c+2.3ex+3.4fx^2+4.5gx^3+\text{ecc.}\ldots\ldots)\frac{X^2}{1.2}\\&+(1.2.3e+2.3.4fx+3.4.5gx^2+\text{ecc.}\ldots\ldots)\frac{X^3}{1.2.3}\\&+\text{ecc.}\end{aligned}$$

qualunque funzione di x ſia X, ſarà

$$\int M=K+bx+cx^2+ex^3+fx^4+gx^5+\text{ecc.}$$

Il che ecc.

COROLLARIO.

§. XVIII. Si deduce quindi agevolmente, che può eſſere M qualunque funzione di x a piacere, purchè ſia X un determinato incremento, o una funzione determinata dipendènte dal valore di M.

PROPOSIZIONE V.

§. XIX. *Di nuovo propoſta qualſivoglia funzione differenziale* y *di* x *e coſtanti, col modulo* $x+X$ *delle differenze finite, trovare in funzioni di* y *ed* x *il ſuo integrale completo.*

RISOLUZIONE.

Sieno generalmente $y_{,}$, $y_{,,}$, $y_{,,,}$ ecc. $M_{,}$, $M_{,,}$, $M_{,,,}$, ecc. le forme che prendono le funzioni y, M ponendovi ſucceſſivamente $x-X$ in luogo di X, come ſono le y', y'', y''' ecc. M', M'' ecc. le forme, che prendono y, M, ponendovi ſucceſſivamente $x+X$ in luogo di x (§. 11); e ſia $M=\int y$. Sarà $\Delta M=y$. Ma $\Delta M=M'-M$ (§. 11); dunque $y=M'-M$, e ponendo ſucceſſivamente ne' termini di queſt' equazione $x-X$ in luogo di X, ſarà

$$\begin{aligned}
y_{,}&=M-M_{,}\\
y_{,,}&=M_{,}-M_{,,}\\
y_{,,,}&=M_{,,}-M_{,,,}\\
y_{,,,,}&=M_{,,,}-M_{,,,,}\\
&\text{ecc.}
\end{aligned}$$

In conſeguenza, prendendo le ſomme all' infinito, ſarà

$$(B)\ldots\ldots M=\int y=K+y_{,}+y_{,,}+y_{,,,}+y_{,,,,}+\text{ecc.}$$

eſſendo K la coſtante arbitraria. Ma ponendo negative le variazioni nel §. X. ſi ha

$$y_{,}=y-\frac{Xdy}{dx}+\frac{X^2ddy}{1.2dx^2}-\frac{X^3d^3y}{1.2.3dx^3}+\text{ecc.}$$

$$y_{,,}=y-(X+X')\frac{dy}{dx}+(X+X')^2\frac{ddy}{1.2dx^2}-\text{ecc.}$$

ecc.

ſoſtituendo pertanto queſti valori nell' equazione (B), ſi avrà

$$(C)\ldots \int y = K + Sy - \left(X + (X+X') + (X+X'+X'') + \text{ecc}\ldots\right)\frac{dy}{dx}$$

$$+\left(X^2 + (X+X')^2 + (X+X'+X'')^2 + \text{ecc}\ldots\right)\frac{ddy}{1.2dx^2}$$

$$-\left(X^3 + (X+X')^3 + (X+X'+X'')^3 + \text{ecc}\ldots\right)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$$

$$+\text{ecc.}$$

che è un' altra forma generale, che può avere l' integrale della funzione data y col modulo $x + X$, come s' era propoſto di ritrovare.

PROPOSIZIONE VI.

§. XX. *Ritrovare l' integrale completo di qualſivoglia funzione differenziale* y *col modulo* x + 1 *delle differenze finite.*

RISOLUZIONE.

Eſſendo $X = 1$, e però $X + X' = 1 + 1 = 2$, $X + X' + X'' = 3$ ecc.
ſi ſoſtituiſcano queſti valori nell' equazione (C) della Propoſizione precedente. Sarà

$$\int y = K + Sy - (1 + 2 + 3 + 4 + \text{ecc}\ldots)\frac{dy}{dx}$$

$$+(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \text{ecc}\ldots)\frac{ddy}{1.2dx^2}$$

$$-(1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \text{ecc}\ldots)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$$

$$+\text{ecc.}$$

e però col prendere i termini generali delle ſerie meriche, dando loro per indice o eſponente, che voglia dirſi, la variabile x, ſi avrà

$$(D)\ldots\int y = K + Sy - \frac{xdy}{dx} + \frac{x^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

integrale completo della funzione differenziale y. Il che ecc.

COROLLARIO.

§. XXI. E poichè $y = K + \frac{xdy}{dx} - \frac{x^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3}$ — ecc. (*Eulero Inſt. pag.* 359), ſe ſi ſoſtituiſca queſto valore nell' equazione (*D*) in luogo della ſerie infinita, ſarà manifeſtamente

$$\int y = K + Sy - y$$

ch' è l' equazione nota di relazione tra l' integrale $\int y$ della funzione differenziale y, e la ſomma d' una ſerie Sy avente la ſteſſa funzione y per termine generale.

SCOLIO.

§. XXII. Queſto è il luogo di combinare la Teoria noſtra delle ſerie coll' integrazione delle funzioni differenziali. Riflettendo al modo, che abbiamo adoperato per trovare i termini generali delle ſerie, ſi vede, che li abbiamo ſempre ricavati dalla differenza di due funzioni di x colle ſteſſe condizioni, con cui ſi trae la differenza finita, giacchè eſſendo M il termine generale, ſi ſono ſempre determinate due forme y, y' dalla differenza delle quali riſulta la forma M, e però deve eſſere neceſſariamente $y = \int M$. Ci faremo pertanto a mettere qui alcune di queſte integrazioni in via di Corollarj, perchè le ſi abbiano ſotto forme generali, ſenz' altra fatica, che quella di adattarle a' caſi particolari, e ſervano di norma per le altre.

COROLLARJ.

I.° E cominciando dalle ſunzioni Algebraiche razionali, ed intiere di x, ſe ſia
$$M = A + (B + 2Bx) + (C + 3Cx + 3Cx^2) + (D + 4Dx + 6Dx^2 + 4Dx^3) \ldots\ldots + \mathcal{Q}(x+1)^n - \mathcal{Q}x^n$$
ſarà
$$\int M = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots \mathcal{Q}x^n + \text{coſt. arb.}$$
(*Mem. preced. intorno alle ſerie Cap.* 1. *Probl.* 1.)
Eſemp. Sia $M = f^2x + 3gx^2$. Identificando i termini omologhi ſi avrà $A + B + C = 0$, $2B + 3C = f^2$; $3C = 3g$, e però $A = \frac{g-f^2}{2}$, $B = \frac{f^2-3g}{2}$, $C = g$. In conſeguenza $\int (f^2x + 3gx^2) = \left(\frac{g-f^2}{2}\right)x + \frac{(f^2-3g)x^2}{2} + gx^3$.

II.° Se ſia $M = (\pm A \mp AK^b)\,K^{a+bx}$,
ſarà $\int M = \pm AK^{a+b(x+1)} + \text{coſt. arb.}$
(*Cap.* 11. *Probl. IV*)

III.° Se ſia generalmente
$$M = \pm K^{a+bx}\left(A' - A'K^b + Ax - AK^b(x+1) + Bx^2 - BK^b(x+1) \ldots\ldots \mathcal{Q}x^n - \mathcal{Q}K^b(x+1)^n\right)$$
ſarà
$$\int M = \pm\left(A' + A(x+1) + B(x+1)^2 \ldots\ldots \mathcal{Q}(x+1)^n\right)K^{a+b(x+1)} + \text{coſt. arb.}$$
(*Cap.* II. *Probl. V.*

IV.° Se ſia $M = \frac{A}{(m+nx)(p+qx)\ldots\ldots\ldots(\Delta+xx)}$
cioè una frazione di cui il numeratore è una quantità coſtante, e il denominatore il prodotto d' un numero qualunque di fattori ſemplici, ſarà

$$\int M = \frac{A}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:t-1}dz\ldots\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-m:n-1}dz\int\frac{z^{m:n+x}dz}{1-z}$$

$+$ coſt. arb.

nella qual' eſpreſſione il ſecondo membro non è un integrale a differenze finite, ma sì bene un integrale a differenze infiniteſime, in cui dopo l'integrazione completa debbe eſſer fatto $z = 1$.

Vegganſi per la dimoſtrazione il Probl. X, Teor. I., Probl. XI. del Cap. V. Nello ſteſſo modo ſi troverebbero gl' integrali della funzione M, ſe ella foſſe una frazione con de' fattori ſemplici così al numeratore come al denominatore, dietro a quanto s' è dimoſtrato nel medeſimo Capitolo delle Serie. Ma non di queſta ſola natura di funzioni conſiderate come differenziali finiti ſi può avere l' integrale completo. Tutte quelle che nella noſtra teoria delle ſerie fanno uffizio di termini generali eſſendo ſtate, in forza del metodo ivi adoperato, riſolute in una forma equivalente di due membri colla legge delle differenze finite, ammettono immediatamente integrazione, come chiaramente ſi può comprenderlo dai caſi ſvolti in queſti Corollarj, ch' io tralaſcio di moltiplicare ſenza neceſſità, eſtendendoſi la coſa ſu tutte le parti del Trattato ſopraddetto.

SCOLIO.

§. XXIII. Che ſe la ſerie, di cui è termine generale la funzione y, onde ſi cerca l' integrale, foſſe ribelle a tutti i metodi, ſicchè la formula

$$\int y = K + Sy - y$$

del §. XXI. non foſſe di alcun ſuffragio, atteſa l' ineſplicabilità della forma Sy, non manca, come in tanti altri ardui caſi delle Scienze Matematiche, il ricorſo ad una ſerie, ch' eſprima la funzione Sy con un' infinità

nità di termini. In fatti eſſendo (*Eulero Inſt. pag.* 438.)

$$Sy = (x+1)y - a - \frac{dy}{dx}Sx + \frac{ddy}{1.2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3y}{1.2.3dx^3}Sx^3 + \text{ecc.}$$

dove a è la quantità, che riſulta ponendo $x = 0$ nel termine generale y, e Sx, Sx^2 ecc. ſono le ſomme delle ſucceſſive potenze intere di x, funzioni ricavabili agevolmente dalla teoria delle ſerie, ſarà generalmente

$$\int y = K + xy - a - \frac{dy}{dx}Sx + \frac{ddy}{1.2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3y}{1.2.3dx^3}Sx^3 + \text{ecc.}$$

PROPOSIZIONE VII.

§. XXIV. *Ritrovare l' integrale completo di qualunque funzione logaritmica di* x *col modulo generale delle differenze* x + X.

RISOLUZIONE.

Sia $y = l.P$, eſſendo P qualſivoglia funzione di x. Sarà

$y' - y = \Delta y = \Delta l.P$ $\qquad$ $y - y_{,} = \Delta y_{,} = \Delta l.P_{,}$

$y'' - y' = \Delta y' = \Delta l.P'$ $\qquad$ $y_{,} - y_{,,} = \Delta y_{,,} = \Delta l.P_{,,}$

$y''' - y'' = \Delta y'' = \Delta l.P''$ $\qquad$ $y_{,,} - y_{,,,} = \Delta y_{,,,} = \Delta l.Py_{,,,}$

ecc. $\qquad$ ecc.

Dunque prendendo le ſomme all' infinito, ſi avrà

$$y = -\Delta l.P - \Delta l.P' - \Delta l.P'' - \text{ecc.} = \Delta l.P_{,} + \Delta l.P_{,,} + \Delta l.P_{,,,} + \text{ecc.}$$

e integrando coll' aggiunta della coſtante K, ſarà

$$\int y = K - l.P - l.P' - l.P'' - \text{ecc.} = K + l.P_{,} + l.P_{,,} + l.P_{,,,} + \text{ecc.}$$

Ma la ſomma de' logaritmi di molte quantità è uguale al logaritmo del prodotto continuo di quelle quantità. Dunque

$$\int y = K - l.P.P.P.P'' \text{ ecc.} = K + l.P_{,}.P.P_{,,} \text{ ecc.}$$

Se pertanto $\pi'(P)$ ſia la caratteriſtica del prodotto continuo de' valori ſucceſſivi di P per incremento, $\pi_{,}(P)$ la caratteriſtica del prodotto continuo de' medeſimi valori per decremento, ſarà l' integrale completo di qualunque quantità logaritmica

$$\int l.P = K - l.\pi'(P) = K + l.\pi_{,}(P)$$

il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XXV. E perchè $y = -l.\pi'(P) = l.\pi_{,}(P)$, ſarà $e^{y} = e^{-l.\pi'(P)} = \frac{1}{e^{l.\pi'(P)}} = e^{l.\pi_{,}(P)}$, eſſendo e il numero, che ha l' unità per logaritmo iperbolico. Ma $e^{l.\pi'(P)} = \pi'(P)$, $e^{l.\pi_{,}(P)} = \pi_{,}(P)$. Dunque $\pi'(P) = \frac{1}{\pi_{,}(P)}$

COROLLARIO II.

§. XXVI. In conſegueuza ſe ſi metta $\frac{1}{P}$ in luogo di P, ſarà

$$\frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{P}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{P'}\right)} = P.$$ Imperciocchè eſſendo

$\pi_{,}\left(\frac{1}{P}\right) = \frac{1}{P_{,}P_{,,}P_{,,,}\text{ ecc.}}$, ſe vi ſi metta $x + X$ in luogo di x, ſarà $\pi_{,}\left(\frac{1}{P'}\right) = \frac{1}{P\,P_{,}P_{,,}\text{ ecc.}}$

Dunque $\dfrac{\pi_{,}\left(\frac{1}{P}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{P'}\right)} = P$; e ſoſtituendo $\dfrac{1}{\pi'\left(\frac{1}{P}\right)}$ in luogo di $\pi_{,}(P)$, ſarà ſimilmente $\dfrac{\pi'\left(\frac{1}{P'}\right)}{\pi'\left(\frac{1}{P}\right)} = P$.

COROLLARIO III.

§. XXVII. Dunque

$$\frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{P}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{P'}\right)} \times \frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{Q}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{Q'}\right)} = PQ$$

$$\frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{P}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{P'}\right)} \times \frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{Q}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{Q'}\right)} \times \frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{R}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{R'}\right)} = PQR$$

e così ſucceſſivamente

CAPITOLO SECONDO

DELL' INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI FINITE A DUE VARIABILI.

PROPOSIZIONE VIII.

§. XXVIII. *Propoſta l' equazione differenziale* (M) *a differenze finite*

$(M)\ldots.\ Ay + By' + Cy'' + Dy''' + \text{ecc.}\ldots\ldots + Ny^{n} = 0$ *di qualſivoglia grado* n, *qualunque caſo ſieno i coefficienti* A, B, C ecc. *coſtanti o funzioni di* x, *determinare per qualſivoglia modulo* x + X *un' equazione generale in* y, X *e cofficienti dati, nella quale trovando* n *valori differenti per* y *ſoddisfacenti particolarmente all' equazione, ſi abbia l' integrale completo dell' equazione* (M).

RISOLUZIONE.

Sieno X', X'' ecc. li termini conſecutivi ad X ponendo ſucceſſivamente $x + X$ in luogo di x, e ſia $(m') = X$, $(m'') = X + X'$ ecc.
$(m^{n}) = X + X' + X''\ldots.. + X^{n-1}$.

Sarà (§. x.)

$$y = y$$

$$y' = y + (m')\frac{dy}{dx} + (m')^{2}\,\frac{ddy}{1.2dx^{2}} + (m')^{3}\,\frac{d^{3}y}{1.2.3dx^{3}} + \text{ecc.}$$

$$y'' = y + (m'')\frac{dy}{dx} + (m'')^{2}\,\frac{ddy}{1.2dx^{2}} + (m'')^{3}\,\frac{d^{3}y}{1.2.3dx^{3}} + \text{ecc.}$$

\- -

$$y^{n+1} = y + (m^{n+1})\frac{dy}{dx} + (m^{n+1})^{2} + \frac{ddy}{1.2dx^{2}} + (m^{n+1})^{3}\frac{d^{3}y}{1.2.3dx^{3}} + \text{ecc.}$$

Si ſoſtituiſcano queſti valori per y, y', y'' ecc. nell' equazione (M), e ordinando i termini, ſi avrà

$$0 = y\,(A + B + C + D + \text{ecc.})$$
$$+ \frac{dy}{dx}\left(B\,(m') + C\,(m'') + D\,(m''') + \text{ecc.}\right)$$
$$+ \frac{d^{2}y}{1.2dx^{2}}\left(B\,(m')^{2} + C\,(m'')^{1} + D\,(m''')^{2} + \text{ecc.}\right)$$
$$+ \frac{d^{3}y}{1.2.3dx^{3}}\left(B\,(m')^{3} + C\,(m'')^{3} + D\,(m''')^{3} + \text{ecc.}\right)$$

\- -

$$+\frac{d^ny}{1.2\ldots n dx^n}\left(B(m')^n+C(m'')^n+D(m''')^n+\text{ecc.}\right)\ldots(H)$$

nella quale equazione (m'), (m'') ecc. ſono quantità coſtanti, o funzioni di x dipendenti dall' incremento X aſſunto. Se dunque ſi abbia n valori differenti per y colle riſpettive coſtanti arbitrarie, che ſoddisfacciano a queſt' equazione, eſſendo l' equazione (M) lineare, la ſomma di queſti valori dovrà ſoddisfare all' equazione (M). E perchè queſta ſomma contiene n coſtanti arbitrarie, ſarà ella neceſſariamente l' integrale completo dell' equazione (M). Il che ecc.

PROPOSIZIONE IX.

§. XXIX. *Propoſta l' equazione differenziale* (M)
$(M)\ldots\ldots Ay+By'+Cy''+\text{ecc.}\ldots\ldots+Ny^n=0$
in cui A, B, C ecc. *ſono quantità coſtanti*, *e* $x+px$ *il modulo delle differenze*, *ritrovare il ſuo integrale completo*, *qualunque ſia il grado dell' equazione*, *e* p *qualunque coſtante*.

RISOLUZIONE.

Eſſendo $X=px$, ſarà $X'=(p+p^2)x$, $X''=(p+2p^2+p^3)x$, $X'''=(p+3p^2+3p^3+p^4)x$ ecc. Dunque $X+X'=(m'')=(2p+p^2)x$, $X+X'+X''=(m''')=(3p+3p^2+p^3)x$, $X+X'+X''+X'''=(m'''')=(4p+6p^2+4p^3+p^4)x$, cioè generalmente $X+X'+X''\ldots+X^{n+1}=(m^n)=\left((p+1)^n-1\right)x$, ſiccome è manifeſto. Soſtituendo queſti valori per (m'), (m'') ecc. nell' equazione (H) (§. XXVIII) ella ſi ridurrà a queſta forma.

$$0=y(A+B+C+D+\text{ecc.})$$
$$+\frac{dy}{dx}\left(Bpx+C\left((p+1)^2-1\right)x+D\left((p+1)^3-1\right)x+\text{ecc.}\right)$$

$$+\frac{ddy}{1.2dx^2}\Big(Bp^2x^2+C\big((p+1)^2-1\big)^2x^2+D\big((p+1)^3-1\big)^2x^2+\text{ecc.}\Big)$$

$$+\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}\Big(Bp^3x^3+C\big((p+1)^2-1\big)^3x^3+D\big((p+1)^3-1\big)^3x^3+\text{ecc.}\Big)$$

- -

$$+\frac{d^ny}{1.2..ndx^2}\Big(Bp^nx^n+C\big((p+1)^2-1\big)^nx^n+D\big((p+1)^3-1\big)^nx^n+\text{ecc.}\Big)$$

Si finga $y=Kx^a$, eſſendo K, a coſtanti indeterminate.

Sarà $dy=aKx^{a-1}dx$, $ddy=a(a-1)Kx^{a-2}dx^2$ .... $d^ny=a(a-1)...(a-n+1)Kx^{a-n}dx^n$. E però ſoſtituendo queſti valori, e dividendo l' equazione per Kx^a, ſi avrà

$$(N)...\ 0=A+B+C+\text{ecc.}+a\Big(Bp+C\big((p+1)^2-1\big)+D\big((p+1)^3-1\big)+\text{ecc.}\Big)$$

$$+\frac{a(a-1)}{1.2}\Big(Bp^2+C\big((p+1)^2-1\big)^2+D\big((p+1)^3-1\big)^2+\text{ecc.}\Big).....$$

$$+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\Big(Bp^3+C\big((p+1)^2-1\big)^3+D\big((p+1)^3-\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

$+$ ecc.

cioè l'equazione ordinata (N)

$$(N)...\ 0=A+B+C+D+\text{ecc.}+B\Big(ap+\frac{a(a-1)}{1.2}p^2+\frac{a(a-1)(aa-2)}{1.2.3}p^3+\text{ecc.}\Big)$$

$$+C\Big(a\big((p+1)^2-1\big)+\frac{a(a-1)}{1.2}\big((p+1)^2-1\big)^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\big((p+1)^2-1\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

$$+D\Big(a\big((p+1)^3-1\big)+\frac{a(a-1)}{1.2}\big((p+1)^3-1\big)^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\big((p+1)^3-1\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

- -

$$+N\Big(a\big((p+1)^n-1\big)+\frac{a(a\ 1)}{1.2}\big((p+1)^n-1\big)^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\big((p+1)^n-1\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

Ora eſſendo $(1+Z)^a=1+aZ+\frac{a(a-1)}{1.2}Z^2$ $+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}Z^3+$ ecc. ſe alle ſerie ſi ſoſtituiſcano i valori finiti corriſpondenti, ſi avrà

$$0=A+B+C+D+\text{ecc.}B\left((p+1)^a-1\right)+C\left((p+1)^{2a}-1\right)+D\left((p+1)^{3a}-1\right)+\text{ecc.}$$

cioè

$$0=A+B(p+1)^a+C(p+1)^{2a}+D(p+1)^{3a}+\text{ecc.}$$

e poſto $(p+1)^a=z$, riſulterà l' equazione determinata (N')

$$(N')\ldots.\ 0=A+Bz+Cz^2+Dx^3+Ez^4+\ldots.\ Nz^n$$

la quale ſomminiſtra n valori differenti per $a=\frac{l.z}{l.(p+1)}$, ſecondo il grado n dell' equazione da integrare. Se ſieno pertanto c, c', c'' ecc. queſti valori, prendendo per l' arbitraria K un numero n di valori diverſi K, K', K'' ecc. poichè l' equazione (M) è lineare, ſarà il ſuo integrale completo

$$y=Kx^c+K'x^{c'}+K''x^{c''}+K'''x^{c'''}+\text{ecc.}$$

Il che ecc.

LEMMA.

§. XXX. Eſſendo e il numero che ha per logaritmo iperbolico l' unità, le ſeguenti equazioni debbono aver luogo, qualunque coſa ſia m

$$e^m-1=m+\frac{m^2}{1.2}+\frac{m^3}{1.2.3}+\frac{m^4}{1.2.3.4}+\text{ecc.}$$

$$e^{2m}-1=2m+\frac{4m^2}{1.2}+\frac{8m^3}{1.2.3}+\frac{16m^4}{1.2.3.4}+\text{ecc.}$$

ecc. . . . . . - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$e^{nm}-1=nm+\frac{n^2m^2}{1.2}+\frac{n^3m^3}{1.2.3}+\frac{n^4m^4}{1.2.3.4}+\text{ecc.}$$

Veggaſene la dimoſtrazione nell' Introduz. all' An. degl' Infin. del Sig. *Eulero*.

PROPOSIZIONE X.

§. XXXI. *Trovare l' integrale completo dell' equazione differenziale* (A) *di qualſivoglia grado* n

$$(A) \ldots . Ay + By' + Cy'' + Dy''' + \text{ecc.} \ldots\ldots + My^n = 0$$

in cui A, B, C ecc. *ſono quantità coſtanti, e il modulo delle differenze è* x + a.

RISOLUZIONE.

Eſſendo in queſto caſo (§. x.)

$$y' = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{a^2 d^2 y}{1.2\,dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y'' = y + \frac{2a\,dy}{dx} + \frac{4a^2 d^2 y}{1.2\,dx^2} + \text{ecc.}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$y^n = y + \frac{na\,dy}{dx} + \frac{n^2 a^2 d^2 y}{1.2.dx^2} + \text{ecc.}$$

ſi ſoſtituiſcano queſti valori per y, y' ecc. nell' equazione (A). Si avrà dopo la conveniente ordinazione de' termini l' equazione (B)

$$(B) \ldots . \; 0 = (A + B + C + D + \text{ecc.})\, y$$

$$+ (aB + 2aC + 3aD + 4aE + \text{ecc.}) \frac{dy}{dx}$$

$$+ (a^2 B + 4a^2 C + 9a^2 D + 16a^2 E + \text{ecc.}) \frac{ddy}{1.2\,dx^2}$$

$$+ (a^3 B + 8a^3 C + 27a^3 D + 64a^3 E + \text{ecc.}) \frac{d^3 y}{1.2.3\,dx^3}$$

- -

$$+ (a^n B + 2^n a^n C + 3^n a^n D + 4^n a^n E + \text{ecc.}) \frac{d^n y}{1.2 \ldots n\,dx^n}$$

E poſto $y = Ke^{bx}$, eſſendo K, b coſtanti indeterminate, te, ed e il numero, che ha l' unità per logaritmo iperbolico, ſi avrà, ſoſtituendo i valori di y, dy, ecc. e togliendo il fattor comune Ke^{bx}, l' equazione (C)

$$(C)\ \ldots\ldots\ o = A + B + C + D + \text{ecc.}$$

$$+B\left(ab+\frac{a^2b^2}{1.2}+\frac{a^3b^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{a^nb^n}{1.2\ldots n}\right)$$

$$+C\left(2ab+\frac{4a^2b^2}{1.2}+\frac{8a^3b^3}{1.2.3}\cdots+\frac{2^na^nb^n}{1.2\ldots n}\right)$$

$$- -$$

$$+M\left(nab+\frac{n^2a^2b^2}{1.2}+\frac{n^3a^3b^3}{1.2.3.}\cdot\cdot+\frac{n^na^nb^n}{1.2\ldots n}\right)$$

cioè pel Lemma (§. xxx.) l' equazione (D)

$$(D)\ldots A+Be^{ab}+Ce^{2ab}+De^{3ab}+Ee^{4ab}+\text{ecc.}\ldots+Me^{nab}=o$$

oppure, poſto $e^{ab}=z$, l' equazione (E)

$$(E)\ldots A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{ecc.}\ldots+Mz^n=o$$

Queſt' equazione eſſendo del grado n, è manifeſto, ch' ella ſomminiſtrerà n valori differenti di z, che chiameremo p, p', p'' ecc., e in conſeguenza n valori di b, i quali ſaranno $\frac{l.p}{a}$, $\frac{l.p'}{a}$, $\frac{l.p''}{a}$, ecc. E come il coefficiente K non entra in queſt' equazione, così reſta egli intieramente arbitrario, sì che prendendo per K un numero n di coefficienti diverſi K, K', K'', ecc. come nella Prop. IX., ſi avrà n valori diverſi di y, cioè $Ke^{\frac{x}{a}l.p}$, $K'e^{\frac{x}{a}l.p'}$ ecc. Eſſendo pertanto l' equazione (A) lineare, la ſomma di queſti valori dovrà ſoddisfare all' equazione, di modo che l' equazione $y=Ke^{\frac{x}{a}l.p}+K'e^{\frac{x}{a}l.p'}+K''e^{\frac{x}{a}l.p''}+$ ecc. oppure

$y = K(p)^{x:a} + K'(p')^{x:a} + K''(p'')^{x:a} +$ ecc., contenendo n coſtanti arbitrarie K, K' ecc., ſarà l' integrale completo dell' equazione (A) del grado n. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XI.

§. XXXII. *Propoſta l' equazione differenziale finita*

(A) . . . . $My + Ny' = 0$

eſſendo M, N *funzioni di* x *qualunque, e generalmente il modulo delle differenze* $x + X$, *ritrovare l' integrale completo dell' equazione* (A).

RISOLUZIONE.

Si finga eſſere $y = Ke^{A(x)}$, eſſendo K un' indeterminata coſtante, A (x) funzione indeterminata di x, e il numero che ha per logaritmo iperbolico l' unità. Sarà $y' = Ke^{A(x+X)}$. Ma $A(x+X) - A(x) = \Delta A(x)$ (§. II.). Dunque

$y' = Ke^{A(x) + \Delta A(x)}$. Si ſoſtituiſcano queſti valori nell' equazione (A), e ſi avrà

$MKe^{A(x)} + NKe^{A(x) + \Delta A(x)} = 0$, ove fatta la diviſione ſi ottiene

$M + Ne^{\Delta A(x)} = 0$, in cui non entrando l' indeterminata K reſta ella intieramente arbitraria. Dunque

$e^{\Delta A(x)} = 1 - \frac{M+N}{N}$, e $\Delta A(x) = l.\left(1 - \frac{M+N}{N}\right)$.

Integrando pertanto, ſarà $A(x) = \int l.\left(1 - \frac{M+N}{N}\right)$.

E però

$y = Ke^{\int l.\left(1 - \frac{M+N}{N}\right)}$.

Ma $\int l.\left(1-\frac{M+N}{N}\right)=l.\pi_{,}\left(1-\frac{M+N}{N}\right)$ (§. XXXIV).
Dunque
$y=K\,\pi_{,}\left(1-\frac{M+N}{N}\right)$ ſarà l' integrale completo dell' equazione (A). Il che ecc.

PROPOSIZIONE XII.

§. XXXIII. *Propoſta l' equazione differenziale precedente*
(A) . . . . $My+Ny'=0$
trovare i differenti moduli $x+X$, *a' quali corriſponde per* y *una funzione algebraica di* x *razionale ed intera.*

RISOLUZIONE.

Poichè ſi è dimoſtrato eſſere per qualſivoglia incremento X (§. VIII.)

$$y'=y+\frac{Xdy}{dx}+\frac{X^2ddy}{1.2.dx^2}+\text{ecc.}$$

ſoſtituendo queſto valore nell' equazione propoſta (A), ſarà

$$(A')\ldots 0=(M+N)y+N\left(\frac{xdy}{dx}+\frac{X^2ddy}{1.2dx^2}+\text{ecc.}\right)$$

Ora, qualunque funzione algebraica razionale ed intera poſſa eſſere l' integrale dell' equazione (A), è certo che ſoſtituita per y, e ſuoi differenziali nell' equazione (A'), ſe ſia n l' eſponente della maſſima poteſtà di x ſarà $d^{n+1}y$ con tutti i differenziali ſucceſſivi $=0$. L' equazione dunque (A') in x ed X diverrà finita, e conſiderando X come un' incognita, aſcenderà ella al grado X^n, sì che ſi avrà per X un numero n di valori $=X$, (X), $((X))$ ecc. in x e coſtanti che ſoddisfaranno all' equazione, e però un numero n di moduli $x+X$, $x+(X)$, $x+((X))$ ecc. a' quali corriſponderà una ſteſſa funzione per y algebraica razionale ed intera del grado n.

Poſto ciò, ſe ſi faccia per ordine

$ddy=0$, ſi ha $y=a+bx$

$d^3y=0\ldots\ldots y=a+bx+cx^2$

- -

$d^{n+1}y=0\ldots\ldots y=a+bx+cx^2+$ ecc... mx^n

Soſtituendo pertanto queſti valori di y ſucceſſivamente nell' equazione (A'), prende ella queſte forme

$(1)\ldots 0=(M+N)(a+bx)+bNX$

$(2)\ldots 0=(M+N)(a+bx+cx^2)+(b+2cx)NX+cNX^2$

- -

$(m)\ldots 0=(M+N)(a+bx+cx^2\ldots\ldots mx^n)+NX(b+2cx$ $+3dx^2+4ex^3\ldots\ldots nmx^{n-1})+NX^2\big(2c+2.3dx+3.4ex^2\ldots\ldots$ $n(n-1)mx^{n-2}\big)+$ ecc.

le quali ſomminiſtrano evidentemente i diverſi valori di X ai quali corriſponde per y una ſteſſa funzione algebraica di x razionale ed intiera della forma

$a+bx+cx^2+ex^3+fx^4$ ecc.

In fatti ſe ſi ponga nel modulo il valore di X tratto dall'equazione (1.) ſarà $y=a+bx$. Similmente avendo X due valori X, (X) nell' equazione (2) è chiaro che per entrambi i moduli $x+X$, $x+(X)$ riſulta $y=a+bx+cx^2$. E così ſucceſſivamente traendo dall' equazione generale (M) un' equazione in X del grado n, da tutti li n valori di X riſulterà un numero n di moduli, ai quali corriſponderà per y la ſteſſa funzione algebraica razionale ed intiera $a+bx+cx^2$ $+ex^3\ldots+mx^n$. Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XXXIV. Non potrà pertanto eſſere y funzione algebraica razionale ed intera di x, coll'incremento X

coſtante, ſe ſieno $M\ N$ quantità coſtanti. E potrà eſſerlo ſolamente, in ſuppoſizione di $M\ N$ coſtanti, ſempre che ſia variabile l' incremento.

COROLLARIO II.

§. XXXV. Ma qualunque coſa ſieno $M\ N$, ſe ſia $x\sqrt[n]{\left(-\frac{M}{N}\right)}$ il modulo delle differenze, ſarà $y = Kx^n$ l' integrale completo dell' equazione $My + Ny' = 0$, eſſendo K una coſtante arbitraria, com' è facile coſa l' accertarſene col calcolo.

PROPOSIZIONE XIII.

§. XXXVI. *Propoſta l' equazione differenziale* (A)
$(A) \ldots\ldots 0 = My + Ny' + Py'' + Qy''' + \text{ecc.}$
del grado n, *eſſendo* M, N, P, Q ecc. *coſtanti o variabili, come ſi vuole, trovare le equazioni degl' incrementi, ai quali corriſponde per* y *una data funzione di* x *algebraica razionale ed intiera.*

RISOLUZIONE.

Aſſunta generalmente per y l' equazione (B)
$(B) \ldots\ldots y = a + bx + cx^2 + ex^3 + \text{ecc.} \ldots\ldots + mx^n$
ſi metta in ogni termine ſucceſſivamente per x il modulo $x + X$, indi $x + X + X'$, $x + X + X' + X'$ ecc. ſino ad $x + X + X' \ldots\ldots + X^{n-1}$ corriſpondentemente al grado n dell' equazione (A). Si avrà
$0 = (a + bx + cx^2 + \text{ecc.} \ldots\ldots + mx^n)M$
$+ \left(a + b(x+X) + c(x+X)^2 + e(x+X)^3 + \text{ecc.} \ldots\ldots + m(x+X)^n\right)N$
$+ (a + b(x+X+X') + c(x+X+X')^2 + e(x+X+X')^3 + \text{ecc.} \ldots$
$+ m(x+X+X')^n\big)P + \text{ecc.}$
equazione generale, che abbraccia tutte le equazioni

degl' incrementi ricercate. Imperciocchè, ſe ſia l'equazione (A) del ſecondo grado, ſarà $\mathcal{Q}$ con tutti gli altri coefficienti $= o$. In conſeguenza l'equazione degl' incrementi, a' quali corriſponde per y la funzione ſemplice $a + bx$, ſarà (C)

$$(C)\ldots. o = (M+N+P)a + (M+N+P)bx + (N+P)bX + PbX'$$

Similmente l'equazione degl' incrementi, a' quali corriſponde per y la funzione biforme $a + bx + cx^2$, ſarà (D)

$$(D)\ldots o = (M+N+P)a + (M+N+P)bx + (M+N+P)cx^2$$
$$+ (Nb + 2Ncx + Pb + 2Pcx)X + (Nc + Pc)X^2$$
$$+ (Pb + 2Pcx)X' + PcX'^2 + 2PcXX'$$

e così ſucceſſivamente per tutte le altre. Nello ſteſſo modo ſi determineranno le Equazioni ſucceſſive degl' incrementi per un' equazione (A) del terzo grado, del quarto ecc. a' quali corriſponde per y una funzione di x razionale ed intiera ſemplice, biforme, triforme ecc., come dovea trovarſi.

COROLLARIO.

§. XXXVII. Si ſcorge quindi I. che le equazioni degl' incrementi ſono anch' eſſe differenziali finite, ma di grado n-1, cioè proſſimo inferiore al grado dell' equazione (A). II. che non può mai avere y valore algebraico razionale ed intiero con incremento coſtante, ſe tutti li coefficienti M, N, P. ecc. ſieno quantità coſtanti; ed eſſendo eſſi quantità coſtanti, l'incremento dovrà neceſſariamente eſſere variabile.

SCOLIO.

§. XXXVIII. L' introduzione de' moduli variabili $x + X$, e l' uſo fatto delle eſpreſſioni differenziali

$$y + A\frac{dy}{dx} + B\frac{ddy}{dx^2} + C\frac{d^3y}{dx^3} + \text{ecc.}$$

procedenti all' infinito, ci portano naturalmente a ſcoprire una conneſſione non atteſa, che può avere un' infinità di queſte eſpreſſioni coll' equazioni differenziali a differenze finite, eſſendo A, B ecc. coefficienti variabili. Non ſenza ragione parlando il Sig. *Eulero*, nel II. Vol. del ſuo Calcolo Integrale pag. 459, dell' equazione differenziale

$$X = y + \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \text{ecc. all' infinito},$$

e di un comodo modo di eſprimere il ſuo Integrale, aſſeriſce, ch' ella è coſa, *altioris indaginis, neque adhuc ad hunc ſcopum Analyſeos fines ſatis videntur promoti*. Riflettendo pertanto alla riduzione fattaſi in queſta Memoria dell' integrazione così di funzioni ſemplici, come di equazioni a differenze finite, all' integrazione di ſimili eſpreſſioni ſcorrenti all' infinito, e alla variabilità, onde poſſono eſſere affetti i coefficienti de' termini, che le compongono, atteſa la variabilità de' moduli delle differenze, non è difficile, che meritar poſſa l' attenzione de' Geometri un sì fatto legame, per cui l' integrazione di un' infinità di ſimili equazioni d' infiniti termini dipende da quella di equazioni differenziali finite incomparabilmente più trattabili, che quelle non ſono.

PROPOSIZIONE XIV.

§. XXXIX. *Propoſta l' equazione differenziale*

$$(A) \ldots\ldots My + Ny' = Q$$

a differenze finite con qualſivoglia modulo $y + X$, *eſſendo* M, N, Q *funzioni qualunque di* x *o coſtanti, come ſi vuole, trovare il ſuo integrale completo.*

RISOLUZIONE.

Si finga $y = A(x)\,B(x)$, eſſendo $A(x)$, $B(x)$ funzioni di x indeterminate. Sarà differenziando $\Delta y = \Delta A(x)\,B(x)$. Ma
$\Delta y = y' - y$, $\Delta A(x)\,B(x) = A(x+X)B(x+X) - A(x)B(x)$, e
$A(x+X) = A(x) + \Delta A(x)$, $B(x+X) = B(x) + \Delta B(x)$ (§. II).
Dunque $y' - y = \big(A(x) + \Delta A(x)\big)\big(B(x) + \Delta B(x)\big) - A(x)\,B(x)$, e però $y' = A(x)\Delta B(x) + B(x)\Delta A(x) + \Delta A(x)\Delta B(x)$.
Soſtituendo pertanto nell' equazione (A) i valori di y, y', e poſto $A(x) = R$, $B(x) = T$, ſi avrà
$MRT + NR\Delta T + MT\Delta R + N\Delta R\Delta T = \mathfrak{Q}$;
e poichè due ſono le funzioni indeterminate, ſi aſſumano le due equazioni

(I) $MRT + NR\Delta T = 0$

(II) $NT\Delta R + N\Delta R\Delta T = \mathfrak{Q}$.

Dalla prima riſulta $MT + N\Delta T = MT + NT' - NT$

$$= (M - N)T + NT' = 0,\ T = \pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right) \text{(§. XXXII)},$$

$$\Delta T = -\frac{MT}{N}, \text{ e però } T + \Delta T = \pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right) - \frac{MT}{N}.$$

Soſtituendo queſti valori nell' equazione (II) ſi avrà

$$\Delta R = \frac{\mathfrak{Q}}{N(T+\Delta T)} = \frac{\mathfrak{Q}}{(M-N)\pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right)}, \text{ e però integrando}$$

$$R = \int\left(\mathfrak{Q} : (M-N)\pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right)\right). \text{ Dunque}$$

$$y = RT = \pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(K + \int\left(\mathfrak{Q} : (M-N)\pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right)\right)\right)$$

ſarà l' integrale completo dell' equazione (A) eſſendo K la coſtante arbitraria. Il che ecc.

SCOLIO

SCOLIO.

§. XL. E' ſacile comprendere, che non può mai averſi il valore eſplicito della funzione y, ſe non ſi aſſegni l' integrale della funzione $\frac{Q}{M-N}{}^{\pi,}\left(\frac{N-M}{N}\right)$ eſſendo $x+X$ il modulo della differenza finita. E perchè avremo occaſione di vedere in ſeguito, che di ſomiglianti parti integrali è compoſto l' integrale completo dell' equazioni differenziali di grado ſuperiore al primo, ſembra che non poſſa mai abbaſtanza coltivarſi il calcolo integrale delle funzioni ſemplici, ſu cui ci ſiamo trattenuti nel Cap. precedente, per quello che dall' eſtenſione di queſto, ſecondo differenti moduli, dipenderà ſempre l' eſtenſione e il progreſſo del Calcolo integrale dell' equazioni differenziali.

PROPOSIZIONE XV.

§. XLI. *Propoſta generalmente l' equazione differenziale finita* (A)

$(A)\dots. Q = Ay + By' + Cy'' +$ ecc.

nella quale A, B, C *ecc. e* Q *ſono funzioni di* x, e x+X *è il modulo delle differenze*, *definire il ſuo Integrale completo*, *o la ſua riduzione generale*.

RISOLUZIONE.

Si ponga I. $y' = zy + v$, eſſendo z ed v funzioni di x indeterminate.

Mettendo ſucceſſivamente $x+X$ in luogo di x, ſarà

II. $y'' = z'y' + v'$

III. $y''' = z''y'' + v''$

IV. $y'''' = z'''y''' + v'''$

ecc.

Si ſoſtituiſca nella II. equazione il valore di y' tratto dalla I., e ſi avrà l'equazione (a)

$$(a)\ y''=z'zy+z'v+v'$$

e ſoſtituendo nella III. il valore di y'' tratto dall'equazione (a), ſi avrà l'equazione (b)

$$(b)\ y'''=z''z'zy+z''z'v+z''v'+v''$$

Continuando a fare queſte ſucceſſive ſoſtituzioni per determinare i valori di y''', y'''' ecc. ſi ſcuopre con facilità eſſere generalmente

$$\begin{array}{l} y^n=yz.z\ldots\ldots z^{n-1}+vz'.z''\ldots\ldots z^{n-1}+v'z''.z'''\ldots\ldots z^{n-1} \\ +v''z'''.z''''\ldots\ldots z^{n-1}+v'''z''''z'''''\ldots\ldots z^{n-1}+\text{ecc.} \end{array}$$

Adunque mettendo i valori ſucceſſivamente di y', y'' ecc. nell'equazione (A), ſi avrà l'equazione (B)

$$\begin{array}{l} (B)\ldots\ldots\mathcal{Q}=Ay \\ +Bzy+Bv \\ +Cz'.zy+Cz'v+Cv' \\ +Dz''.z'.zy+Dz''.z'v+Dz''v'+Dv'' \\ +Ez'''.z''.z'.zy+Ez'''.z''.z'v+Ez'''.z''v'+Ez'''v''+Ev''' \\ +Fz''''.z'''.z''.z'.zy+Fz'''.z'''.z''.zv+Fz''''.z'''.z''v' \\ +Fz'''.z''.v''+Fz''''.v'''+Fv''''+\text{ecc.} \end{array}$$

Eſſendo pertanto due le funzioni indeterminate, ſi ponga $=o$ la prima ſerie verticale de' termini, cioè l'aggregato di tutti i termini, ne' quali entra la funzione y, e l'aggregato di tutti gli altri $=\mathcal{Q}$. E però dividendo la prima equazione per y, ſi avrà

$$(C)\ldots\ldots o=A+Bz+Cz.z'+Dz.z'.z''.Ez.z'.z''.z'''+\text{ecc.}$$

$$\begin{array}{l} (D)\ldots\ldots\mathcal{Q}=(B+Cz'+Dz'.z''+Ez'.z'.z'''+\text{ecc.})v \\ +(C+Dz''+Ez''.z'''.+Fz''.z'''.z''''+\text{ecc.})v' \\ +(D+Ez'''+Fz'''.z''''+\text{ecc.}\ \ldots\ldots\ldots)v'' \\ +(E+Fz''''+\text{ecc.}\ \ldots\ldots\ldots\ldots)v''' \\ \text{ecc.} \end{array}$$

Poſto ciò, ſi ſupponga $z=\frac{r'}{r}$, eſſendo r una nuova funzione di x indeterminata. L'equazione (C) prende queſta forma.

$$o = A + B\frac{r'}{r} + C\frac{r'}{r}\cdot\frac{r''}{r'} + D\frac{r'}{r}\cdot\frac{r''}{r'}\cdot\frac{r'''}{r''} + \text{ecc.}$$

cioè queſta

$$o = A + B\frac{r'}{r} + C\frac{r''}{r} + D\frac{r'''}{r} + E\frac{r''''}{r} + \text{ecc.}$$

la quale, fatta la moltiplicazione per r, diventa (E)

$$(E)\ldots\ldots o = Ar + Br' + Cr'' + Dr''' + \text{ecc.}$$

e ſe ſi faccia la ſteſſa ſoſtituzione nell'equazione (D), ſi ottiene l'equazione (F)

$$\begin{aligned}(F)\ldots\ \mathfrak{Q} = {} & \left(B + C\frac{r''}{r'} + D\frac{r'''}{r'} + E\frac{r''''}{r'} + \text{ecc.}\right)v \\ & + \left(C + D\frac{r'''}{r''} + E\frac{r''''}{r''} + F\frac{r'''''}{r''} + \text{ecc.}\ldots\right)v' \\ & + \left(D + E\frac{r''''}{r'''} + F\frac{r'''''}{r'''} + \text{ecc.}\ldots\ldots\right)v'' \\ & + \left(E + F\frac{r'''''}{r''''} + G\frac{r''''''}{r''''} + \text{ecc.}\ldots\ldots\right)v'' \\ & + \text{ecc.}\end{aligned}$$

L'integrazione pertanto dell'equazione (A) dipende dall'integrazione delle equazioni (E), (F), la prima delle quali è dello ſteſſo grado n dell'equazione (A), oppure lo ſteſſo, che l'equazione (A) in ſuppoſizione di $\mathfrak{Q} = o$, ſol che ſi metta r in luogo di y, e la ſeconda del grado n-1, ſiccome è manifeſto. Se dunque I. ſi abbia per r un valore, che ſoddisfaccia all'equazione (E), e il ſi ſoſtituiſca in (F), co' ſuoi valori ſucceſſivi r', r'' ecc. ponendo cioè in r ſucceſſivamente $x + X$, $x + X + X'$ ecc. in luogo di x, dipenderà l'integrazione dell'equazione (A) dall'integrazione dell'equazione (F) del grado proſſimo inferiore n-1. II. Se ſi abbiano due valori differenti per r nell'equazione (E), e ſi ſoſtituiſcano ſucceſſivamente in (F), riſultandone due equazioni, ſi potrà eliminare la funzione

v^{n-1}, ſicchè l'integrazione dell'equazione (A) dipenderà da un'equazione del grado $n-2$, e così in ſeguito. Se dunque ſi abbia per r un numero n di valori differenti a, a', a'' ecc. nell'equazione (E), ſi potrà trovare l'integrale completo dell'equazione (A). Imperciocchè dalle ſoſtituzioni ſucceſſive di queſti valori nell'equazione (F) riſultando n equazioni differenti, ſi potranno eliminare ſucceſſivamente le funzioni v^{n-1}, v^{n-2} ecc. e determinare il valore finito di v. Ripigliando poi l'equazione $y' = zy + v$, e ſoſtituendovi ſucceſſivamente li n valori di $\frac{r'}{r}$ in luogo di z, e il valore di v, ſi avrà un numero n di equazioni di primo grado, le quali riſolute col metodo della Propoſizione XIV. daranno n valori differenti di y, sì che eſſendo l'equazione (A) lineare, queſti valori preſi inſieme coſtituiranno il ſuo integrale completo, contenendo di fatto n coſtanti arbitrarie. Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XLII. Se ſi abbia pertanto l'integrale completo dell'equazione (A) in ſuppoſizione di $Q = o$, con che ſi ha pure l'integrale completo dell'equazione (E), contenendo egli un numero n di coſtanti arbitrarie, baſterà fare ſucceſſivamente tutte queſte coſtanti, meno una, eguali a zero. Si avranno per queſto mezzo n valori particolari di r, ſoddisfacenti all'equazione (E), e di più compreſi nell'integrale generale, ſicchè operando come qui ſopra, ſenza aggiugnere nuove coſtanti arbitrarie, ſi avrà l'integrale completo dell'equazione (A).

COROLLARIO II.

§. XLIII. Reſta dunque pienamente dimoſtrato, che l'equazione (A)

$(A)\ldots\ldots Q = Ay + By' + Cy'' + Dy''' + \text{ecc.}$
ſarà completamente integrabile tutte le volte che ſi avranno n valori differenti di y, o l'integrale completo dell'equazione (A) in ſuppoſizione di $Q = o$.

SCOLIO.

§. XLIV. Queſto è il Teorema del Sig. de la *Grange*, ch'egli dimoſtrò prima per le equazioni a differenze infiniteſime nel III. Volume degli *Atti della Società Reale di Torino*. Dimoſtrarono in ſeguito aver egli luogo anche nell' equazioni a differenze finite cogl' incrementi coſtanti il Sig. Marcheſe de *Condorcet*, e il Sig. de la *Place*, e lo dimoſtrò pure ultimamente il Sig. de la *Grange* negli *Atti della Società Reale di Berlino* per l'anno 1775. Ora il ſi è dimoſtrato di bel nuovo per altra via, e per qualſivoglia modulo $x + X$ delle differenze, e l'ho fatto pure con queſto ſteſſo metodo per le equazioni lineari a differenze infiniteſime. Ancorchè l'ultimo metodo immaginato dal Sig. de la *Grange* ſia ſommamente ingegnoſo, ſembra che in ſemplicità almeno non ceda il preſente a qualunque altro nell' uno e nell'altro genere di equazioni differenziali.

PROPOSIZIONE XVI.

§. XLV. *Propoſta l'equazione differenziale finita* (A)
$(A)\ldots\ldots Q = Ay + By' + Cy'' + Dy''' + \text{ecc.}$
in cui Q *è funzione di* x, A, B, C, ecc. *ſono quantità coſtanti*, x + X *il modulo generale*, *ritrovare il ſuo integrale completo*.

RISOLUZIONE.

Poſto come prima I. $y' = ay + v$, eſſendo v funzione indeterminata di x, a coſtante indeterminata; ſarà variando

$$y'' = ay' + v'$$
$$y''' = ay'' + v''$$
ecc.

e facendo le ſucceſſive ſoſtituzioni, come nella preced. Propoſ. ſarà

$$y'' = a^2y + av + v'$$
$$y''' = a^3y + a^2v + av' + v''$$
$$y'''' = a^4y + a^3v + a^2v' + av'' + v'''$$
ecc.

e però ſoſtituendo queſti valori nell' equazione (A), ſi avrà l' equazione ſeguente

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q} = {} & Ay \\ & + Bay + Bv \\ & + Ca^2y + Cav + Cv' \\ & + Da^3y + Da^2v + Dav' + Dv'' \end{aligned}$$
ecc.

e in ſeguito le due equazioni (B), (C)

$$(B) \ldots 0 = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + Ea^4 + \text{ecc.}$$
$$\begin{aligned} (C) \ldots \mathfrak{Q} = {} & (B + Ca + Da^2 + Ea^3 + \text{ecc.})\, v \\ & + (C + Da + Ea^2 + \text{ecc.} \ldots)\, v' \\ & + (D + Ea + Fa^2 + \text{ecc.} \ldots)\, v'' \end{aligned}$$
ecc.

delle quali la (C) è del grado $n - 1$, e può ridurſi alla forma

$$(D) \ldots \mathfrak{Q} = A'v + B'v' + C'v'' + D'v''' + \text{ecc.}$$

eſſendo A', B', C' ecc. funzioni coſtanti di a, B, C ecc.. E' facile I. a vederſi, come nella Prop. precedente, che riſolvendo l' equazione determinata (B) ſi conſeguiſcono n valori differenti per l' indeterminata a, la quale aſcende al grado dell' equazione propoſta (A); e però facendone ſucceſſivamente la ſoſtituzione nell' equazione (D), onde ottenere n equazioni, ſi può (§. XLI) pervenire ad un valore finito di v. Dato queſto valore, che diremo P, ſi poſſono formare coll' equazione

$$y' = ay + P$$

n equazioni differenti, ponendovi ſucceſſivamente li n

valori di a tratti dall' equazione (B), e trovando n valori differenti di y colle riſpettive coſtanti arbitrarie, ſi può ottenere col loro aggregato l' integrale completo dell' equazione (A). II. Ma ſi può tenere ancora un' altra ſtrada. Imperciocchè, eſſendo l' equazione (D) del grado $n - 1$, la ſi tratti come l' equazione (A), facendo

$$\text{II. } v' = bv + q$$

eſſendo b una nuova coſtante indeterminata, q una nuova funzione di x. Si otterranno le due equazioni

$$(B') \ldots\ldots 0 = A' + B'b + C'b^2 + D'b^3 + \text{ecc.}$$
$$(D') \ldots\ldots \mathfrak{Q} = A''q + B''q' + C''q'' + D''q''' + \text{ecc.}$$

eſſendo A'', B'' ecc. funzioni coſtanti di A', B' ecc., e di b, e l' equazione (D') ſarà del grado $n - 2$. Di nuovo trattando l' equazione (D'), come l' equazione (A), ponendo

$$\text{III. } q' = cq + r$$

eſſendo c indeterminata coſtante, r funzione di x, ſi avranno le due equazioni

$$(B'') \ldots\ldots 0 = A'' + B''c + C''c^2 + D''c^3 + \text{ecc.}$$
$$(D'') \ldots\ldots \mathfrak{Q} = A''' + B'''r' + C'''r'' + D'''r''' + \text{ecc.}$$

delle quali la (D'') e del grado $n - 3$, A''', B''' ecc. funzioni coſtanti di A'', B'' ecc. e di c; e così proſeguendo ſi potrà pervenire ad un' equazione (D^n) del grado $n - n$. Sia per facile intelligenza (D'') queſt' equazione finale. Si avrà un valore finito per r. Dunque ſi otterrà il valore di q dall' equazione III. con una coſtante arbitraria. Ma eſſendo data la funzione q ſi avrà dall' equazione II. un valore di v con una nuova coſtante arbitraria, cioè l' integrale completo dell' equazione (A), avendovi n coſtanti arbitrarie, ſol che ſi determinino le coſtanti a, b, c. Baſta pertanto trovare una radice unica per a dall' equazione (B), un' altra per b dall' equazione (B'), ed una terza per c dall' equazione (B''), cioè in generale una ſola radice per ciaſcheduna delle equazioni determinate (B), (B'), (B'')

ecc.; e ſi avrà per queſto mezzo l' integrale completo dell' equazione (A). Tutte le volte dunque, che queſte equazioni determinate poſſono darci una ſola radice reale per ciaſcheduna, il metodo ci eſenta dalla conſiderazione così delle radici eguali, come dalle immaginarie, che potrebbero aver luogo nell' equazione determinata (B), attenendoſi alla ſua ſola riſoluzione, come s' è praticato ſinora in caſi ſimili. Il che ecc.

SCOLIO I.

§. XLVI. Il Metodo ſempliciſſimo uſato nelle Propoſizioni XV, e XVI non è altramente riſtretto al modulo comune $x + 1$, ſiccome quello che ſi eſtende ſu d' ogni ſorta d' incremento, anche variabile. Il caſo di avere riguardo alla natura del modulo ſi riduce al momento di aſſegnare valori eſpliciti agl' integrali delle funzioni ſemplici differenziali $\int M ; \pi_{,} \left(\frac{1}{M} \right)$ ecc., coſa che ſegnatamente appartiene al Cap. precedente, e di cui s' è fatto parola al §. XL.

SCOLIO II.

§. XLVII. Oſſervo, che nella Teoria dell' equazioni lineari a differenze infiniteſime eſpreſſe generalmente dall' equazione (A)

$$(A) \ldots . \mathfrak{Q} = y + \frac{Ady}{dx} + \frac{Bddy}{dx^2} + \frac{Cd^3y}{dx^3} + \text{ecc.}$$

tutti gli Analiſti ſi ſono limitati al caſo de' coefficienti A, B, C ecc. coſtanti; e nella ſuppoſizione che A, B ecc. ſieno funzioni della variabile x, ſi ſono contentati di enunciare, che dato l' integrale generale dell' equazione (A) in ſuppoſizione di $\mathfrak{Q} = 0$, o dato un numero n, o $n - 1$ almeno, d' integrali particolari di quell'

quell'equazione in tale ipoteſi. ſi conſeguiſce l'integrale completo dell' equazione (A). Ma non ſi è tentato ancora coſa alcuna di generale ſu queſto propoſito. Lo ſteſſo è accaduto dell' equazione differenziale (A') a differenze finite.

$(A) \ldots\ldots \mathcal{Q} = y + Ay' + By'' + Cy''' + \text{ecc.}$

E' vero, come dice il Sig. de la *Grange* (*Mem. dell' Accad. Reale di Berlino* 1775), che non è poſſibile il farlo *a priori* con alcun metodo cognito; ma ſi può bene non ſenza frutto mettere in opera più d'un artifizio indiretto. Mi accingo qui pertanto a fare qualche primo paſſo, che non ſarà per avventura del tutto infruttuoſo, non mai con intenzione di prevenire queſto Illuſtre Geometra, ſe mai continuaſſe nel ſuo propoſito di farne ſoggetto delle ſue meditazioni, ma perchè l' occaſione il richiede. Facendo conſiderazione, che l' equazione lineare del primo grado

$$My + Ny' = 0$$

ammette generalmente una riſoluzione di queſta forma (§. XXXII)

$$y = K\pi_{,}\left(-\frac{M}{N}\right)$$

qualunque funzione di x ſieno M, N; e che per eſſere lineare l' equazione generale può il ſuo integrale generale eſſere compoſto dell' aggregato di un numero n d' integrali di queſta forma, eſſendo ella forſe, ſe non eſcluſiva, almeno la forma che affettano per lo più gl' integrali di queſte equazioni ne' caſi d' integrabilità, che ci ſono in potere, mi parve che ſi poteſſe per queſto mezzo aprire un campo vaſtiſſimo all' integrazione di tutte le equazioni, che foſſero differenziali eſatti di qualche integrale d' una tal forma generale.

Eccone un Saggio.

PROPOSIZIONE XVII.

§. XLVIII. *Trovare tutte le equazioni differenziali a differenze finite, e a coefficienti variabili, ſuſcettibili d' Integrale completo d' una data forma generale.*

Risoluzione.

Si aſſumano le equazioni differenziali (II), (III), (IV) ecc. di grado in grado, negletto il primo, compreſe nell' equazione generale (A')

$$(A') \ldots \circ = y + Ay' + By'' + Cy''' + Dy'''' + \text{ecc.}$$

ma ſotto una forma indeterminata

$$(\mathrm{II}) \ldots \circ = y + f(\phi, \mu)y' + f'(\phi, \mu)y''$$

$$(\mathrm{III}) \ldots \circ = y + f(\phi, \mu, \omega)y' + f'(\phi, \mu, \omega)y'' + f''(\phi, \mu, \omega)y'''$$

$$(\mathrm{IV}) \ldots \circ = y + f(\phi, \mu, \omega, \lambda)y' + f'(\phi, \mu, \omega, \lambda)y'' + f''(\phi, \mu, \omega, \lambda)y''' + f'''(\phi, \mu, \omega, \lambda)y'''' \text{ ecc.}$$

eſſendo ϕ, μ, ω, λ ecc. funzioni indeterminate di x, $f(\phi, \mu$ ecc.$)$, $f'(\phi, \mu$ ecc.$)$ ecc. funzioni indeterminate di ϕ, μ, ω, λ ecc.

Il numero delle funzioni ϕ, μ, ω ecc. introdotte in ogni equazione è uguale al grado dell' equazione da riſolvere. Poſto ciò, l' equazione (I) rappreſenti l' integrale completo dell' equazione (A')

$$(I) \ldots y = \pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\left(K + \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(K' + \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right)\left(K'' + \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(K''' + \text{ecc.}\right.\right.\right.\right.$$

eſſendo K, K', K'' ecc. le coſtanti arbitrarie, di modo che richiedendoſi l' integrale completo dell' equazione (II), ſia egli

$$(II') \ldots y = \pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\left(K + K' \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right),$$

l' integrale dell' equazione (III), ſia

$$(III') \ldots y = \pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\left(K + \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(K' + K'' \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)\right)$$

l'integrale dell'equazione (IV), ſia

$$(IV')\ldots y=\pi_{,}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\left(K+\int\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(K'+\int\pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right)\left(K''+K'''\int\pi_{,}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\right)\right)$$

e così in ſeguito.

Si prendano per ordine le differenze di queſte equazioni, onde determinare le funzioni $f(\varphi,\ \mu$ ecc.$)$, $f'(\varphi,\mu$ ecc.$)$ ecc. nelle equazioni aſſunte (II), (III) ecc., e però cominciando dall' equazione (II'), la ſi divida per $\pi_{,}\left(\frac{1}{\varphi}\right)$, ſicchè ſia

$$\frac{y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\varphi}\right)}=K+K'\int\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)$$. Sarà differenziando

$$\frac{y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\varphi'}\right)}-\frac{y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\varphi}\right)}=K'\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)$$, e però

$$\frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{\varphi}\right)y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\varphi'}\right)}-y=K'\pi_{,}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right).\ \text{Ma}\ \frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{\varphi}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\varphi'}\right)}=\varphi$$

(§. xxv.). Dunque $$\frac{\varphi y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)}-\frac{y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)}=K'$$

e però, differenziando di nuovo, ſi avrà

$$\frac{\varphi' y''}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\varphi'}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu'}\right)}-\frac{\varphi y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)}-\frac{y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\varphi'}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu'}\right)}$$

$$+\frac{y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)}=0$$

Si faccia la moltiplicazione per $\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)$; e perchè $\frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu'}\right)}=\phi\mu$ (§. XXVII.), ſi avrà l' equazione

$$(II')\ldots y-\phi(1+\mu)y'+\phi\phi'\mu y''=0.$$

Reſtano pertanto determinate le funzioni f, f', eſſendo $f(\phi,\mu)=-\phi(1+\mu)$; $f'(\phi,\mu)=\phi\phi'\mu$, e però l' equazione ($II'$) è l' integrale completo dell' equazione differenziale (II'), qualunque funzione di x ſieno μ, e ϕ, e qualunque il modulo delle differenze.

Di nuovo ſi divida l' equazione (III') per $\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)$, e ſi differenzj. Sarà

$$\frac{y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)}-\frac{y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)}=K'\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)+K''\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\int\pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right);$$

e moltiplicando per $\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)$, ſarà

$$\phi y'-y=K'\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)+K''\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\int\pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Dunque

$$\frac{\phi y'-y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)}=K'+K''\int\pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Si differenzj la ſeconda volta. Sarà

$$\frac{\phi' y''}{\pi_{\prime}\left(\frac{1}{\mu'}\right)\pi_{\prime}\left(\frac{1}{\phi'}\right)} - \frac{\phi y'}{\pi_{\prime}\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_{\prime}\left(\frac{1}{\phi}\right)} - \frac{y'}{\pi_{\prime}\left(\frac{1}{\mu'}\right)\pi_{\prime}\left(\frac{1}{\phi'}\right)}$$

$+ \dfrac{y}{\pi_{\prime}\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_{\prime}\left(\frac{1}{\phi}\right)} = K''\pi_{\prime}\left(\frac{1}{\omega}\right)$; e moltiplicando tutto per $\pi_{\prime}\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_{\prime}\left(\frac{1}{\phi}\right)$, ſarà $\phi\phi'\mu y'' - \phi y' - \phi\mu y' + y$ $= K''\pi_{\prime}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{\prime}\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_{\prime}\left(\frac{1}{\omega}\right)$; e facendo il coefficiente di $K'' = R$, ſi divida l' equazione per R. Si avrà

$$\frac{\phi\phi'\mu y''}{R} - \frac{\phi(1+\mu)y'}{R} + \frac{y}{R} = K''.$$

Si differenzj la terza volta, e ſarà

$$\frac{\phi'\phi''\mu' y'''}{R'} - \frac{\phi\phi'\mu y''}{R} - \frac{\phi'(1+\mu')y''}{R'} + \frac{\phi(1+\mu)y'}{R} + \frac{y'}{R'}$$

$- \dfrac{y}{R} = 0$ E poichè $\dfrac{R}{R'} = \phi\mu\omega$ (§. XXVII), ſe ſi moltiplichi queſt' equazione per R, ſi avrà l' equazione differenziale

$$(\text{III}'')\ldots\ldots y - \phi(1+\mu+\mu\omega)y' + \phi\phi'(\mu+\mu\mu'\omega+\mu\omega)y''$$
$$- \phi\phi'\phi''\mu\mu'\omega y''' = 0$$

di cui ſarà integrale completo l' equazione (III'), qualunque funzione di x ſieno ϕ, μ, ω, e qualunque il modulo $x + X$.

Collo ſteſſo metodo differenziando quattro volte ſucceſſivamente l' equazione (IV'), ſi perverrà all' equazione differenziale

$$(\text{IV}'')\ldots\ldots y - \phi(1+\mu+\mu\omega+\mu\omega\lambda)y' + \phi\phi'(\mu+\mu\omega+\mu\omega\lambda$$
$$+ \mu\mu'\omega + \mu\mu'\omega\lambda + \mu\mu'\omega\omega'\lambda)y'' - \phi\phi'\phi''(\mu\mu'\omega + \mu\mu'\omega\lambda$$
$$+ \mu\mu'\omega\omega'\lambda + \mu\mu'\mu''\omega\omega'\lambda)y''' + \phi\phi'\phi''\phi'''\mu\mu'\mu''\omega\omega'\lambda y'''' = 0$$

e così all' infinito. Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XLIX. La differenziazione può continuarſi pe' gradi ſuperiori ſenza neceſſità di cominciare da' primi, eſſendo la quarta norma per la quinta, queſta per la ſeſta, e così ſucceſſivamente. E poichè integrando l' equazione (A') in ſuppoſizione, che l' omogeneo di comparazione ſia $=0$, ſi può ella integrare anche in ſuppoſizione ch' egli ſia $=\mathfrak{Q}$ funzione di x (§. XLIII); è manifeſto, che s' integreranno le equazioni (II''), (III'') ecc. anche in ſuppoſizione, che s' abbia per omogeneo una funzione di x qualunque.

COROLLARIO II.

§. L. Propoſta pertanto qualſivoglia equazione differenziale finita del grado n a coefficienti variabili

$$\mathfrak{Q}=y+Ay'+By''+Cy'''+\text{ecc.}$$

ella avrà integrale completo della forma (I) (§. XLVIII) in ſuppoſizione di $\mathfrak{Q}=0$, ſempre che ſia ella reducibile all' equazione differenziale corriſpondente (II''), (III'') ecc. E perchè s' identifichino, converrà che i coefficienti delle funzioni y', y'' ecc. nelle equazioni (II''), (III'') ecc. ſieno riſpettivamente uguali ai coefficienti A, B ecc. dell' equazione propoſta. Quindi eſſendo il numero delle funzioni indeterminate ϕ, μ ecc. uguale al grado dell' equazione; e uguale a queſto grado eſſendo pure il numero de' coefficienti da paragonare riſpettivamente, ſi avranno tante equazioni, quanto è il numero delle funzioni indeterminate. E ammettendo l' equazione propoſta integrale completo in ipoteſi di $\mathfrak{Q}=0$, lo avrà pure in ſuppoſizione di $\mathfrak{Q}$ funzione di x, come ſi è oſſervato poc' anzi.

COROLLARIO III.

§. LI. Non è difficile il riconoſcere anche a primo aſpetto, che non ha confini il numero delle equazioni differenziali finite a coefficienti variabili che ſi poſſono integrare con queſto metodo. Laſciando da parte l'aſſunzione libera di qualſivoglia funzione di x per le indeterminate ϕ, μ, ω ecc. col mezzo della quale ſi poſſono aſſegnare equazioni differenziali ſenza numero e di qualunque grado, ſuſcettibili tutte d' una completa integrazione, non è egli del tutto inefficace per un' infinità eziandio di equazioni differenziali a coefficienti variabili dati. Imperciocchè, eſaminando la natura delle equazioni di relazione, che ci riſultano dal paragone de' coefficienti dati cogli aſſunti, ſi vede patentemente, ch' elle ſono differenziali finite, e che ſi può ſempre pervenire prima ad una Ridotta del grado n in ϕ e coefficienti dati, indi ad altre ſucceſſivamente inferiori del grado $n-1$, $n-2$ ecc. in μ, ω ecc. In conſeguenza ſe ſi abbia un Integrale particolare per ciaſcheduna di queſte equazioni gradatamente inferiori, ſi ha immediatamente l' integrale completo dell' equazione propoſta, qualunque coſa ſieno i coefficienti dati, il che ci offeriſce una ſoluzione diretta del Problema. E ſe non ſi poſſono conſeguire *a priori* tutti queſti integrali particolari ſucceſſivi, ſi può ſempre tanti aſſumerne ad arbitrio, quanti poſſono occorrere per determinare le altre funzioni indeterminate, sì che reſti diſobbligato il maggior numero poſſibile di coefficienti dati. Facciamo di tutto ciò un qualche ſvolgimento a illuſtrazione del Metodo.

I.

Sia primieramente propoſta l' equazione (A)
$(A) \ldots . 0 = y + My' + Ny''$
a cui ſi riducono tutte le equazioni differenziali di ſecondo ordine. Paragonata coll' equazione (II''), ſarà d' uopo per l' identificazione, che abbiano luogo le due equazioni

$$-\phi - \phi\mu = M$$
$$\phi\phi'\mu = N$$

la ſeconda ſomminiſtra $\mu = \frac{N}{\phi\phi'}$, il qual valore ſoſtituito nella prima ci dà l' equazione in ϕ

$$-1 = \frac{M}{\phi} + \frac{N}{\phi\phi'}$$

cioè, poſto $\frac{1}{\phi} = \frac{z'}{z}$ l' equazione

$$z + Mz' + Nz'' = 0$$

che è lo ſteſſo che l' equazione (A) poſto z in luogo di y.

Se ſi abbia pertanto un ſolo valore particolare per $z = p$ ſoddisfacente a queſt' equazione, ſarà $\phi = \frac{p}{p'}$, $\mu = \frac{Np''}{p}$, e però $y = \pi_{,}\left(\frac{p'}{p}\right)\left(K + K'\int \pi_{,}\left(\frac{p}{Np''}\right)\right)$ ſarà l' integrale completo dell' equazione generale (A), eſſendo M, N funzioni di x qualunque. Che ſe non foſſe per alcun modo poſſibile il ritrovare l' integrale particolare p, ſi prenda $\phi = p$ funzione qualſivoglia di x ad arbitrio. Si avrà $\mu = \frac{N}{pp'}$, e l' integrale completo

dell'

dell' equazione (A) ſarà $y = \pi_{,}\left(\frac{1}{p}\right)\left(K + K'\int \pi_{,}\left(\frac{pp'}{N}\right)\right)$ purchè i due coefficienti M, N abbiano tra di sè la relazione ſeguente

$$Mp' + pp' + N = o$$

con che uno dei due reſta determinato per l' altro, e per la funzione p aſſunta ad arbitrio. In conſeguenza le due equazioni differenziali di ſecondo ordine

$$o = y + My' - p'(p + M)y''$$

$$o = y - \left(\frac{N + pp'}{p'}\right)y' + Ny''$$

ſaranno completamente integrabili, qualunque funzione di x ſieno M, e p per la prima, ed N, e p per la ſeconda.

II.

Sia l' equazione (B)

$$(B) \ldots . o = y + My' + Ny'' + Py'''$$

a cui ſi riducono tutte le equazioni differenziali di terzo ordine.

Perchè ammetta ella l' integrale (III'), dovranno aver luogo le equazioni

$$1 + \mu + \mu\omega = -\frac{M}{\phi} = A$$

$$\mu + \omega\mu\mu' + \mu\omega = \frac{N}{\phi\phi'} = B$$

$$\mu\mu'\omega = -\frac{P}{\phi\phi'\phi''} = C$$

Sottraendo la prima dalla ſeconda, e dal reſiduo ſottraendo la terza, ſarà

$$1 + \frac{M}{\phi} + \frac{N}{\phi\phi'} + \frac{P}{\phi\phi'\phi''} = o$$

cioè, poſto $\frac{1}{\phi} = \frac{z'}{z}$, ſarà la ridotta del grado n

$$(C) \ldots\ldots z + Mz' + Nz'' + Pz''' = 0$$

Per trovare la ſeconda Ridotta in μ del grado $n-1$, ſi diſpongano le equazioni di relazione de' coefficienti in queſto modo

$$\frac{A-1}{\mu} = 1 + \omega$$

$$\frac{C}{\mu\mu'} = \omega$$

Sottraendo la prima dalla ſeconda equazione, riſulta immediatamente

$$\frac{C}{\mu\mu'} - \frac{A-1}{\mu} = -1$$

e però, poſto $\frac{1}{\mu} = \frac{r'}{r}$, ſi avrà

$$(D) \ldots\ldots 0 = r - (A-1)\,r' + C\,r''$$

Tutte le volte pertanto, che ſi poſſa avere per z un valor particolare p dall'equazione (C), con che ſi avrà $\phi = \frac{p}{p'}$, e ſoſtituito queſto valore in A, e C, ſi abbia pure per r un valor particolare q dall'equazione (D), il quale darà $\mu = \frac{q}{q'}$, e $\omega = \frac{C}{\mu\mu'} = \frac{Cq''}{q}$, ſarà

$$y = \pi_{,}\left(\frac{p'}{p}\right)\left(K + \int \pi_{,}\left(\frac{q'}{q}\right)\left(K' + K'' \int \pi_{,}\left(\frac{q}{Cq''}\right)\right)\right)$$

l' integrale completo di tutte le equazioni differenziali di terzo ordine, qualunque funzione di x ſieno M, N, P.

Ma ſe non poſſono averſi queſti valori particolari per ϕ, e μ, ſi aſſumano in luogo loro funzioni di x di qualunque natura, cioè p per ϕ, q per μ. Soſtituendo queſti valori nelle due equazioni (C), (D), qual' ora pei coefficienti dell' equazione (B) abbiano luogo le ſeguenti equazioni,

$$pp'p''+Mp'p''+Np''+P=0$$
$$Mp'p''q'+pp'p''q'+pp'p''qq'-P=0$$

ſarà

$$y=\pi_{,}\left(\frac{1}{p}\right)\left(K+\int\pi_{,}\left(\frac{1}{q}\right)\left(K'+K''\int\pi_{,}\left(\frac{qq'}{c}\right)\right)\right)$$

l' integrale completo dell' equazione propoſta.

In conſeguenza generalmente le equazioni di terzo grado

$$0=y-\left(\frac{N}{p'}+Nq'+p+pq'+pqq'\right)y'+Ny''+(pp'p''qq'$$
$$-Np''q'-Np'p''q'q'-pp'p''q'q'-pp'p''q'q')y'''$$

$$0=y+My'-\left(\frac{p'M+pp'+pp'q'+pp'qq'}{1+p'q'}\right)y''$$
$$+(Mp'p''q'+pp'p''q'+pp'p''qq')y'''$$

$$0=y+\left(\frac{P-pp'p''q'-pp'p''qq'}{p'p''q'}\right)y'$$
$$+\left(\frac{pp'p'p''qq'-Pp'-(pp'q'+pp'qq')pp'p''q'}{1+p'q'}\right)y''$$
$$+Py'''$$

faranno completamente integrabili, qualunque funzione di x ſieno M, N, P, p, q

III.

Sia l' equazione (F)

$(F)\ldots\ldots 0=y+My'+Ny''+Py'''+Qy''''$

di quarto grado. Perchè poſſa ella ammettere integrale completo della forma (IV'), ſarà neceſſario che abbiano luogo le equazioni

$$(1)\ldots\ldots 1+\mu+\mu\omega+\mu\omega\lambda=-\frac{M}{\phi}=A$$

$$(2)\ldots\ldots \mu(1+\omega+\omega\lambda)+\mu\mu'(\omega+\omega\lambda+\omega\omega'\lambda)=\frac{N}{\phi\phi'}=B$$

$$(3)\ldots\mu\mu'(\omega+\omega\lambda+\omega\omega'\lambda)+\mu\mu'\mu''\omega\omega'\lambda=-\frac{P}{\phi\phi'\phi''}=C$$

$$(4)\ldots\mu\mu'\mu''\omega\omega'\lambda=\frac{Q}{\phi\phi'\phi''\phi'''}=D.$$

Sottraendo la prima dalla ſeconda equazione, e ſucceſſivamente ſottraendo il reſiduo dalla terza, e il nuovo reſiduo dalla quarta, ſi avrà la Ridotta in ϕ

$$-1=\frac{M}{\phi}+\frac{N}{\phi\phi'},+\frac{P}{\phi\phi'\phi''}+\frac{Q}{\phi\phi'\phi''\phi'''}$$

cioè l' equazione ſeguente, poſto $\frac{1}{\phi}=\frac{z'}{z}$,

$$(G)\ldots\ldots z+Mz'+Nz''+Pz'''+Qz''''=0.$$

Di nuovo, diſponendo le equazioni di relazione tra' coefficienti nel ſeguente modo

$$(5)\ldots\frac{A-1}{\mu}=1+\omega+\omega\lambda=A'$$

$$(6)\ldots\ldots\frac{B+1-A}{\mu\omega}=\omega+\omega\lambda+\omega\omega'\lambda=B'$$

$$\frac{D}{\mu\mu'\mu''}=\omega\omega'\lambda$$

ſi avrà immediatamente la Ridotta in μ

$$\frac{D}{\mu\mu'\mu''}-\frac{B+1-A}{\mu\mu'}+\frac{A-1}{\mu}-1=0$$

cioè, poſto $\frac{1}{\mu}=\frac{r'}{r}$, l'equazione ſeguente

$$(H)\ldots r-(A-1)r'+(B+1-A)r''-Dr''=0$$

E di nuovo, ripigliando le equazioni (5) (6), ſi ha

$$\frac{A'-1}{\omega}=1+\lambda$$

$$\frac{B'+1-A'}{\omega\omega'}=\lambda$$

donde riſulta la Ridotta in ω

$$\frac{A'-1}{\omega}-\frac{B'+1-A'}{\omega\omega'}-1=0$$

cioè, poſta $\frac{1}{\omega}=\frac{t'}{t}$, l' equazione

$$(J)\ldots t-(A'-1)t'+(B+1-A')t''=0$$

Se pertanto ſi abbia un valore p per z ſoddisfacente all' equazione (G), ſicchè ſia $\phi=\frac{p}{p'}$, e un valore q per r ſoddisfacente all' equazione (H), onde ſia $\mu=\frac{q}{q'}$, e finalmente un valor particolare m per t, il quale ſoddisfaccia all' equazione (J), con che ſi abbia $\omega=\frac{m}{m'}$, e $\lambda=\frac{D}{\mu\mu'\mu''\omega\omega'}=\frac{Dm''q'''}{mq}$, ſarà

$$y=\pi_,\Big(\frac{p'}{p}\Big)\Big(K+\int\pi_,\Big(\frac{q'}{q}\Big)\Big(K'+\int\pi_,\Big(\frac{m'}{m}\Big)\Big(K''+K'''\int\pi_,\Big(\frac{mq}{Dm''q'''}\Big)\Big)\Big)\Big)$$

l' integrale completo dell' equazione (F), eſſendo M, N, P, Q funzioni di x qualunque. Che ſe non poſſano averſi sì fatti integrali particolari, ſarà ſempre poſſibile il conſervare uno qualunque de' coefficienti M, N, ecc. non avendovi, come ſi è veduto qui innanzi, che un numero $n-1$ di equazioni di relazione tra eſſi da ſoddisfare, minore di un' unità del numero de' coefficienti. Imperciocchè, aſſunte ad arbitrio le funzioni p per ϕ, q per μ, m per ω, le equazioni neceſſarie tra coefficienti ſaranno quelle, che ſeguono

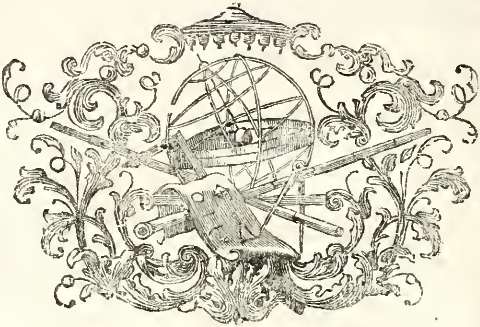
$$pp'p''p'''+Mp'p''p'''+Np''p'+Pp'''+Q=0$$

$$pp'pp''qq'q''+(M-p)p'p''p''qq'+(N+pp'$$
$$+Mp')p'p''q''-Q=0$$

$$pp'qq'mm'+N+pp'+Mp'+pp'qq'-(M-p)p'qq'$$
$$-(M-2p)p'qq'm'=0$$

E però non ſarà, che un affare di calcolo, ſoddisfacendo a queſte equazioni, il determinare le equazioni integrabili generalmente, qualunque funzione di x ſieno M, N ecc. p, q ecc., come ſi è fatto precedentemente.

Nello ſteſſo modo potremo inoltrarci all' integrazione delle equazioni ſuperiori, ſiccome è agevole da vedere. Ma queſto per ora baſti intorno al Calcolo Integrale delle equazioni differenziali finite a due variabili.



SPERIENZE

SOPRA IL PRECIPITATO PORPORA

Ottenuto dal Gaz ricavato dallo Stagno, e dalla ſua Calce.

Del Sig. CONTE MOROZZO.

1. NEL tempo, in cui l' eſame de' diverſi fluidi aeriformi forma la particolare occupazione de' Chimici, e Fiſici moderni, non credo di far coſa infruttuoſa, ſe verrò eſponendo alcune nuove ſperienze inſtituite ſopra il gaz ſuſcitato sì dallo ſtagno, che dalla ſua calce; e ſe prenderò motivo di deſcriverne alcune altre che da quelle hanno tratto origine, ed occaſione.

Non ha dubbio, che il ſodo progreſſo delle Scienze non eſigga, che ſi aduni una gran quantità di fatti ben eſaminati, e ſi moltiplichino le oſſervazioni prima di paſſare a ſtabilire teorie luminoſe; le quali alcune volte un ſolo fatto diſtrugge, ma che ſpeſſo la luſinghiera compiacenza dell' Autore, anche a coſto di ſconvolgere i primi elementi della natura, cerca ad ogni modo di produrre, e mettere nel lume che può migliore. Laonde in vece di aumentarſi il numero delle umane cognizioni ſempre più elle s' avvolgono ſotto un velo più denſo.

Spero che non incorreranno ſimil taccia le ſperienze, che mi fo a deſcrivere, poichè le conſeguenze, che ne deduco, ſono bensì ſemplici conghietture, ma coll' eſame e ravvicinamento di molti altri fatti poſſono prendere quel grado di certezza che ſi richiede per iſchiarire la verità in ſiffatte materie.

2. Prima di venire all'eſpoſizione di queſte ſperienze parmi neceſſario di gettare un colpo d' occhio ſull' apparecchio, di cui mi ſono ſervito (veggaſi la *fig. I.*). *A* è un matraccio; *B* una caraffa col tubo ricurvo perchè poſſa eſſere introdotto nel matraccio. Poſſono pure queſte caraffe facilmente adattarſi l'una ſull'altra, così che il tubo dell'una s'introduca nel collo dell'altra paſſando per un turacciolo di ſughero; e le giunture ſi ſuggellano poi eſattamente.

C è una veſcica armata di chiave applicata all' ultima caraffa dell' apparecchio per raccogliere il gaz. *D* è il tubo che s' introduce nel matraccio, per cui col mezzo di un imbuto *E* ſi verſa il liquore, e che, tolto l' imbuto, ſi chiude ſubitamente.

SPERIENZA I.

3. Riposi in un matraccio mezz' oncia di ſtagno d'Inghilterra ridotto in ſogli, come pure un' oncia di ſpirito di Salmarino; indi aggiuſtato il matraccio ad una caraffa, la quale col ſuo tubo ricurvo avea con eſſo comunicazione, e conteneva una ſoluzione d' oro allungata nell'acqua diſtillata ch'era di color citrigno, vi verſai due oncie circa di ſpirito di nitro, e tolto l' imbuto fu chiuſo ben bene l' apparecchio.

Immediatamente cominciò l' effervescenza con calor grande, e il gaz ſviluppatoſi attraversò con rapidità la ſoluzione d' oro, e ſi gettò nella veſcica.

La ſoluzione d'oro fu precipitata in color porpora dopo qualche tempo; ma ciò che mi ſorpreſe alquanto, ſi è, che queſto precipitato ſi radunò al fondo del vaſo laſciando la ſoluzione limpida, e traſparente, come l' acqua diſtillata, di cui mi era ſervito per allungarla; ciò che non ſuccede quando ſi fa la tintura porpora di di *Caſſius*, ove tutta la ſoluzione prende un color intenſo paonazzo, che a poco a poco ſi va depoſitando al fondo a guiſa di mucilaggine, ed in cui l' acqua ritiene ſovente un color roſſiccio.

Eſaminato il gaz raccolto nella veſcica l' ho ritrovato alcune volte infiammabile con fiamma leggera, e cerulea (1); alcune volte pareva atto alla reſpirazione, ed a mantenere la fiamma; accidenti oſſervati pure da' Sigg. *Prieſtley*, de *Laſſone*, e *Macquer* (2). Ma ho luogo di credere, che ſiffatte variazioni ſieno prodotte dalla maniera di eſaminarlo, poichè qualora è raccolto dentro ad una campana, od altro vaſo, che prima ſia riempiuto d' acqua, non è egli invero ſempre infiammabile, ma ſempre più o meno mefitico.

Avendo introdotto di queſto gaz in una ſoluzione d' oro, e meſcolato ben bene, non ſi è altramente ottenuto cangiamento nel ſuo colore, nè ſi formò precipitato veruno.

SPERIENZA II.

4. Il tutto diſpoſto come nella precedente ſperienza, ſalvo che aggiunſi una caraffa all' apparecchio, in modo che la prima, per cui paſſava il gaz, era ripiena d' acqua diſtillata, e la ſeconda conteneva la ſoluzione d' oro; ripoſi dello ſtagno nel matraccio con dello ſpirito di ſalmarino, eccitando indi per mezzo dello ſpirito di nitro l' effervescenza. Non ottenni in queſto modo precipitato veruno nella ſoluzione d' oro. Nella caraffa poi, che conteneva l' acqua diſtillata, quantunque non appariſſe l' acqua di color lattiginoſo, e foſſe quaſi

---

(1) Ben inteſo che il verſava in un vaſe con aggregazione d' aria atmosferica.

(2) Veggaſi il Dizionario Chimico di *Macquer pag. 597. tom. 1. ediz. in quarto.*

traſparente, avendovi verſato della ſoluzione d' oro, ottenni dopo alcune ore un precipitato porporino.

Il gaz eſaminato offerſe gli ſteſſi riſultamenti della precedente ſperienza.

SPERIENZA III.

5. Alcuni Chimici hanno creduto, che il precipitato porpora, che ſi ottiene dall' oro per mezzo della ſoluzione di ſtagno, non foſſe ad altro dovuto, che all' acido intenſo, che ſi carica del flogiſto dello ſtagno; e che ſe ſi aveſſe mezzo di avere un acido flogiſticato concentratiſſimo, ſi otterrebbe tale precipitato anche ſenza lo ſtagno. Feci perciò la ſperienza ſeguente.

Ripoſi nel matraccio dello ſtagno, e tutto diſpoſi come nella prima ſperienza col ſolito apparecchio, ſalvo che adoperai quattro caraffe. La prima conteneva acqua diſtillata; la ſeconda la ſoluzione d' oro; la terza era ripiena di tintura di tornaſole; e la quarta finalmente conteneva de' fiori di Ciano, ed alcune roſe (delle quali aveva preſo ſolamente i petali) rinſerrate ben bene. La veſcica era adattata all' ultima caraffa.

Non ebbi precipitato nella ſoluzione dell' oro.

Nell' acqua diſtillata avendo verſato una ſoluzione d' oro, ebbi come nella ſperienza antecedente, dopo alcune ore, il precipitato porporino.

La ſoluzione di tornaſole divenne roſſa. I fiori di Ciano preſero il colore dello ſcarlatto; e le roſe un color porporino intenſo (3). Il gaz ottenuto offerſe gli ſteſſi fenomeni delle ſopraccitate ſperienze.

---

(3) E' coſa degna d' oſſervazione, che i fiori, ch' erano fuori della corrente del gaz, non venivano viſibilmente colorati. Quelli all' oppoſto pe' quali paſſava il gaz prendevano un color carico di ſcarlatto, come ho detto. Si oſſerva lo ſteſſo nelle ſoluzioni del tornaſole, ſe vi ſi metta l'occhio nel momento ſteſſo, che il gaz le attraverſa; ma più o meno ſecondo la coſtruzione de' vaſi.

Si oſſerva dunque, che ancorchè l' acido foſſe aſſai intenſo per colorare con vivacità sì i colori, che la tintura di tornaſole, ciò non oſtante non fu egli atto a precipitare in porpora la ſoluzione d' oro.

6. Debbo avvertire, che in ſiffatte ſperienze, ceſſato lo ſviluppamento del gaz, comincia a farſi l' aſſorbimento; così che conviene disfare l' apparecchio a tempo ſe non ſi vuol riſchiare di veder meſcolati i liquori nelle differenti caraffè; e quello della prima nel matraccio; il che alcune volte mi è accaduto.

Nè debbo tacere, che i precipitati porpora ottenuti ſi facevano in più o meno corto ſpazio di tempo, le coſe eſſendo in circoſtanze uguali, ſenza che abbia riconoſciuta la cauſa produttrice.

7. Queſte ſperienze fanno chiaramente vedere, che il color porpora che ſi è conſeguito ſi deve alle particelle ſottili dello ſtagno, che ſono ſollevate col gaz, sì che depoſte nell' oro formano l' oro di *Caſſius*, o ſia il precipitato porpora. Un accidente ſopraggiuntomi me ne confermò la verità. Queſte ſperienze parendomi di gran peſo per accreſcere le cognizioni Fiſico-Chimiche nella teoria delle arie fattizie, cercai di ripeterle più volte.

Preſi dunque un altro matraccio, e più volte replicai queſte ſperienze, ſenza però ottenere gli ſteſſi riſultamenti. Già diffidava di me ſteſſo in queſta diverſità di apparenze; quando preſi a riflettere, che il matraccio, di cui prima mi era ſervito, aveva il collo ſette o otto pollici più corto dell' altro. In fatti tagliato il collo a quel matraccio, e meſſolo di nuovo in eſperienza, ottenni di bel nuovo il precipitato porpora. La lunghezza del matraccio non eccedeva così due piedi parigini.

8. Confermato in tal guiſa il riſultamento delle precedenti ſperienze, non ſenza fondata ragione potei conchiudere, che le ſoſtanze aeriformi tengono in dif-

ſoluzione alcune particelle de' corpi componenti (4), e che queſte vengono inalzate a certe determinate altezze dal movimento rapido dell' effervefcenza; ma che poi, ceſſato queſto impulſo, la gravità ſpecifica riprendendo la propria energia ſopra di eſſe, precipitano di nuovo. Il che dà a conoſcere quanto debba eſſer circoſpetto il Fiſico Oſſervatore, poichè i riſultamenti in ſiffatte ſperienze variano ſecondo le differenti altezze, alle quali deve il gaz ſollevarſi, o ſecondo le ſoſtanze, ch' eſſo dee attraverſare.

9. Ottenuto, come vedeſi, il precipitato porpora per mezzo dell' emanazione gazoſa dello ſtagno per via umida, cercai per mezzo del fuoco, ſe dal metallo medeſimo, o dalla ſua calce poteſſi ottenere lo ſteſſo, e feci a tal fine le ſeguenti ſperienze.

SPERIENZA IV.

10. In una canna da fucile, alla quale era ben ſaldata la vite, come pure il focone, ripoſi tre oncie di ſtagno d' Inghilterra ridotto in grani. Vi adattai un tubo di vetro, il quale metteva in un vaſe ripieno di ſoluzione d'oro allungata con acqua diſtillata; al qual vaſe era pure adattata una veſcica a fiaſco armata di chiave (veggaſi la *fig. II.*).

Diedi a queſta canna un fuoco violentiſſimo per lo ſpazio di ſette e più ore; ma non ſi ſprigionò giammai alcuna ſoſtanza gazoſa. Sul principio fu depreſſa la ſoluzione dentro al tubo, ma non paſsò mai veruna bolla d'aria; anzi dopo due ore di fuoco ſi fece aſſorbimento. Più volte tentai la ſteſſa ſperienza, ma invano; quantunque il Sig. de *Prieſtley* aſſicuri aver eſtratto del gaz infiammabile ſenza intermezzo d' alcuna ſoſtanza da diverſi metalli, tanto col riporli in un cannone di fucile, quanto col mezzo d'uno ſpecchio uſtorio dentro a vaſi di vetro; i metalli da lui ſperimentati furono il ferro, lo zinco, lo ſtagno (5). Nè debbo incolpare l'azione del fuoco, poichè vetrificai in quel tempo alcune ſoſtanze nel fornello medeſimo, in cui era collocata la canna.

---

(4) Sembra che di tal ſentimento ſieno pure i Sigg. *Baumè*, *Morveau*, e *Vallerius*, ed altri più antichi Autori.

La ſoluzione d' oro non avendo ricevuto il menomo cangiamento, eſaminai lo ſtagno, e lo ritrovai nella ſuperficie calcinato (6), anzi in qualche punto vetrificato. Il ſuo peſo non fu ſenſibilmente cangiato, ma è coſa difficile in queſte ſperienze l' accertarſene, poichè per la violenza del fuoco ſi diſtaccano le ſcorie dal ferro, delle quali rieſce difficile il liberarne la ſoſtanza ſperimentata.

11. Queſta ſperienza, che fu inutile per le mie ricerche, mi fe paleſe per altro un fenomeno, che può intereſſare i Fiſici. Un' ora e mezza circa dappoichè la canna fu al fuoco, il calore era così intenſo in tutta la ſua lunghezza, che non poteva con la mano toccarſi francamente neppure in ſommità. Quando poi cominciò a farſi l' aſſorbimento, cioè un' ora dopo che il fuoco nel fornello era aſſai più intenſo, divenne la canna quaſi fredda, di modo che potea ſenza incomodo toccarla la mano in tutta la lunghezza, anche dove era lutata al fornello.

Non potrebbeſi conghietturare, che l'aria ſia il conduttore del calore? Che quando queſta venne aſſorta

---

(5) Il Sig. de *Lavoiſier* non ne ha ricavato dal piombo, e ſi ha luogo a credere, che nella ſperienza di *Hales* l' aria da eſſo ottenuta ſiaſi ſviluppata dall' apparecchio.

(6) Vegganſi le ſperienze del Sig. *Lavoiſier* le quali ſono analoghe ſopra tal fatto (*Opuſcules Phiſiques*, & *Chimiques pag.* 281).

dal metallo nel tempo della riduzione della ſua ſuperficie in calce ſia appunto ceſſato il calore? O forſe i vapori aſſorti dall' acqua, quando ſi fece il vuoto, hanno cagionato queſto fenomeno?

Sperienza V.

12. Miſi in una canna da fucile ben chiuſa tre oncie di calce di ſtagno, oſſia *potèe d' etain*, eſſendo l' apparecchio come nella precedente ſperienza. Le diedi un fuoco il più violento, ma non mi riuſcì la riduzione.

Vi fu ſoltanto il liquore un po' depreſſo, ma non paſsò veruna bolla; e queſta depreſſione la giudico unicamente cagionata dalla dilatazione dell' aria contenuta nel vano.

Intrapreſi pertanto a far cimento coll' addizione di ſoſtanze flogiſtiche; il che feci con le ſeguenti ſperienze.

Sperienza VI.

13. Riposi un' oncia e mezza di calce di ſtagno, e un' egual porzione di reſina nella ſolita canna da fucile con lo ſteſſo apparecchio.

Quando il calore cominciò a penetrare la canna, immediatamente ſi ſviluppò una prodigioſa quantità di gaz, il quale attraverſando la ſoluzione dell' oro, gettoſſi nella veſcica anneſſa. La violenza con cui ſi ſviluppava mi fece diſgiungere l' apparecchio; ciò non oſtante oſſervai

Che la ſoluzione dell' oro fu leggermente precipitata in color porpora, quantunque l' acqua aveſſe preſo un color verde chiaro; il che deggio attribuire alla reſina.

Che la calce di ſtagno nella canna era ſtata quaſi tutta ridotta in metallo.

Che il gaz era infiammabile con fiamma azzurra, facendo una forte detonazione (7), e così nocivo alla reſpirazione animale, che un paſſero introdotto vi morì in pochi ſecondi, ſenza che mi ſia riuſcito di richiamarlo a vita col ſoccorſo dell' alkali *fluor*.

Che una candela introdotta dopo averne infiammata la ſuperficie ſi ſpegneva immediatamente, ſe più oltre veniva abbaſſata.

Sperienza VII.

14. In un apparecchio ſimile a quello delle precedenti ſperienze ripoſi un' oncia di calce di ſtagno, e parte uguale di carbon peſto. La ſoluzione dell' oro attraverſata dal gaz fu precipitata in color paonazzo circa un' ora dopo.

La calce è ſtata intieramente ridotta: il gaz s' infiammava con forte detonazione: la ſua fiamma era piuttoſto oſcura.

Era egli più nocivo dell' altro, cioè mortale alla reſpirazione animale, poichè in minor tempo ancora vi morì un paſſero introdotto.

Sperienza VIII.

15. Ripoſi di nuovo un' oncia di calce di ſtagno, ed egual miſura di ſal nitro nella canna da fucile collo ſteſſo apparecchio. Sviluppoſſi una gran quantità di gaz; ed attraverſando eſſo la ſoluzione d' oro, queſta diventò da principio di color lattiginoſo, ed opaca,

---

(7) In queſta ſperienza, come nelle ſuſſeguenti, quando trattavaſi d' infiammare il gaz, io lo verſava dentro ad un vaſo di vetro con bocca ſtretta. In tal guiſa vi ſi meſcolava dell' aria atmoſferica, ſenza la quale non ſi ottiene nè infiammazione, nè detonazione.

ma poi preſe una tinta porpora chiara, e precipitò in fondo del vaſo una polvere di color lillà; la calce fu ridotta in metallo.

Il gaz raccolto mi ſorpreſe per la ſua natura; non era altramente infiammabile; non era gaz nitroſo; non era aria deflogiſticata, come potrebbe conghietturarſi, ma era gaz mefitico. Una candela che vi s'introduſſe fu più volte ſpenta; un paſſero cadde in asfiſſia, ma non morì,

16. Non devo tacere, che in tutte queſte ſperienze, ceſſato lo ſviluppamento del gaz, comincia l'aſſorbimento; che perciò quando ſi oſſerva il liquore del tubo aſcendere, conviene disfare l' apparecchio, ſe non ſi vuole che il liquore in eſperimento venga ad eſſere aſſorto nella canna; il che alcune volte m' è accaduto.

17. Provano ſiffatte ſperienze, che la calce di ſtagno nella ſua riduzione colle ſoſtanze flogiſtiche laſcia sfuggire le parti più volatili, le quali in un colla ſoſtanza gazoſa vengono ſollevate, come le ſoluzioni d' oro precipitate in porpora ne fanno teſtimonianza.

18. Penſano generalmente i Chimici moderni eſſere dovuto all' aria il maggior peſo, che acquiſtano i metalli quando vengono calcinati; ma la diminuzione del peſo, che ſoffrono le calci metalliche nella riduzione, non è del ſolo eccedente acquiſtato, ma eziandio di una porzione del peſo proprio (8). Quindi è che per iſpiegare queſto fenomeno ſi pretende che la perdita ſi faccia inſieme con le materie flogiſtiche.

Ma

---

(8) La calce di piombo perde nella riduzione $\frac{1}{7}$ circa del ſuo peſo; e quella dello ſtagno ne perde circa $\frac{1}{10}$; così che ſe molte volte ſi faceſſe la traſmutazione di calce in metallo, e di metallo in calce, verrebbe interamente a ſvanire la ſoſtanza ſperimentata. Tale almeno è il mio ſoſpetto; ma le mie ſperienze, che vo ad intraprendere ſopra queſte calcinazioni, e riduzioni, daranno luogo alla verità indubitatamente.

Ma le mie ſperienze provano chiaramente, che quel di più è la ſoſtanza metallica la più volatile, sfuggita con l' emanazione gazoſa.

19. Riflettendo ſopra i riſultamenti di queſte ſperienze, ſono entrato in penſiero, che la diſparità de' ſentimenti de' Chimici ſopra queſte arie fattizie poteſſe provenire dall' apparecchio adoperato ſinora, cioè da quello che ſi denomina apparecchio pneumato-chimico immaginato dal Sig. *Prieſtley*, indi perfezionato dal Sig. *Sigaud de la Fond*; poichè con tale apparecchio molte delle ſoſtanze gazoſe attraverſando l' acqua depongono in quella alcune quaſi inviſibili particelle, e forſe anche alcune altre ſi caricano di un principio umido, per il che più non ſono nello ſtato di purezza, o d' aggregazione, come emanano immediatamente dai corpi componenti. E per dare una convincente prova delle mie conghietture rapporterò, oltre alle già recate, due ſperienze, che pajono deciſive a queſto propoſito.

SPERIENZA IX.

20. L' apparecchio fu lo ſteſſo che quello adoperato nella Sperienza prima (veggaſi la *fig. I*). Ripoſi nel matraccio del ſale di tartaro, ſaturandolo con l' olio di vitriolo. Il gaz ſviluppatoſi paſſava per quattro caraffe prima di gettarſi nella veſcica adattata all' ultima caraffa. Conteneva la prima acqua diſtillata; la ſeconda acqua di calce; la terza era ripiena di fiori naturali di ciano, di roſe, e di viole gialle murali; l' ultima era ripiena di ſoluzione di tornaſole.

Oſſervai, che la tintura di tornaſole divenne roſſiccia; che l' acqua di calce precipitò; che i fiori alterarono colore (9); e finalmente che il gaz mefitico diè luogo a tutti i fenomeni deſcritti da' Chimici moderni.

La caraffa dell' acqua diſtillata non offerſe variazione alcuna; ma feci ch' ella foſſe ſempre la prima nell' apparecchio in molte ſperienze, che intrapreſi, sì che per ben otto volte fu occupata dal gaz mefitico.

Decantata pertanto queſt' acqua dopo di averla fatta alquanto ſvaporare, e laſciatala quindi tranquilla, con grande mia ſoddisfazione vidi formarſi nel fondo del vaſe che la conteneva un precipitato, che riconobbi eſſere un vero tartaro vitriolato.

SPERIENZA X.

21. Coll' apparecchio ſimile al precedente ripoſi nel matraccio due oncie di limatura di ferro, ſaturandola con l' olio di vitriolo. La prima caraffa, per cui paſſava il gaz ſviluppato, era ripiena d' acqua diſtilla-

---

(9) L'alterazione de' colori ne' fiori, e ſpecialmente nelle roſe oſſervata da *Prieſtley* qualora vengono eſpoſte al vapore del gaz ottenuto dalla fermentazione della birra, è ugualmente ſenſibile, ſe ſi facciano attraverſare dal gaz ottenuto sì dal ſale di tartaro, che dalle pietre calcaree per mezzo dell' olio di vitriolo; ed ho oſſervato, che il calore delle roſe divien più intenſo ſingolarmente alle eſtremità de' petali; che i fiori violacei divengono roſſeggianti, e che i gialli non ſoffrono cangiamento veruno. In ſomma ho oſſervato que' cangiamenti ſteſſi, che il vapore del zolfo ha prodotto ſopra di eſſi, e che ho deſcritto nelle *Memorie della Real Soc. di Torino* (Tom. V. pag. 31), ove conchiuſi che queſte mutazioni erano dovute all' acido ſprigionato dal zolfo. Nè per altra ragione ſuccede l' alterazione di colore ne' fiori ſottopoſti all' azione de' diverſi gaz. Ho ſempre preferito nel far eſperimento ſull' acidità de' diverſi gaz di mettere de' fiori di ciano, od altri fiori violacei invece della tintura di tornaſole; avendo riconoſciuto eſſer eſſi più di queſta ſenſibili, e pronti ad alterare il loro colore.

In tutte le ſperienze fatte ſopra i fiori attraverſati dal gaz ho oſſervato il fenomeno deſcritto nella nota n. 3. della Sperienza 3, cioè che il gaz forma una corrente nel vaſe, e che i fiori, che non vi ſono involti, non reſtano viſibilmente colorati.

Fig. II

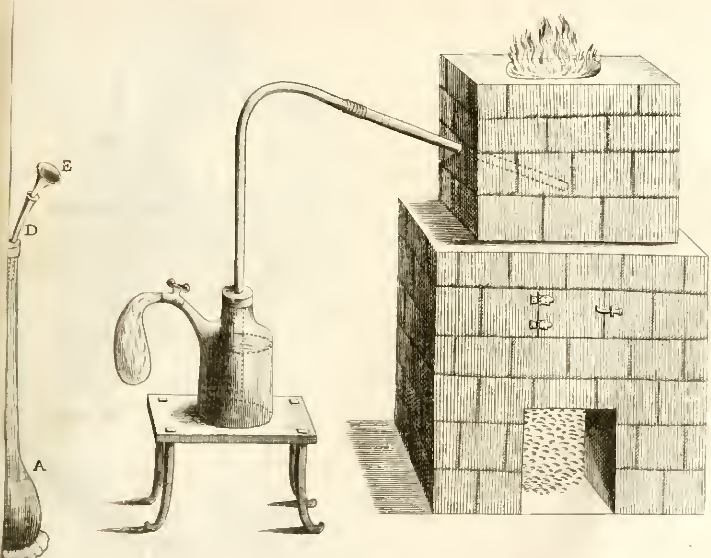


Fig. I

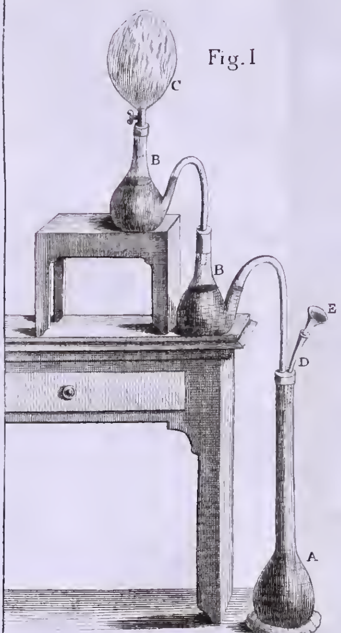
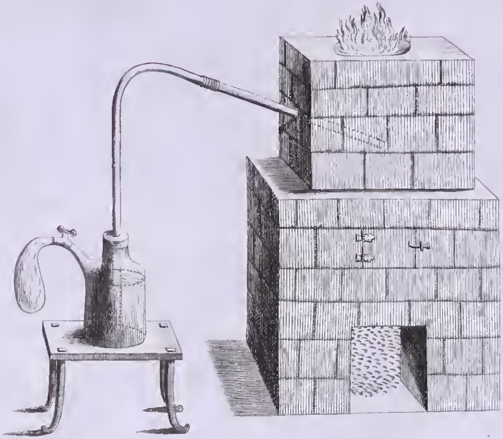


Fig. II



ta; la ſeconda, terza, e quarta contenevano le ſteſſe ſoſtanze della precedente ſperienza.

Ho riconoſciuto ſu tutte, e riſcontrato le medeſime azioni del gaz infiammabile, che ci vengono deſcritte dagli Autori.

La caraffa de' fiori, che non conteneva ſe non ſe roſe, offerſe un fatto molto curioſo (10). Conſervai, come nella precedente ſperienza, la caraffa dell' acqua diſtillata, la quale mi ſervì coſtantemente in molte ſperienze, valendomene anche col gaz infiammabile eſtratto dal ferro. Eſaminata poſcia queſt' acqua, riconobbi diſtintamente eſſervisi formato nel fondo un precipitato, il quale era un vero vitriolo marziale; e alla ſuperficie dell' acqua oſſervai una leggera intonacatura d' ocra alle pareti del vaſe.

Feci pure cimento di ſoſtituire all' acqua diſtillata della prima caraffa una ſoluzione di galla, ed oſſervai che queſta diventava paonazza, e nericcia ſe più d' una volta la faceva attraverſare dal gaz infiammabile.

---

(10) Queſte roſe divennero d' un color paonazzo più intenſo, che nella precedente ſperienza, ſpecialmente all' eſtremità de' petali, il che fa conghietturare, che queſto gaz contenga una maggior quantità di acido; ciò però che mi riuſcì ſorprendente, ſi è, che queſte roſe non avendo più il loro odore naturale, preſero un odore fragrantiſſimo, come quello dell' etere vitriolico, nel quale ſi ſentiva per altro un odore sfumato di roſe, che rendeva ancor più grato l' odore fatticcio, che avevano preſo.

DELLE VIBRAZIONI SONORE

DEI CILINDRI.

Del Sig. CONTE GIORDANO RICCATI.

I. DI parecchi cilindri di metallo, o di creta ſi formano certi ſtrumenti, che rieſcono grati all' orecchio. Di tali corpi mia intenzione ſi è l' indagare le oſcillazioni, le quali, come vedremo, vengono regolate da leggi diverſiſſime da quelle delle corde cilindriche. Quantunque io abbia preſo l' eſſenzial di queſta ſoluzione dall' Appendice ſopra le curve elaſtiche aggiunta dal dottiſſimo Sig *Leonardo Eulero* alla ſua profonda Opera *Methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes*; nulladimeno non iſdegnino di leggerla i Matematici, sì perchè ho procurato di riſchiarare la materia per sè ſteſſa oſcuriſſima, sì perchè m'è riuſcito di farci per entro qualche non diſpregevole ſcoperta, e di notare altresì alcun picciolo neo, che anderò opportunamente ſegnando, nelle ſpeculazioni per altro ſublimi del chiariſſimo Autore.

Se nulla diſtendendoſi le lunghezze inferiori di due cilindri, s' allungano ſolamente le ſuperiori, o a roveſcio, e ciò per opera di due forze minime uguali normali alle baſi dei cilindri, ed applicate a' punti analoghi de' loro diametri ſituati ne' piani, in cui giacciono le mentovate oppoſte lunghezze, gli allungamenti corriſpondenti a' punti analoghi de' diametri ſteſſi ſtanno in ragione compoſta, diretta delle lunghezze de' cilindri, ed inverſa della rigidità della materia, onde ſono formati, e delle loro baſi, o ſia dei quadrati de' loro diametri.

II. Ci ſieno (*fig.* 1.) due cilindri *OV*, *ov*, i quali ſi trovino in tali circoſtanze, che nulla dilatandoſi le lunghezze inferiori *VM*, *vm*, ſi diſtendano a grado a grado le ſuperiori, dimodochè gli allungamenti s' eguaglino alle ordinate dei triangoli *MOL*, *mol*. Si fingano totalmente infleſſibili le loro baſi *MGOI*, *mgoi*, e ſuppongaſi, che i mentovati allungamenti ſieno cagionati da due forze infiniteſime uguali applicate con direzione normale alle dette baſi, per eſempio all' eſtremità *O*, *o* dei diametri *MO*, *mo* collocati ne' piani *VL*, *vl*: dico che le diſtenſioni *OL*, *ol* corriſpondenti ai punti analoghi *O*, *o* ſerbano la proporzione compoſta, diretta delle lunghezze *SO*, *so* dei cilindri, e reciproca della rigidità della materia, onde conſtano, e dei quadrati dei loro diametri.

Si ſegnino prima le linee finite *MP*, *mp*, indi le infiniteſime *PR*, *pr* proporzionali ai diametri *MO*, *mo*, e ſi tirino parallele alle lunghezze *VM*, *vm* le linee *KZ*, *NX*; *kz*, *nx*. Per tali coppie di linee paſſino dei piani normali ai piani *VL*, *vl*, e queſti ſegneranno due parallelepipedi, le cui lunghezze *KP*, *kp*, e le baſi *GH*, *gh*. Eſſendo $MO : MP :: mo : mp$, $MO : MP :: OL : PZ$, $mo : mp :: ol : pz$, ſi verifica parimente l' analogia

$OL : PZ :: ol : pz$, la quale c' inſegna, che gli allungamenti dei due cilindri in ſiti analoghi abbracciano la medeſima proporzione. Vengano le diſtenſioni PZ, pz direttamente effettuate nei ſolidi KR, kr da due forze minime uguali. Ho dimoſtrato nella mia Opera *Delle Corde, ovvero Fibre elaſtiche* al numero IV. dello Schediaſma I, che gli allungamenti prodotti da forze infiniteſime pari in due corde elaſtiche, che non ſien teſe, ſtanno come le loro lunghezze diviſe pel prodotto della rigidità della materia, onde ſono compoſte, nelle loro baſi: e le dimoſtrazioni ivi addotte, che non ripeto preſentemente, s'adattano interamente ai parallelepipedi KR, kr. Per la qual coſa le diſtenſioni PZ, pz ſerberanno la nominata relazione: ma le baſi GH, gh, che ſono porzioni ſimili delle baſi circolari dei cilindri, ſi riferiſcono nella ragione dei quadrati de' diametri MO, mo; dunque le diſtenſioni PZ, pz dei ſolidi KR, kr, ed altresì quelle di tutte l' altre coppie di ſolidi fondati ſu baſi ſimili, e ſimilmente ſituati, che in pari numero compongono i noſtri cilindri, accettano la proporzione delle lunghezze VM, vm diviſe pel prodotto della rigidità della materia nel quadrato dei diametri de' cilindri. Si cavi la conſeguenza, che in qualunque pajo di parallelepipedi collocati in ſiti analoghi gli allungamenti, che ſi riguardano nella mentovata ragione, ſono cagionati da forze uguali.

Si reſtituiſcano ora i cilindri per gli ſpazietti LQ, lq parti infiniteſime ſimili degli ſpazj OL, ol, ed agevole riuſcirà la rifleſſione, eſſere $OL : PZ :: QL : YZ :: ol : pz :: ql : yz$, e che perciò gli ſpazietti analoghi QL, ql; YZ, yz ſi riferiſcono nella ſtabilita ragione, nella quale altresì ſi riguarderanno le reazioni menomiſſime delle forze a coppia a coppia eguali applicate ai punti analoghi Z, z; L, l ecc. Lo ſteſſo rapporto parimente accetteranno gli aggregati di queſte reazioni. Se tolte di mezzo tali forze infinite di numero, io voglio collocare nei ſiti L, l due forze equipollenti per le direzioni OL, ol, egli è d'uopo, che alla ſomma delle reazioni delle forze levate s'eguagli l'unica reazione della forza ſoſtituita. Quindi le reazioni delle due forze ſurrogate dovranno ſtare come $QL : ql$; ma le dette forze reagiſcono per gli ſpazj QL, ql; dunque le reazioni ſono come gli ſpazj, per cui reſiſtono le due forze, il che non può verificarſi ſenon nel caſo, che ſieno uguali eſſe forze. Se due forze uguali pertanto normali alle baſi dei cilindri OV, ov, ed applicate ai punti analoghi O, o dei diametri MO, mo ſituati nei piani VL, vl fanno equilibrio colla forza elaſtica dei cilindri ſteſſi, le corriſpondenti diſtenſioni OL, ol devono ſerbare la ragione compoſta, diretta delle lunghezze SO, so dei cilindri, ed inverſa della rigidità della materia, di cui ſono formati, e dei quadrati de' loro diametri.

Determinare la forza, la quale, ſupponendoſi applicata per una data direzione in un ſito determinato, ſia equipollente alla forza elaſtica d'una menoma porzione di cilindro infinitamente poco incurvato.

III. Sia $AVMF$ (Fig. 2.) la curva di menoma piegatura, a cui vibrandoſi ſi ſia adattato un cilindro, ed AC, CM ſieno le coordinate l'una all'altra normali. La lunghezza pochiſſimo incurvata MV della porzione elementare LV del detto cilindro venga combaciata dal circolo MV deſcritto col raggio infinitamente lungo DM. Alla linea DVS pel punto M conduco parallela la retta MO. Potendoſi ſupporre, che nel ripiegarſi la lunghezza inferiore MV del mentovato cilindretto non abbia ricevuta alterazione, ſi farà egli ſuperiormente dilatato per OL.

Fingaſi collocata in A una forza equipollente a tutte quelle, che come vedremo ſono parallele alle ordinate MC, le quali fanno equilibrio col cilindretto LV. S' io riſolverò queſta forza in due, una parallela, e l' altra normale alla direzione MV d' eſſo cilindro, troverò la prima minima riſpettivamente alla ſeconda; perchè diſcoſtandoſi infinitamente poco la curva $AVMF$ dalla linea retta AB, la direzione della forza, che ſi riſolve, è preſſochè perpendicolare alla linea MV. La forza menomiſſima parallela ad MV allunga tutto il cilindretto LV egualmente, e la normale riſpettivamente infinita ripiega il detto cilindro, e cagiona le diſtenſioni eſpreſſe dalle ordinate del triangolo MOL. Ecco adunque, che traſcurando l' allungamento comune a tutto il cilindro, ſiccome operato da una forza adequatamente uguale a nulla, mi è conceſſo il ſupporre, che la lunghezza inferiore MV ritenga la ſua naturale miſura.

Chiamo la lunghezza del cilindro $MV = ds$, il raggio oſculatore $DM = R$, il diametro di eſſo cilindro $ML = D$, la rigidità della materia, che lo compone, $= r$. La ſimilitudine dei triangoli DMV, MLO mi ſomminiſtra l' analogia

$$DM : MV :: ML : LO$$

$$R : ds :: D : \frac{Dds}{R},$$ da cui ſi ricava $LO = Dds : R$.

Una forza coſtante $= 1$, che agiſſe per la direzione OL, allungherebbe il cilindro, come ho dimoſtrato al numero II. per lo ſpazio proporzionale a $ds : rD^2$, il quale ſta in ragione compoſta, diretta della lunghezza del cilindro, ed inverſa del quadrato del diametro, o ſia della baſe del cilindro, e della rigidità della materia, della qual è formato. Eſſendo pertanto nello ſteſſo cilindro le diſtenſioni come le forze minime, che le cagionano; ſe l' allungamento come $ds : rD^2$ è prodotto dalla forza $= 1$, ne ſegue, che per ottenere la dilatazione $LO = Dds : R$ ci vorrà la forza proporzionale a $D^3 r : R$.

Si reſtituiſca il noſtro cilindro per lo ſpazio LQ porzione inaſſegnabile dello ſpazio LO, ed il raggio oſculatore MD s'allunghi, e divenga uguale ad $MG = R + dR$; troveremo la linea $QO = \frac{Dds.}{R+dR}$, la quale ſottratta da $LO = Dds : R$, ci dà $LQ = DdRds : R^2$. Quindi la reazione della forza proporzionale a $D^3 r : R$, che per lo ſpazio LQ ſi conſerva coſtante, ſtarà come $D^4 rdRds : R^3$. Taglio $MT = 1 : R$, e pel punto T conduco TR parallela ad LQ. Dalla ſimiglianza dei triangoletti MLQ, MTR deduco l' analogia

$$ML : LQ :: MT : TR$$

$$D : \frac{DdRds}{R^2} :: \frac{1}{R} : \frac{dRds}{R^3}$$

, che mi addita il valore di $TR = dRds : R^3$. Voglia collocarſi in T colla direzione RT una forza equipollente a quella, che s'è applicata in L, e che per conſeguenza faccia equilibrio coll' elaſticità del cilindro LV. Se le due forze in L, ed in T hanno ad eſſere equipollenti, le loro reazioni per gli ſpazj LQ, TR debbono eſſere uguali. S' inferiſca, che diviſa la reazione della prima forza, proporzionale a $D^4 rdRds : R^3$ per lo ſpazietto $TR = dRds : R^5$, per cui reagiſce la ſeconda, ne proverrà la grandezza della forza ſteſſa applicata nel ſito T proporzionale a $D^4 r$, cioè a dire in ragione compoſta del quadrato-quadrato del diametro del cilindro, che ſi vibra, e della rigidità della materia, della qual è formato.

Sia M la maſſa di tutto il cilindro, L la ſua lunghezza, g la ſua gravità ſpecifica, o denſità, e la quantità $M : gL$ eſprimerà la baſe del cilindro, la quale ſerba la ragione del quadrato D^2 del diametro. Soſtituendo in vece di D^4 la grandezza proporzionale $M^2 : g^2 L^2$ troveremo ſtare come $M^2 r : g^2 L^2$ quella forza applicata alla diſtanza $MT = 1 : R$, che forma equilibrio coll' elaſticità del cilindretto LV, la cui minima curvatura $= 1 : R$. Nominata E la detta forza, avremo $KrM^2 : g^2 L^2 = E$, ed il coefficiente K ſarà coſtante in tutti i cilindri.

IV. Se col metodo da me tenuto riſpettivamente ai cilindri aveſſi cercato il valore della forza *E* nelle lamine elaſtiche, mi ſarebbe riuſcito di trovarlo in ragione compoſta della rigidità della materia,. della larghezza della lamina, e del cubo della ſua groſſezza. Alla forza *E* il Signor *Eulero* dà il titolo di elaſticità aſſoluta della lamina, e ſenza dimoſtrarlo, l'aſſeriſce proporzionale al prodotto della rigidità della materia, della larghezza della lamina, e del quadrato della groſſezza. Queſto sbaglio influiſce nella legge dei tempi delle vibrazioni delle lamine elaſtiche determinata dal noſtro Autore, la quale non corriſponde ai fenomeni, ſalvochè nella circoſtanza, che le diverſe lamine ſieno di pari groſſezza.

Trovare col mezzo degli eſperimenti il valore della forza E.

V. Alla muraglia perpendicolare *BK* ſia immobilmente raccomandato il cilindro *AVMF*, il quale prima di eſſere incurvato teneva la poſitura *HF* a ſquadra della linea *FB*. Avverto, che la retta *HF* tocca la curva *AVMF* nel punto *F*. Una forza *P* applicata al punto eſtremo *A* con direzione ſempre parallela ad *FB* abbia ripiegato il cilindro nella curva *AVMF*, e formi con eſſo equilibrio, e con tutti i ſuoi elementi. Pel punto *A* ſi tiri *AB* parallela ad *HF*, e dal punto *M* ſi laſci cadere l' ordinata *MC* normale ad *AB*. Si tagli $ME = AC$, e ſi conduca la diagonale *AM*. Chiamo $AB = a$, $BF = b$, $AC = x$, $CM = y$; e giacchè il cilindretto *LV* ſta in equilibrio colla forza *P*, ſe ſupporremo, che invariata rimanga la curvatura del reſto del cilindro, e che ſolamente l' elaſticità del cilindretto *LV* eſerciti una menoma azione, a queſta dovrà eſſer uguale la reazione della forza *P*. In cambio dell' elaſticità del cilindro *LV* io poſſo ſoſtituire la forza equivalente *E* applicata in *T*, ovvero in *R*, la quale agiſca per lo ſpazietto RT. Il punto R della linea MR deſcriverà l' archetto RT, ed i raggi $MI = ME$, ed MA ſegneranno gli archi IE, AZ ſimili all' RT. Dal punto Z ſi cali ZN normale ad AB. Eſſendo la direzione della forza P perpendicolare ad AB, reagiſce per lo ſpazio NZ, mentre la forza E agiſce per lo ſpazio RT. Avremo dunque per le leggi dell' equilibrio $P.NZ = E.RT$. I triangoli ſimili MAC, AZN m' inſegnano eſſere $MA:AZ::AC:NZ$; ma per la ſimiglianza dei ſettori MAZ, MIE, $MA:AZ::MI:IE$; dunque $AC:NZ::MI:IE$; e giacchè per la coſtruzione $AC = MI = x$, ſarà parimente $NZ = IE$. Avremo pertanto $P.IE = E.RT$, e ſurrogando in luogo degli archetti IE, RT i raggi proporzionali $MI = AC = x$, $MR = 1:R$, $Px = E:R$.

VI. Chiamano i Meccanici la quantità Px il momento della forza P riſpettivamente al punto M, e dovendo queſta far equilibrio coll' elaſticità del cilindro, il cui momento $E:R$, ſtabiliſcono l' equazione $Px = E:R$. Ho ſtimato opportuna coſa riſchiarar la materia, deducendo la noſtra formola dall' eguaglianza delle azioni menomiſſime, che mutuamente s' impediſcono, nella quale conſiſte il vero fondamento dell' equilibrio. Fa vedere il progreſſo del mio raziocinio, che le grandezze Px, $E:R$ ſono proporzionali alle azioni eguali, e contrarie, l' una delle quali ſerve all' altra d' impedimento, della forza P, e dell' elaſticità del cilindro LV. Quindi ſiccome rettamente ſi nomina Px il momento della forza P, così $E:R$ ſi dee appellare il momento della forza elaſtica del cilindretto LV, la cui curvatura $1:R$, e per queſta parola momento altro non ſi dee intendere, ſalvochè le mentovate virtuali infiniteſime azioni uguali, e contrarie, o quantità ad eſſe proporzionali.

VII. Dopo queſta forſe non inutile digreſſione torno in ſentiero, e ripigliata per mano l' equazione Px

$= E:R$, oſſervo che preſo ſiccome coſtante l' elemento dx dell' aſſiſſa, abbiamo il raggio oſculatore $R = \frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{(dx^2+dy^2)^{3:2}}{-dxddy}$. Ponendo in opera un tal valore, trovo $Px = \frac{-Edxddy}{(dx^2+dy^2)^{3:2}}$, o ſia $Pxdx = \frac{-Edx^2ddy}{(dx^2+dy^2)^{3:2}}$, formola, che riceve la ſeguente integrazione $P.(\frac{1}{2}x^2+f) = \frac{-Edy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, la quale maneggiata mi dà $dy = \frac{-Pdx.(\frac{1}{2}x^2+f)}{\sqrt{(E^2-P^2.(\frac{1}{2}x^2+f)^2)}}$. Si determina la coſtante f riflettendo, che nel ſito F la tangente HF è parallela all' aſſiſſa AB; laonde $dy:dx=0$, e perciò $\frac{1}{2}x^2+f=0$, ovvero $f=-\frac{1}{2}x^2$: ma in queſto caſo $x=AB=a$; dunque $f=-\frac{1}{2}a^2$. Fatto uſo di queſto valore, ed adempiuti i neceſſarj calcoli, ci ſi preſenterà $dy = \frac{(a^2-x^2).dx}{\sqrt{(4E^2:P^2-a^4+2a^2x^2-x^4)}}$.

S' adatti all' eſtremità A del cilindro $AVMF$ una forza, o peſo P aſſai picciolo riſpettivamente alla forza E, dimodochè il cilindro ſteſſo ſi ripieghi per una ſaetta FB fiſicamente menoma, ma che per altro poſſa accuratamente miſurarſi. In sì fatta ipoteſi la quantità $4E^2:P^2$ ſarà talmente grande, che ſi potrà in riguardo alla pratica traſcurare la grandezza $-a^4+2a^2x^2-x^4$. Avremo pertanto $dy = \frac{(a^2-x^2)dx}{2E:P}$, ed integrando $y = \frac{P.(a^2x-\frac{1}{3}x^3)}{2E}$: ma quando $x=a$, $y=b$; dunque $b=Pa^3:3E$, e finalmente $E=Pa^3:3b$, valore della forza E, che non ſi diſcoſterà dal vero ſenſibilmente, purchè la curvatura del cilindro ſia piccioliſſima.

VIII. Avendo dimoſtrato eſſere E come rD^4, ſtarà per conſeguenza rD^4 come $Pa^3 : 3b$, ed r come $Pa^3 : 3bD^4 = E : D^4$. Col mezzo adunque della premeſſa eſperienza ſi può ſcoprire la proporzione fra le rigidità delle materie, onde ſono compoſti i cilindri. Stabilirò in progreſſo al numero XXV un altro canone ugualmente ſemplice che ſerve a determinare la detta proporzione.

IX. Nella formola $dy = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{\sqrt{4E^2 : P^2 - a^4 + 2a^2x - x^4)}}$ ſi faccia $2E : P = c^2 - a^2$, e conſeguentemente $4E^2 : P^2 = c^4 - 2c^2a^2 + a^4$. Supponendoſi $2E : P$ una quantità aſſai grande riſpettivamente ad x, e ad a, ſarà parimente tale la quantità c, come agevolmente raccoglieſi dall' equazione aſſunta $2E : P = c^2 - a^2$. Soſtituito in cambio di $2E : P$ il ſuo valore, troveremo $dy = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{\sqrt{(c^4 - 2c^2a^2 + 2a^2x^2 - x^4)}}$. Se nel denominatore io traſcuro i ſoli due termini $2a^2x^2 - x^4$, la cui ſomma è ſiſicamente nulla non ſolo in riguardo a c^4, ma ancora per rapporto a $-2c^2a^2$, mi ſi preſenta la formula $dy = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{\sqrt{(c^4 - 2c^2a^2)}}$, che s' adegua alla ſeguente $dy = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{c^2 - a^2} = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{2E : P}$, da cui ricavo $E = Pa^3 : 3b$.

Ma s' io traſando altresì il termine $-2c^2a^2$, ho l' equazione $dy = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{c^2}$, la quale integrata mi dà $y = \frac{a^2x - \frac{1}{3}x^3}{c^2}$. Corriſpondendo $y = b$ ad $x = a$, troveremo $b = 2a^3 : 3c^2$, e ponendo in luogo di c^2 il ſuo valore $2E:P+a^2$, $3b=\frac{2a^3}{2E:P+a^2}$. Dal maneggio di queſta formola ſi ricava $E=\frac{Pa^2.(2a-3b)}{6b}$. Il Signor *Eulero* aſſegna alla forza E un tal valore, il quale è meno ſemplice, e meno eſatto di quello, che da me è ſtato determinato.

Determinare l' equazione della curva, a cui s' adatta un cilindro, che ſi vibra.

X. Tenga il cilindro prima di vibrarſi la poſitura rettilinea ACB (*fig. 3*), e meſſo poſcia in oſcillazione s'adatti alla curva $aEcFb$, la quale ſi diſcoſti dalla linea retta ACB per minimi ſpazj. Sia la lunghezza del cilindro acb, ovvero $ACB=L$, la ſua maſſa $=M$, il raggio oſculatore in $M=R$, il momento dell' elaſticità del cilindro nel ſito medeſimo $=E:R$. Si chiami inoltre $Aa=b$, $AP=aM=x$, $PM=y$. Effettuando il noſtro cilindro nel tempo ſteſſo le ſue menome vibrazioni più, o meno eſteſe, dee neceſſariamente oſcillare colla legge di un pendolo a cicloide. Sia f la lunghezza del pendolo ſemplice iſocrono, e giacchè queſto, mentre gli reſta da ſcorrere lo ſpazio $MP=y$, viene animato dalla forza acceleratrice $y:f$, tale farà altresì la forza acceleratrice del cilindro nel ſito M. La maſſa d' un elemento d' eſſo cilindro, la cui lunghezza dx s' eguaglia ad $Mdx:L$, la quale moltiplicata per $y:f$, mi dà la forza ſollecitante il detto elemento collocato in $M=Mydx:Lf$. Il cilindro dopo compiuta un' oſcillazione ſi trovi nella poſitura $aEcFb$, e ſe in tale iſtante a tutti i punti d' eſſo cilindro s' applicheranno le convenienti forze $Mydx:Lf$ con direzioni contrarie, per eſempio MH, mh, a quelle delle forze ſollecitanti, non ſeguirà più moto, ed il cilindro ſi fermerà in equilibrio. Le forze applicate alla curva aM ſtanno in equilibrio colla forza elaſtica del cilindro in M: ed in fatti ſe queſta ſi minoraſſe, tutte le dette forze ſi porrebbero in azione. Quindi l' aggregato dei momenti delle mentovate forze dee pareggiare il momento $E:R$ della forza elaſtica nel ſito M.

Nomino p la ſomma delle forze applicate alla curva am, e dp per conſeguenza ſarà la forza, che tira l' elemento mu per la direzione mb. Il momento di eſſa forza riſpettivamente al punto M, mettendo $Ap=q$, s'eguaglia ad $(x-q).dp$. Per trovare la ſomma deſiderata dei momenti delle noſtre forze in riguardo al punto M, ſi conſiderino per poco il detto punto, e l' aſſiſſa $AP=x$ come coſtanti, prendendo $Ap=q$ in qualità di variabile. Avremo pertanto l' aggregato dei momenti riſpettivamente al punto M delle forze applicate alla porzione di curva am $=xp-\int qdp$: ma $\int qdp=qp-Spdq$; dunque la mentovata ſomma $=xp-qp+\int pdq$. Giunga il punto m in M, e diverrà $q=x$, $dq=dx$. Soſtituiti queſti valori, troveremo la ſomma dei momenti per rapporto al punto M di tutte le forze applicate alla parte di cilindro $aM=Spdx$. Ora dovendoſi un tale aggregato eguagliare al momento $E:R$ dell' elaſticità del cilindro nel ſito M, ſiam pervenuti all' equazione $E:R=Spdx$, e ſurrogando in vece di p l' eguale grandezza $\int\frac{Mydx}{Lf}$, $E:R=\int\left(dx\int\frac{Mydx}{Lf}\right.$. Nel caſo preſente, in cui la fluſſione coſtante dx dell' aſſiſſa s' adegua all' elemento ds della curva, ſi verifica eſſere $R=dx^2:ddy$, e perciò avremo $Eddy:dx^2=\int\left(dx\int\frac{Mydx}{Lf}\right)$. Prendo le differenze, e trovo $Ed^3y:dx^2=dx\int Mydx:Lf$, e nuovamente differenziando $Ed^4y = Mydx^4 : Lf$, equazione alla curva cercata $aEcFb$.

XI. La ſomma dei momenti riſpettivamente al punto M delle forze applicate al rimanente del cilindro $MEcFb$ eſſer dee uguale, e contraria alla ſomma dei momenti delle forze applicate alla porzione aM, e l' una e l' altra di queſte ſomme dee pareggiare il momento dell' elaſticità $= \dot{E} : R$ del cilindro nel ſito M. Così l' elemento di cilindro collocato in M ſta in equilibrio, eſſendo preſo in mezzo da due aggregati di momenti eguali, e contrarj. Se aveſſi conſiderati i momenti delle forze applicate alla parte $MEcFb$ del cilindro, fatta la rifleſſione eſſere $BP = L - x$, ed il ſuo incremento $= -dx$, avrei ſcoperto $Eddy : dx^2$ $= \int\left(-dx \int - \frac{Mydx}{Lf}\right)$, eſpreſſione, che ci guida alla formula teſtè trovata $Edy = Mydx^4 : Lf$.

La premeſſa avvertenza me ne ſuggeriſce un' altra, cioè che la ſomma dei momenti riſpettivamente ai punti eſtremi a, b delle forze applicate a tutto il cilindro $aEcFb$ deve uguagliarſi a nulla, ſiccome quella, che ha da formar equilibrio coll' aggregato dei momenti delle forze applicate al reſiduo del cilindro, che ne' due mentovati caſi pareggia il nulla. Poſta dunque $x = 0$, o pure $x = AB = L$, avremo $E : R = Dddy : dx^2$ $= \int\left(\pm dx \int \pm \frac{Mydx}{Lf}\right) = 0$. Si cavi la conſeguenza eſſere nulla la curvatura $1 : R$ del cilindro nei ſiti a, b, e nullo parimente il momento della ſua elaſticità.

XII. Le forze MH uguali, e contrarie a quelle, che tentano di far reciprocare il cilindro, e ſpingono i ſuoi punti, per eſempio M, verſo la linea retta AB, debbono trattenere il cilindro ſteſſo nella poſitura $aEcFb$ totalmente immobile, ſenza che poſſa in eſſo ſeguire o moto progreſſivo per l' una, o l' altra direzione Cc,

cC, o moto di giramento intorno qualſivoglia punto. Queſt' ultimo movimento non ſuccederà, quando i momenti delle forze applicate a deſtra; e a ſiniſtra di qualunque punto M ſieno eguali, e contrarj, e che per conſeguenza facciano equilibrio. Non accaderà nè pure il moto progreſſivo, qualora s' adempia la condizione, che l' aggregato delle forze traenti il cilindro per la direzione cC pareggi quello, che il tira per la direzione contraria Cc. Abbiamo veduto, che la ſomma delle forze applicate alla porzione aM s' eguaglia ad $M:LF \int ydx$: ma $\int ydx$ dinota l' aja $auMPA$; dunque la nominata ſomma delle forze applicate alla parte di cilindro aM ſcelta ad arbitrio è ſempre proporzionale alla corriſpondente aja $auMPA$. Dovendo il cilindro eſſer ugualmente tirato per le due direzioni oppoſte cC, Cc, egli è d' uopo che l' aja poſitiva $aEA + bFB$ pareggi la negativa $EFcE$, dimodochè facendo $x = AB = L$, ſi trovi $\int ydx = 0$.

Oſſerveremo in progreſſo, che il cilindro AB ſi può oſcillando adattare ad infinite curve, la metà delle quali tagliano l' aſſe AB in un numero pari di punti, ed il rimanente in un numero impari. Le più ſemplici fra le dette curve ſi veggono eſpreſſe nelle figure 3, e 4. Pretende il Signor *Eulero*, che le curve del ſecondo genere non ſervano per le vibrazioni delle lamine elaſtiche; ma queſta ſua aſſerzione non è conforme alla verità, potendoſi anco riſpettivamente a tali curve determinare le coſtanti aggiunte nelle integrazioni, di maniera che ſieno eguali i momenti delle forze a deſtra, e a ſiniſtra d'un qualunque punto, e che di più ad $x = AB = L$ corriſponda $\int ydx = 0$. L' eſperienza favoriſce i miei penſamenti; imperciocchè ſoſtenendo in bilico una lamina con un dito, ed indi percuotendola, ſi ſente chiaro quel ſuono, che rende la lamina ſteſſa, mentre s' uniforma alla curva della figura 4, che non viene punto diſturbata dal dito, il quale tocca la lamina nel ſito immobile C. Il dito applicato in C ammortiſce la metà dei ſuoni della lamina, cioè a dire tutti quelli ch'eſſa produce, mentre s'adatta alle curve del primo genere, nelle quali tutte al punto C (*Fig.* 3, 5, 7 ecc.) ſi riferiſce la maſſima ordinata Cc.

Integrare l'equazione $\frac{ELfd^4y}{M} = ydx^4$, *e determinare i valori delle coſtanti aggiunte nelle integrazioni.*

XIII. Pongaſi $ELf : M = c^4$, onde s' abbia $c^4d^4y = ydx^4$. Il celebratiſſimo Sig. *Eulero nel Tomo VII. delle Miſcellanee di Berlino* ci ha inſegnata la generale integrazione di tali equazioni differenziali di alto grado. Col mezzo di queſto metodo ſi trova $y = Ae^{x:c} + Be^{-x:c} + C$ ſen. $x:c + D$ coſ. $x:c$ (1), in cui e dinota il numero, che ha per logaritmo l' unità nella logiſtica delle ſottotangente $= 1$. I logaritmi preſi nella ſuddetta logiſtica ſi chiamano naturali, o iperbolici; perchè ſi ſuole con eſſi eſprimere la quadratura dell' iperbola. Il lodato Autore nella ſua eccellente Introduzione all' Analiſi degl' infiniti ha computato il valore del numero e, che, preſa l' unità come protonumero, ſi ſuol nominare la baſe della logiſtica $= 2,7182818$. Ci ha dato parimente nello ſteſſo luogo la ſerie dei logaritmi iperbolici dall' 1 ſino al 10. Per i computi, che ſiam per fare, baſta il ſapere, che il numero 10 nelle tavole ha per logaritmo 1,0000000, e nella logiſtica iperbolica 2,3025851, e che nella ſteſſa proporzione ſi deggiono riferire i logaritmi dell' una e dell' altra logiſtica, che corriſpondono allo ſteſſo numero. Coll' ajuto dunque dei logaritmi delle tavole ſi potrà trovare il logaritmo iperbolico di qualunque numero. Nella ſovrappoſta formola ſen. $x:c$, e coſ. $x:c$ dinotano il ſeno, ed il coſeno dell' arco $x:c$ preſo nel circolo, il cui raggio $= 1$. A, B, C, D ſono quattro coſtanti introdotte nelle altrettante integrazioni, a cui è d' uopo aſſegnare i convenienti valori.

Si prendano nella noſtra equazione le prime, ed indi le ſeconde, le terze, e le quarte differenze, ed avvertendo eſſere diff. $e^{x:c} = 1:c\, e^{x:c}\, dx$, diff. ſen. $x:c = dx:c$ coſ. $x:c$, diff. coſ. $x:c = -\, dx:c$ ſen. $x:c$, troveremo

$$dy = \frac{A}{c} e^{x:c} dx - \frac{B}{c} e^{-x:c} dx + \frac{Cdx}{c} \text{coſ.} \frac{x}{c} - \frac{Ddx}{c} \text{ſen.} \frac{x}{c} \, (2)$$

$$ddy = \frac{A}{c^2} e^{x:c} dx^2 + \frac{B}{c^2} e^{-x:c} dx^2 - \frac{Cdx^2}{c^2} \text{ſen.} \frac{x}{c} - \frac{Ddx^2}{c^2} \text{coſ.} \frac{x}{c} \, (3)$$

$$d^3y = \frac{A}{c^3} e^{x:c} dx^3 - \frac{B}{c^3} e^{-x:c} dx^3 - \frac{Cdx^3}{c^3} \text{coſ.} \frac{x}{c} + \frac{Ddx^3}{c^3} \text{ſen.} \frac{x}{c} \, (4)$$

$$d^4y = \frac{A}{c^4} e^{x:c} dx^4 + \frac{B}{c^4} d^{-x:c} dx^4 + \frac{Cdx^4}{c^4} \text{ſen.} \frac{x}{c} + \frac{Ddx^4}{c^4} \text{coſ.} \frac{x}{c} \, (5)$$

Se nell' equazione (5) ſoſtituiremo y in cambio del ſuo valore $Ae^{x:c} + Be^{-x:c} + C$ ſen. $x:c + D$ coſ. $x:c$ ſomminiſtrato dall' equazione (1), torneremo a trovare la formola differenziale $d^4y = ydx^4 : c^4$.

Le cinque notate formule ci guidano alla determinazione delle coſtanti.

In primo luogo ad $x = 0$ dee corriſpondere $y = b$. Eſſendo in tal caſo $e^{x:c} = 1$, $e^{-x:c} = 1$, ſen. $x:c = 0$, coſ. $x:c = 1$, la prima equazione ſi trasforma così $b = A + B + D \, (6)$.

In ſecondo luogo m' inſegna il numero XI, che poſta $x = 0$, o pure $x = L$, deve uguagliarſi a nulla riſpettivamente ai punti eſtremi a, b la ſomma dei momenti delle forze applicate a tutto il cilindro $aEcFb$, onde s' abbia $Eddy:dx^2 = \int\left(\pm dx \int \pm Mydx:Lf\right) = 0$, ovvero ſoſtituendo c^4 in luogo di $ELf:M$, $c^4 ddy:dx^2 = \int\left(\pm dx \int \pm ydx\right) = 0$. Fatta pertanto nell' equazione (3) $ddy:dx^2 = 0$, e ponendo prima $x = 0$, indi $x = L$, troveremo

$0 = A + B - D \, (7)$

$$0 = Ae^{L:c} + B^{-L:c} - C\,\text{ſen.}\,L:c - D\,\text{coſ.}\,L:c\ (8).$$

In terzo luogo poſta $x = 0$, è parimente nulla l'aja $APMa = \int ydx$: ma come s' è ſtabilito al numero X $ELf : M . d^3y : dx^3 = c^4 d^3y : dx^3 = \int ydx$; dunque uguagliata a nulla nell' equazione (4) la grandezza $d^3y : dx^3$, e mettendo $x = 0$, ſi preſenterà

$$0 = A - B - C\ (9).$$

Finalmente al numero XII abbiamo ſtabilito, che ancor nell' ipoteſi di $x = L$ eſſer dee $\int ydx = 0$. Quindi ponendo nell' equazione (4) $d^3y : dx^3 = 0$, ed $x = L$, ſi ſcoprirà

$$0 = Ae^{L:c} - Be^{-L:c} - C\,\text{coſ.}\,L:c + D\,\text{ſen.}\,L:c\ (10).$$

Col mezzo delle cinque notate condizioni s' aſſegneranno i loro valori alle quantità coſtanti A, B, C, D, ed alla frazione $L:c$, la quale ſervirà poi per determinare la lunghezza f del pendolo ſemplice iſocrono al cilindro AB.

Le formole (7), e (9) mi danno $D = A + B$, $C = A - B$, valori che ſurrogati nelle formole (8), e (10) fanno loro prendere il ſeguente aſpetto

$$0 = Ae^{L:c} + Be^{-L:c} (-A+B) . \text{ſen.}\,L:c (-A-B) . \text{coſ.}\,L:c,$$

$$0 = Ae^{L:c} - Be^{-L:c} (-A+B) . \text{coſ.}\,L:c (+A+B) . \text{ſen.}\,L:c.$$

Si deduce da queſte

$$\frac{A}{B} = \frac{-e^{-L:c} - \text{ſen.}\,L:c + \text{coſ.}\,L:c}{e^{L:c} - \text{ſen.}\,L:c - \text{coſ.}\,L:c} = \frac{e^{-L:c} - \text{coſ.}\,L:c - \text{ſen.}\,L:c}{e^{L:c} - \text{coſ.}\,L:c + \text{ſen.}\,L:c} (11),$$

e dall' equazione (11)

$$0 = 2 - e^{L:c}\,\text{coſ.}\,L:c - e^{-L:c}\,\text{coſ.}\,L:c,$$ o ſia

$$e^{2L:c} - \frac{2e^{L:c}}{\text{coſ.}\,L.c} = -1.$$ Si ſuppliſca il quadrato, ed

eſtratta poſcia la radice ſi troverà

$$e^{L:c} = \frac{1 \mp \text{ſen.}\, L{:}c}{\text{coſ.}\, L{:}c} \ (12).$$

Il primo dei due valori, che per la formola (11) competono alla frazione $A:B$, s'eguaglia a $\frac{\text{coſ.}\, L{:}c}{1 - \text{ſen.}\, L{:}c}$, il ſecondo a $\frac{-\text{coſ.}\, L{:}c}{1 + \text{ſen.}\, L{:}c}$.

Giacchè, come ho teſtè dimoſtrato $e^{L:c} = \frac{1 - \text{ſen.} L{:}c}{\text{coſ.}\, L{:}c}$, ſarà, ſoſtituendo una tale grandezza in luogo di $e^{L:c}$ nel primo valore di $A:B$ contenuto nella formola

$$(11) = \frac{\frac{-\text{coſ.}\, L{:}c}{1 - \text{ſen.}\, L{:}c} - \text{ſen.}\, L{:}c + \text{coſ.} L{:}c}{\frac{1 - \text{ſen.}\, L{:}c}{\text{coſ.}\, L{:}c} - \text{ſen.}\, L{:}c - \text{coſ.} L{:}c} =$$

$$\frac{\text{coſ.}\, L{:}c}{1 - \text{ſen.} L{:}c} \left(\frac{-\text{ſen.}\, L{:}c + (\text{ſen.}\, L{:}c)^2 - \text{ſen.}\, L{:}c \,.\, \text{coſ.}\, L{:}c}{1 - \text{ſen.} L{:}c - \text{ſen.} L{:}c \,.\, \text{coſ.} L{:}c - (\text{coſ.} L{:}c)^2} \right):$$ ma $1 - (\text{coſ.}\, L{:}c)^2 = (\text{ſen.}\, L{:}c)^2$; dunque effettuata queſta ſoſtituzione nel denominatore,

$$\frac{A}{B} = \frac{\text{coſ.}\, L{:}c}{1 - \text{ſen.}\, L{:}c} \times \frac{-\text{ſen.} L{:}c + (\text{ſen.} L{:}c)^2 - \text{ſen.} L{:}c \,.\, \text{coſ.}\, L{:}c}{-\text{ſen.} L{:}c + (\text{ſen.} L{:}c)^2 - \text{ſen.}\, L{:}c \,.\, \text{coſ.} L{:}c}$$

$$= \frac{\text{coſ.}\, L{:}c}{1 - \text{ſen.}\, L{:}c}.$$

Con pari metodo proverò eſſere

$$\frac{A}{B} = \frac{e^{-L:c} - \text{coſ.} L{:}c - \text{ſen.} L{:}c}{e^{L:c} - \text{coſ.}\, L{:}c + \text{ſen.} L{:}c} = \frac{-\text{coſ.}\, L{:}c}{1 + \text{ſen.}\, L{:}c},$$ e perciò avremo

$\frac{A}{B} = \frac{\pm \text{coſ.}\, L:c}{1 \pm \text{ſen.}\, L:c}$. Da queſta formola io ricavo

$$B = A \cdot \left(\frac{1 \mp \text{ſen.}\, L:c}{\pm \text{coſ.}\, L:c} \right) = A \cdot \left(\frac{\pm 1 - \text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c} \right)$$

Eſſendo per la formola (9) $C = A - B$, ſcopriremo

$$C = A \cdot \frac{(\text{coſ.}\, L:c + \text{ſen.}\, L:c \mp 1)}{\text{coſ.}\, L:c}$$

L'equazione (7) determina $D = A + B$, e quindi troveraſſi

$$D = A \cdot \frac{(\text{coſ.}\, L:c - \text{ſen.}\, L:c \pm 1)}{\text{coſ.}\, L:c}$$

Dandoci inoltre la formola (6) $b = A + B + D$, e la (7) $D = A + B$, ne riſulta

$$D = b:2 = A \cdot \frac{(\text{coſ.}\, L:c - \text{ſen.}\, L:c \pm 2)}{\text{coſ.}\, L:c}.$$

I due valori di D mi ſomminiſtrano quello di

$$A = \frac{b\, \text{coſ.}\, L:c}{2.\, (\text{coſ.}\, L:c - \text{ſen.}\, L:c \pm 1)}$$

Or ecco i valori delle quattro coſtanti, i quali ſi renderanno noti, ridotta che ſia a computo la frazione $L:c$ coll'mezzo dell'equazione (12.)

$$A = \frac{b.\, \text{coſ.}\, L:c}{2.\, (\text{coſ.}\, L:c - \text{ſen.}\, L:c \mp 1)} = \frac{b.(\pm 1 + \text{ſen.}\, L:c - \text{coſ.}\, L:c)}{4.\, \text{ſen.}\, L:c} \quad (13.)$$

$$B = \frac{b.\, (\pm 1 - \text{ſen.}\, L:c)}{2.(\text{coſ.}\, L:c - \text{ſen.}\, L:c \pm 1)} = \frac{b.(\mp 1 + \text{ſen.}\, L:c + \text{coſ.}\, L:c)}{4\, \text{ſen.}\, L:c} \quad (14.)$$

$$C = \frac{b.\, (\mp 1 + \text{ſen.}\, L:c + \text{coſ.}\, L:c)}{2.\, (\text{coſ.}\, L:c - \text{ſen.}\, L:c \pm 1)} = \frac{b.\, (\pm 1.-\text{coſ.}\, L:c)}{2.\, \text{ſen.}\, L:c} \quad (15.)$$

$$D = b:2. = \frac{b\, \text{ſen.}\, L:c}{2.\, \text{ſen.}\, L:c} \quad (16.)$$

Le ſeconde eſpreſſioni delle coſtanti A, B, C ſi provano eguali alle prime con un breve giro di computo, ch'io laſcio all'induſtria di chi legge.

Soſtituiti queſti valori nell'equazione (1), troveremo

$$\frac{y}{b}=\frac{e^{x:c}\text{coſ.}\,L:c+e^{-x:c}.(\pm 1-\text{ſen.}\,L:c)}{2.(\text{coſ.}\,L:c-\text{ſen.}\,L:c\pm 1)}$$

$$\frac{(\pm 1-\text{coſ.}\,L:c).\,\text{ſen.}\,x:c+\text{ſen.}\,L:c\,.\,\text{coſ.}\,x:c}{2\,\text{ſen.}\,L:c}\quad(17).$$

Ridurre a forma più ſemplice la formola (17).

XIV. Prendano le aſſiſſe l' origine dal punto medio C (*fig.* 3 e 4), e poſta $CP=z$, ſarà $\frac{1}{2}L-z=x$. Avremo pertanto $e^{x:c}=e^{L:2c\ -z:c}$, e giacchè per l'equazione (12) $e^{L:2c}=\sqrt{\left(\frac{1\mp\text{ſen.}\,L:c}{\text{coſ.}\,L:c}\right)}$, ſcopriremo

$$e^{x:c}=e^{-z:c}.\sqrt{\left(\frac{1\mp\text{ſen.}\,L:c}{\text{coſ.}\,L:c}\right)},\ e^{-x:c}=e^{z:c}\sqrt{\left(\frac{\text{coſ.}\,L:c}{1\mp\text{ſen.}\,L:c}\right)}.$$

Quindi ſarà

$$\frac{Ae^{x:c}+Be^{-x:c}}{b}=\frac{e^{x:c}\text{coſ.}\,L:c+e^{-x:c}.(\pm 1-\text{ſen.}\,L:c)}{2.(\text{coſ.}\,L:c-\text{ſen.}\,L:c\pm 1)}$$

$$=\frac{(\pm e^{z:c}+e^{-z:c})\sqrt{(\text{coſ.}\,L:c\,.\,(1\mp\text{ſen.}\,L:c))}}{2.(\text{coſ.}\,L:c-\text{ſen.}\,L:c\pm 1)}$$

$$=\frac{\pm e^{z:c}+e^{-z:c}}{2.(\pm e^{L:2c}+e^{-L:2c})}.$$

Queſt' ultimo valore dipende da ciò, che per la formola (12) $\pm e^{L:2c}+e^{-L:2c}$

$$=\pm\sqrt{\left(\frac{1\mp\text{ſen.}\,L:c}{\text{coſ.}\,L:c}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\text{coſ.}\,L:c}{1\mp\text{ſen.}\,L:c}\right)}$$

$$=\frac{\text{coſ.}\,L:c-\text{ſen.}\,L:c\pm 1}{\sqrt{(\text{coſ.}\,L:c\,.\,(1\pm\text{ſen.}\,L:c))}}.$$

La Trigonometria c' iſtruiſce eſſere $(\pm 1-\text{coſ.}\,L:c).\,\text{ſen.}\,x:c+\text{ſen.}\,L:c\,.\,\text{coſ.}\,x:c=\pm\,\text{ſen.}\,x:c+\text{ſen.}\left(\frac{L-x}{c}\right)$, e ſoſtituendo nell' omogeneo di comparazione in cambio di x il ſuo valore $\frac{1}{2}L - z$, $(\pm 1 - \text{coſ.}\, L{:}c)\,.\, \text{ſen.}\, x{:}c + \text{ſen.}\, L{:}c\, \text{coſ.}\, x{:}c = \pm\, \text{ſen.}\,(L{:}2c - z{:}c) + \text{ſen.}\,(L{:}2c + z{:}c)$. Nella ſormola (17) alle grandezze eſpreſſe per x ſi ſoſtituiſcano le uguali eſpreſſe per z or ora determinate, e s' avrà

$$\frac{2y}{b} = \frac{\pm e^{z:c} + e^{-z:c}}{\pm e^{L:2c} + e^{-L:2c}} \pm \frac{\text{ſen.}(L{:}2c - z{:}c) + \text{ſen.}(L{:}2c + z{:}c)}{\text{ſen.}\, L{:}c} \quad (18).$$

Abbiamo inoltre $e^{L:2c} + e^{-L:2c}$

$$= \frac{\text{coſ.}\, L{:}c - \text{ſen.}\, L{:}c + 1}{\sqrt{(\text{coſ.}\, L{:}c\,.\,(1 - \text{ſen.}\, L{:}c))}} = \frac{\mp 2\, \text{coſ.}\, L{:}2c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L{:}c}} \quad (a),$$

$- e^{L:2c}$

(*a*) L' accennata riduzione ſi può dimoſtrare così. Il ſecondo membro dell' equazione, laſciato da parte il diviſore $\sqrt{\text{coſ.}\, L{:}c}$, s' eguaglia, alzandolo al quadrato, alla quantità

$$\frac{(\text{coſ.} L{:}c)^2 - 2\,\text{ſen.} L{:}c\; \text{coſ.} L{:}c + (\text{ſen.}\, L{:}c)^2 + 2\, \text{coſ.} L{:}c - 2\, \text{ſen.}\, L{:}c + 1}{1 - \text{ſen.}\, L{:}c}$$

$$= \frac{2 - 2\, \text{ſen.}\, L{:}c + 2\, \text{coſ.}\, L{:}c - 2\, \text{ſen.}\, L{:}c\; \text{coſ.}\, L{:}c}{1 - \text{ſen.}\, L{:}c} = 2 + 2\,\text{coſ.} L{:}c.$$

Il noto Teorema trigonometrico ci ſuggeriſce l'equazione $\text{coſ.}\; L{:}c = (\text{coſ.}\, L{:}2c)^2 - (\text{ſen.}\, L{:}2c)^2$: ma $(\text{ſen.}\, L{:}2c)^2 = 1 - (\text{coſ.}\, L{:}2c)^2$; dunque $1 + \text{coſ.}\, L{:}c = 2\, (\text{coſ.}\, L{:}2c)^2$, o ſia $2 + 2\, \text{coſ.}\, L{:}c = 4\, (\text{coſ.}\, L{:}2c)^2$. Il perchè ſoſtituito in cambio di $2 + 2\, \text{coſ.}\, L{:}c$ lo ſcoperto valore, eſtratta la radice, e reſtituito il diviſore $\sqrt{\text{coſ.}\, L{:}c}$, troveremo $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\text{coſ.}\, L{:}c - \text{ſen.}\, L{:}c + 1}{\sqrt{(\text{coſ.}\, L{:}c\,.\,(1 - \text{ſen.}\, L{:}c))}}$

$$= \frac{\mp 2\, \text{coſ.}\, L{:}2c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L{:}c}}.$$

$$-e^{L:2c}+e^{-L:2c}=\frac{\text{coſ.}\,L:c-\text{ſen.}\,L:c-1}{\sqrt{\left(\text{coſ.}L:c.(1+\text{ſen.}L:c)\right)}}=\frac{\pm 2\,\text{ſen.}L:2c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\,(b),$$

$$\frac{\text{ſen.}(L:2c-z:c+\text{ſen.}(L:2c+z:c)}{\text{ſen.}\,L:c}=\frac{\text{coſ.}\,L:2c}{\text{coſ.}L:2c}\,(c),$$

$$-\frac{\text{ſen.}(L:2c-z:c)+\text{ſen.}(L:2c+z:c)}{\text{ſen.}\,L:c}=\frac{\text{ſen.}\,z:c}{\text{ſen.}\,L:2c}\,(d).$$

(*b*) Queſta riduzione ſi prova con un metodo ſimile al precedente. Imperciocchè il quadrato del ſecondo membro ſenza il diviſore $\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}$ è

$$=\frac{(\text{coſ.}L:c)^2-2\text{ſen.}L:c\,\text{coſ.}L:c+(\text{ſen.}L:c)^2-2\text{coſ.}L:c+2\,\text{ſen.}L:c+1}{1+\text{ſen.}\,L:c}$$

$$=\frac{2+2\,\text{ſen.}\,L:c-2\,\text{coſ.}\,L:c-2\,\text{ſen.}\,L:c\,\text{coſ.}\,L:c}{1+\text{ſen.}\,L:c}=2-2\,\text{coſ.}\,L:c.$$

Ora $2-2\,\text{coſ.}\,L:c=4\,(\text{ſen.}\,L:c)^2$; dunque cavando la radice, e reſtituito il diviſore $\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}$,

$$-e^{L:2c}+e^{-L:2c}=\frac{\text{coſ.}L:c-\text{ſen.}\,L:c-1}{\sqrt{(\text{coſ.}\,L:c\,.\,(1+\text{ſen.}\,L:c)}}=\frac{\pm 2\,\text{ſen.}\,L:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}.$$

(*c*) (*d*) E' noto eſſere $\pm\,\text{ſen.}\,(L:2c-z:c)=\pm\,\text{ſen.}\,L:2c\,\text{coſ.}\,z:c\mp\text{coſ.}\,L:2c\,\text{ſen.}\,z:c$, ſeno $(L:2c+z:c)=\text{ſen.}\,L:2c\,\text{coſ.}\,z:c+\text{coſ.}\,L:2c\,\text{ſen.}\,z:c$, e perciò $\text{ſen.}\,(L:2c-z:c)+\text{ſen.}\,(L:2c+z:c)=2\,\text{ſen.}\,L:2c\,\text{coſ.}\,z:c$, $-\text{ſen.}\,(L:2c-z:c)+\text{ſen.}\,(L:2c+z:c)=2\text{coſ.}\,L:2c\,\text{ſen.}\,z:c$: ma come parimente ſi ſa, $\text{ſen.}\,L:c=2\,\text{ſen.}\,L:2c\,\text{coſ.}\,L:2c$; dunque

$$\frac{\text{ſen.}(L:2c-z:c)+\text{ſen.}\,(L:2c+z:c)}{\text{ſen.}\,L:c}=\frac{\text{coſ.}\,z:c}{\text{coſ.}\,L:2c},$$

$$\frac{-\text{ſen.}(L:2c-z:c)+\text{ſen.}(L:2c+z:c)}{\text{ſen.}\,L:c}=\frac{\text{ſen.}\,z:c}{\text{ſen.}\,L:2c}.$$

Nella formola (*a*) i ſegni del meno, e del più anteposti a $2\,\text{coſ.}\,L{:}2c$ ſono adattati alle due circoſtanze, quello che $\text{coſ.}\,L{:}2c$ ſia quantità negativa, queſto che $\text{coſ.}\,L{:}2c$ ſia quantità poſitiva. I ſegni più e meno nella formola (*b*), che precedono $2\,\text{ſen.}\,L{:}2c$, ſervono ai due caſi, che $\text{ſen.}\,L{:}2c$ ſia negativo, o poſitivo.

La ſurrogazione dei nuovi valori ci ſomminiſtra le due ſeguenti equazioni, che nella più ſemplice forma eſprimono le curve dei due diverſi generi analoghe a quelle, che ſono nelle figure 3, e 4 delineate

$$\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}).\sqrt{\text{coſ.}\,L{:}c}}{2\,\text{coſ.}\,L{:}2c} + \frac{\text{coſ.}\,z{:}c}{\text{coſ.}\,L{:}2c} \quad (19)$$

$$\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}).\sqrt{\text{coſ.}\,L{:}c}}{2\,\text{ſen.}\,L{:}2c} + \frac{\text{ſen.}\,z{:}c}{\text{ſen.}\,L{:}2c} \quad (20).$$

Secondo ciò, che poco fa ho notato, i ſegni ſuperiori nell' equazioni (19), e (20) ſuppongono $\text{coſ.}\,L{:}2c$, $\text{ſen.}\,L{:}2c$ grandezze negative, gl' inferiori le ſuppongono poſitive.

XV. Le coſe, che ſono per dire, richiedono, che riſpettivamente alla formola (19) ſi dimoſtri eſſere

$$-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{-1 + \text{ſen.}\,L{:}c + \text{coſ.}\,L{:}c}{\sqrt{(\text{coſ.}\,L{:}c.(1-\text{ſen.}\,L{:}c))}} = \frac{\mp 2\,\text{ſen.}\,L{:}2c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L{:}c}}.$$

E primieramente la formola (12) ci dà per riguardo all' equazione (19) $-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = -\sqrt{\left(\frac{1-\text{ſen.}\,L{:}c}{\text{coſ.}\,L{:}c}\right)}$

$$+\sqrt{\left(\frac{\text{coſ.}\,L{:}c}{1-\text{ſen.}\,L{:}c}\right)} = \frac{-1 + \text{ſen.}\,L{:}c + \text{coſ.}\,L{:}c}{\sqrt{(\text{coſ.}\,L{:}c\,.\,(1-\text{ſen.}\,L{:}c))}}.$$

Provo in ſecondo luogo, che s' avvera l' equazione $\frac{-1+\text{ſen.}\,L{:}c+\text{coſ.}\,L{:}c}{\sqrt{(1-\text{ſen.}\,L{:}c)}} = \mp 2\,\text{ſen.}\,L{:}2c$. Abbiamo dalla Trigonometria $2\,\text{ſen.}\,L{:}c = 4\,\text{ſen.}\,L{:}2c\,\text{coſ.}\,L{:}2c$, e moltiplicando, e dividendo per $1-\text{ſen.}\,L{:}c$, $\frac{2\,\text{ſen.}\,L{:}c - 2(\text{ſen.}\,L{:}c)^2}{1-\text{ſen.}\,L{:}c} = 4\,\text{ſen.}\,L{:}2c\,\text{coſ.}\,L{:}2c$. Pongo in cambio d' uno de' due quadrati $-(\text{ſen.}\,L:c)^2$ il ſuo valore $-1+(\text{coſ.}\,L:c)^2$, e mì ſi preſenta

$$\frac{-1+2\,\text{ſen.}\,L:c-(\text{ſen.}\,L:c)^2+(\text{coſ.}\,L:c)^2}{1-\text{ſen.}\,L:c} = 4\,\text{ſen.}\,L:2c\;\text{coſ.}\,L:2c\,.$$

Dall' annotazione (*a*) ricavaſi $\mp 2\,\text{coſ.}\,L:2c$ $= \dfrac{1-\text{ſen.}\,L:c+\text{coſ.}\,L:c}{\sqrt{(1-\text{ſen.}\,L:c)}}$. Soſtituiſcaſi queſto valore, e dividendo poſcia per lo ſteſſo, ritroveraſſi

$$\frac{-1+\text{ſen.}\,L:c+\text{coſ.}\,L:c}{\sqrt{(1-\text{ſen.}\,L:c)}} = \mp 2\,\text{ſen.}\,L:2c\,,$$ e perciò $-e^{L:2c}$

$$+e^{-L:2c} = \frac{-1+\text{ſen.}\,L:c+\text{coſ.}\,L:c}{\sqrt{\left(\text{coſ.}\,L:c.(1-\text{ſen.}\,L:c)\right)}} = \frac{\mp 2\,\text{ſen.}\,L:2c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\,.$$

Corollarj, che ſi deducono dalla formola (19.)

XVI. Dalla formola (19.) ſi deducono i ſeguenti corollarj.

1. Ponendo nella detta formola l'aſſiſſa $z=0$, ne riſulterà il valore dell'applicata $y=Cc$ in tutte le curve analoghe alla figura (3.), dalle quali viene l'aſſe *AB* tagliato in un numero pari di punti. Avremo pertanto $Cc:Aa=y:b=\mp\dfrac{\sqrt{(\text{coſ.}\,L:c)+1}}{2\,\text{coſ.}\,L:2c}=1:2\,\text{ſec.}\,L:2c\mp$ $\text{ſec.}\,L:c\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}$ (*e*).
Dal ridurre a computo riſpettivamente a ciaſcuna curva del genere di quella della figura (3.) la frazione $L:c$ dipende la determinazione del valore della linea *Cc*.

Nnn ij

(*e*) Stando come il ſeno tutto al coſeno, così la ſecante al ſeno tutto, ſi verifica l'equazione $\text{ſec.}\,L:2c=\dfrac{1}{\text{coſ.}\,L:2c}$, o ſia $\frac{1}{2}\,\text{ſec.}\,L:2c=\dfrac{1}{2\,\text{coſ.}\,L:2c}$.

Mi riſervo d' inſegnare il metodo d' un tal calcolo al numero XIX, e ſeguenti.

2. Si prendano le differenze nella formola (19.), e ſcopriraſſi $2cdy:bdz \text{ coſ. } L:2c = \frac{(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c})\sqrt{(\text{coſ. } L:c)}}{2} - \text{ſen. } z:c$ (21.). Facciaſi $dy:dz = 0$, e le radici dell' equazione $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}).\sqrt{(\text{coſ. } L:c)} - 2 \text{ ſen. } z:c = 0$ determineranno i valori delle aſſiſſe z, alle quali corriſpondono le maſſime ordinate y nelle curve analoghe a quella nella figura (3) delineata. Secondo che queſte curve tagliano l' aſſe *AB* in 2, 4, 6, 8 punti ecc., i numeri delle predette radici ſaranno 1, 3, 5, 7 ecc. Una delle radici della noſtra equazione ſi è $z = 0$, e perciò nelle curve, di cui parliamo, aſcende al maſſimo l' ordinata *Cc* corriſpondente al punto medio *C* del cilindro *AB*.

3. Fatte $y = 0$, ſi troveranno i punti 2, 4, 6, 8 ecc., nei quali l' aſſe *AB* vien tagliato dalle curve compreſe nell'equazione (19.). Avremo pertanto $\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c} + \frac{2 \text{ coſ. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}} = 0$. Mentre il cilindro oſcilla, queſti punti reſtano immobili, e quindi ſotto ponendo ai punti per eſempio *E*, *F* (*fig.* 3.) due appoggi, non ſono da eſſi ſraſtornate le vibrazioni del cilindro. La mentovata figura eſprime il modo principale, onde ſi vibra il cilindro, rendendo il ſuono fra tutti il più grave. I punti ſtabili *E*, *F* diſtano dalle eſtremità *A*, *B* del cilindro per le linee *EA*, *FB*, che come vedremo al numero XXX. poco calano dalla quarta parte della lunghezza *AB*. Negli ſtrumenti formati di cilindri i punti *E*, *F* ripoſano ſu due ſcannelli, eſſendo riuſcito alla pratica col mezzo di replicati tentativi di accorgerſi d' una proprietà, ſenza della quale non potrebbe la Muſica valerſi dei noſtri corpi ſonori.

4. Differenzio nuovamente la formola (21.), e ſcopro

$4c^2 ddy:bdz^2.\ \text{coſ.}\ L:2c = (\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}).\sqrt{(\text{coſ.}\ L:c)} - 2\ \text{coſ.}\ z:c$ (22.). Abbiamo veduto al numero XI, che quando $ddy:dx^2 = ddy:dz^2 = 0$, è parimente nulla in quel tal ſito la curvatura del cilindro, il momento della ſua elaſticità, ed altresì la ſomma dei momenti delle forze applicate al cilindro ſteſſo o da un canto, o dall' altro. Si è pure fatta la rifleſſione, che ciò interviene nei punti eſtremi a, b del cilindro. Pongo nell'equazione (22) $ddy:dz^2 = 0$, e mi ſi affaccia $\pm e^{z:c} \pm {}^{-z:c} - \frac{2\ \text{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}} = 0$. Riſpettivamente ai punti eſtremi a, b è $z = \pm L:2$, e queſte debbono eſſere due radici della noſtra equazione. In fatti ſoſtituendo in cambio di z i detti valori, e fatta la rifleſſione eſſere $\text{coſ.} - L:2c = \text{coſ.}\ L:2c$, troveremo in tutti e due i caſi $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\mp 2\ \text{coſ.}\ L:2c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}$, equazione, che ho dimoſtrato eſſer vera al numero XIV nell' annotazione (*a.*)

Il numero delle radici dell'equazione, di cui trattiamo, s'eguaglia a quello de' punti 2, 4, 6, 8 ecc., ne' quali le curve tagliano l'aſſe *AB*. Detratte le due radici $z = \pm L:2$ le rimanenti 0, 2, 4, 6 ecc. ſervono a determinare nelle curve altrettanti fleſſi contrarj, ed in tali ſiti parimente s'eguaglia a nulla la curvatura del cilindro, e la ſomma dei momenti delle forze applicate a deſtra, o a ſiniſtra.

Le due metà per eſempio *cEa*, *cFb* (*fig.* 3.) delle noſtre curve ſono uguali, ſimili, e collocate in maniera, che ſegnate due aſſiſſe uguali *CP*, *CQ*, una poſitiva, e l'altra negativa, s'eguagliano le corriſpondenti ordinate *PM*, *QN*, e ſono amendue o poſitive, o negative. In prova di ciò faccia chi legge la rifleſſione, ch' eſſendo $\text{coſ.}\ z:c = \text{coſ.} - z:c$, nulla s'altera la formola (19.), mentre ſi cangia il ſegno all'incognita z; e quindi ad aſſiſſe uguali una poſitiva, e l'altra negativa ſi riferiſcono ordinate uguali, e ſimilmente ſituate.

Se dee pareggiare il nulla la ſomma dei momenti riſpettivamente al punto eſtremo b delle forze applicate al cilindro $aEcFb$, egli è neceſſario, che le forze, ovvero le ordinate dalla noſtra curva ad eſſe proporzionali ſieno parte poſitive, e parte negative. Il perchè paſſando fra i due rami cEa, cFb la ſomiglianza teſtè deſcritta, ſi richiede indiſpenſabilmente, che ciaſcuno tagli l'aſſe AB almeno in un punto, come nella figura (3.) ſuccede.

La ſomma dei momenti in riguardo al punto M delle forze applicate alla porzione di cilindro aM è proporzionale a $ddy{:}dz^2 = ddy{:}dz^2$, o ſia alla quantità $(\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}).\sqrt{}(\text{coſ.}\, L{:}c) - 2\,\text{coſ.}\, z{:}c$. Taglio $CQ = CP$, e ſcopro l'aggregato dei momenti riſpettivamente al punto N delle forze applicate alla parte $aEcN$ del cilindro come $(\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}).\sqrt{}(\text{coſ.}\, L{:}c) - 2\,\text{coſ.} - z{:}c$. L'eguaglianza delle ritrovate grandezze moſtra, che ſono eguali le ſomme dei nominati momenti: ma l'aggregato dei momenti riſpettivamente al punto N delle forze applicate al cilindro $aEcN$ pareggia quello in relazione al punto M delle forze applicate al cilindro $bFcM$; dunque s'eguagliano le ſomme dei momenti a deſtra, e a ſiniſtra del punto M preſo ad arbitrio, i quali perciò fanno equilibrio e coll'elaſticità del cilindro nel ſito M, e tra loro, dimodochè non può ſeguire verun moto di rotazione.

5. Preſe le differenze nella formola (22.) avremo $4c^3 d^3y{:}bdz^3.\,\text{coſ.}\, L{:}2c = (\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}).\sqrt{}(\text{coſ.}\, L{:}c) + 2\,\text{ſen.}\, z{:}c$ (23.). Dal numero X. raccoglieſi eſſere $ELf{:}M.\, d^3y{:}dx^3 = c^4 d^3y{:}dx^3 = \int ydx$. Nel numero XII. ho notato, che la ſomma delle ſorze applicate al cilindro aM è proporzionale all'aja $aMPA = \int ydx = \int -ydz$ S'inferiſca, che queſta ſomma ſerba la ragione di $c^4 d^3y{:}dx^3 = c^4 d^3y{:}-dz^3$, o ſia per l'equazione (23.) della quantità $(\pm e^{z:c} \mp e^{-z:c}).\sqrt{}(\text{coſ.}\, L{:}c) - 2\,\text{ſen}\, z{:}c$. Qualora

s'abbia $(\pm e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ}. L:c)} - 2\,\text{ſen}.\, z:c = 0$, s'eguaglierà a nulla l'aggregato delle forze applicate al cilindro *aM*. L'ultima formola ha ſempre le tre radici $z = 0$, $z = L:2$, $z = -L:2$. Poſta $z = 0$, chiaramente ſi ſcopre eſſere $e^{0:c} \mp e^{-0:c} = \pm 1 \mp 1 = 0$, $2\,\text{ſen}.\, 0:c = 0$. Queſta radice mi addita eguagliarſi a nulla l'aggregato delle forze applicate alla metà *aEc* del cilindro, e che per conſeguenza l'aja poſitiva *aEA* pareggia la negativa *CEc*. L'altre due radici $z = L:2$, $z = -L:2$ mi danno quella $(\pm e^{L:2c} \mp e^{-L:2c}) \sqrt{(\text{coſ}. L:c)} - 2\,\text{ſen}.\, L:2c = 0$, queſta $(\pm e^{-L:2c} \mp e^{L:2c}) \sqrt{(\text{coſ}. L:c)} - 2\,\text{ſen}. -L:c = 0$; e giacchè $-2\,\text{ſen}. -L:2c = 2\,\text{ſen}.\, L:2c$, trovo in tutti e due i caſi $-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\pm 2\,\text{ſen}.\, L:2c}{\sqrt{\text{coſ}. L:c}}$, equazione, che al numero XV. ho dimoſtrato verificarſi. Dalla radice $z = L:2 = CA$ ſi ricava, che una ſomma di forze uguali a nulla s'applica alla porzione *aM* del cilindro, quando eſſa pareggia il nulla. Finalmente, e queſto è quel che più importa, la radice $z = -L:2 = CB$ ci manifeſta eſſer nullo l'aggregato delle forze applicate a tutto il cilindro *AB*, cioè a dire che le forze negative s'eguagliano alle poſitive. In sì fatta guiſa non potendo il cilindro girarſi intorno qualſivoglia punto *M*, ed eſſendo egualmente tirato per le direzioni oppoſte *Cc*, *cC*, viene trattenuto immobile nella poſitura *aEcFb* dalle forze *MH* uguali, e contrarie a quelle, che tentano di farlo reciprocare, e rimoſſe eſſe forze *MH*, non concepiſce altro moto, che di ſola vibrazione.

XVII. Incontreremo nel corollario 5. dedotto dalla formola (20) l'equazione $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\mp \text{coſ}. L:2c}{\sqrt{\text{coſ}. L:c}}$, la di cui verità preſentemente dimoſtro. L'equazione

(12) ci ſomminiſtra riſpettivamente alla formola (20) $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \sqrt{\left(\frac{1 + \text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\text{coſ.}\, L:c}{1 + \text{ſen.}\, L:c}\right)}$ $= \frac{1 + \text{ſen.}\, L:c + \text{coſ.}\, L:c}{\sqrt{(\text{coſ.}\, L:c \,.\, (1 + \text{ſen.}\, L:c))}}$. Egli è d' uopo adunque provare adempierſi l' equazione $\frac{1 + \text{ſen.}\, L:c + \text{coſ.}\, L:c}{\sqrt{(1 + \text{ſen.}\, L:c)}}$ $= \mp 2\, \text{coſ.}\, L:2c$.

Moltiplico, e divido per $1 + \text{ſen.}\, L:c$ il primo membro dell' equazione $- 2\, \text{ſen.}\, L:c = - 4\, \text{coſ.}\, L:2c$, onde s' abbia $\frac{-2\, \text{ſen.}\, L:c - 2(\text{ſen.}\, L:c)^2}{1 + \text{ſen.}\, L:c} = - 4\, \text{coſ.}\, L:2c \,.\, \text{ſen.}\, L:2c$. Il luogo d' uno de' due quadrati $-(\text{ſen.}\, L:c)^2$ colloco il ſuo valore $- 1 + (\text{coſ.}\, L:c)^2$, e trovo $\frac{-1 - 2\, \text{ſen.}\, L:c - (\text{ſen.}\, L:c)^2 + (\text{coſ.}\, L:c)^2}{1 + \text{ſen.}\, L:c} = - 4\, \text{coſ.}\, L:2c \,.\, \text{ſen.}\, L:2c$: ma per l' annotazione (*b*) $\pm 2\, \text{ſen.}\, L:2c =$ $\frac{-1 - \text{ſen.}\, L:c + \text{coſ.}\, L:c}{\sqrt{(1 + \text{ſen.}\, L:c}}$; dunque ſurrogando un tal valore, e dividendo poſcia per lo ſteſſo, ſcopriremo $\frac{1 + \text{ſen.}\, L:c + \text{coſ.}\, L:c}{\sqrt{(1 + \text{ſen.}\, L:c)}} = \mp 2\, \text{coſ.}\, L:2c$, e conſeguentemente ſarà $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{1 + \text{ſen.}\, L:c + \text{coſ.}\, L:c}{\sqrt{(\text{coſ.}\, L:c \,.\, (1 + \text{ſen.}\, L:c))}}$ $= \frac{\mp 2\, \text{coſ.}\, L:2c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L:c}}$.

Corollarj, che ſi deducono dalla formola (20).

XVIII. Dalla formola (20) ne naſcono i corollarj ſeguenti.

1. La mentovata formola comprende tutte le curve analoghe

analoghe alla figura (4), che tagliano l' aſſe *AB* nel punto medio *C*. In fatti poſta $z = CP = 0$, ſi trova $y = 0$. Le noſtre curve hanno la comune proprietà, che a due aſſiſſe uguali *CP*, *CQ*, una poſitiva, e l' altra negativa corriſpondono due ordinate uguali una poſitiva, e l' altra negativa, o a roveſcio *PM*, *QN*. Se nell' equazione (20) $\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ.} L:c)}}{2\, \text{ſen.}\, L:2c} + \frac{\text{ſen.}\, z:c}{\text{ſen.}\, L:2c}$ cangeremo il ſegno all' incognita z, ſcopriremo $\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{-z:c} \pm e^{z:c}) . \sqrt{(\text{coſ.} L:c)}}{2\, \text{ſen.}\, L:2c} + \frac{\text{ſen.} - z:c}{\text{ſen.}\, L:2c}$. Il paragone delle due eſpreſſioni dimoſtra, ch' eſſendo $\text{ſen.} - z:c = - \text{ſen.}\, z:c$, a pari aſſiſſe *CP*, *CQ* quella poſitiva, e queſta negativa ſi riferiſcono ordinate uguali *PM*, *QN*, ma affette da ſegni contrarj. Quindi le due metà di curva *CgEa*, *CkFb* ſono eguali, e ſimili, ma inverſamente collocate e in riguardo all' aſſiſſe, e in riguardo all' ordinate. Lo ſteſſo dicaſi delle due porzioni di curva *aEgCkN*, *bFkCgM*. Si oſſervi, che a punti analoghi per eſempio *g*, *k* di queſte porzioni ci vanno applicate forze uguali e contrarie, e che per conſeguenza la ſomma dei momenti riſpettivamente ai punti *N*, *M* delle forze applicate ad eſſe porzioni ſono fra loro eguali, ma una poſitiva, e l' altra negativa.

2. Col mettere $y = 0$, ſi determinano i punti 3, 5, 7, 9 ecc., nei quali le curve contenute nell' equazione (20) tagliano l' aſſe *AB*. Una tal ipoteſi mi ſomminiſtra la formola $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ.}\, L:c)} + 2\, \text{ſen.}\, z:c = 0$, che va ſempre fornita della radice $z = 0$, Mentre adunque il cilindro ripoſa equilibrato ſopra un ſoſtegno ſottopoſto al punto medio *C*, può ripiegarſi in tutte le curve eſpreſſe dall' equazione (20), e rendere i ſuoni ad eſſe curve confaccenti, fra' quali il più gra-

ve ſi è quello, che produce il cilindro, quando ſi conforma alla curva della figura (4). Se gli appoggi cadono ſotto gli altri punti immobili E, F, ſi ſente lo ſteſſo ſuono. Chi vuol udire un ſuono chiaro e ſorte, avverta di non battere il cilindro ne' punti ſtabili E, C, F. I ſiti più rimoti dai punti fiſſi ſono i più opportuni per batterlo, e ſpecialmente i due G, K, ai quali corriſpondono le maſſime ordinate Gg, Kk. Non rieſce molto utile il percuotere il cilindro in vicinanza dei punti eſtremi A, B; perchè parte della forza s' impiega a far girare il cilindro intorno al più vicino ſoſtegno.

3. Differenzio la formola (20), onde s' abbia $4cdy : -bdz . \text{ſen.}\, L:2c = (\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ.}\, L:c)} - 2\,\text{coſ.}\, z:c$ (24). Le radici dell' equazione $(\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ.}\, L:c)} - 2\,\text{coſ.}\, z:c = 0$ determinano i punti per eſempio G, K, ai quali corriſpondono le maſſime ordinate Gg, Kk. I numeri di tali ordinate ſaranno 2, 4, 6, 8 ecc., ſecondo che le curve taglieranno l' aſſe AB in punti 3, 5, 7, 9 ecc.

4. Prendo di bel nuovo le differenze nell' equazione (24), e trovo $4c^2ddy : bdz^2 . \text{ſen.}\, L:2c = (\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ.}\, L:c)} - 2\,\text{ſen.}\, z:c$ (25). Eſſendo la ſomma dei momenti in relazione al punto M delle forze applicate alla porzione aM del cilindro proporzionale a $ddy:dz^2$, ſerberà altresì la ragione della grandezza $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ.}\, L:c)} - 2\,\text{ſen.}\, z:c$. In que' ſiti, dove la predetta ſomma s' eguaglia a nulla, egli è d' uopo che s' adempia l' equazione $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ.}\, L:c)} - 2\,\text{ſen.}\, z:c = 0$. Ha ſempre queſta le tre radici $z = \pm L:2$, $z = 0$. Poſta $z = \pm L:2$, ſi trova $- e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \dfrac{\pm 2\,\text{ſen.}\, L:2c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L:c}}$, ſecondo a ciò che ho dimoſtrato nell' annotazione (*b*). La prima radice determina il punto A, e m' inſegna, che quando la parte aM del cilindro

pareggia il nulla, ed il punto *M* coincide col punto *a*, è parimente nulla la ſomma dei momenti riſpettivamente al punto *M*, ovvero *a* delle forze ad eſſa parte applicate. Dalla ſeconda radice, che ci dà il punto *B*, ſi raccoglie uguagliarſi a nulla l'aggregato dei momenti in riguardo al punto *b* delle forze applicate a tutto il cilindro *agCkb*. La terza radice ſegna il punto *C*, e fa paleſe, che al nulla equivale la ſomma dei momenti per rapporto al punto *C* delle forze applicate alla metà del cilindro *aEgC*. Noto, che nel ſito *C* interviene un fleſſo contrario, e che il numero di tali fleſſi s' eguaglia a quello dei punti, nei quali le curve tagliano l' aſſe *AB*, detratto il binario.

Eſſendo le forze applicate a' punti analoghi delle due metà *aEgC*, *bFkC* del cilindro ſempre uguali e contrarie, egli è manifeſto, che tali pure ſono le ſomme dei momenti delle forze applicate ed eſſe metà riſpettivamente al punto medio *C*. Le dette ſomme frattanto debbono eſſere amendue o poſitive, o negative; perchè hanno da ſtare in equilibrio e tra loro, e colla forza elaſtica del cilindro nel ſito *C*. Le due condizioni, che ſembrano aſſolutamente ripugnanti, ſi conciliano inſieme, quando le mentovate ſomme s' eguagliano a nulla, come effettivamente ſuccede.

E quindi cade in acconcio la rifleſſione, eſſere neceſſario che le noſtre curve taglino l' aſſe almeno in tre punti. Se le forze applicate alla metà *aEgC* del cilindro hanno da formar equilibrio riſpettivamente al punto *C*, fa di meſtieri che ſiano parte poſitive e parte negative, e queſta circoſtanza indiſpenſabilmente richiede, che la curva *aEgC* ſia parte al diſotto, e parte al diſopra dell' aſſe *AB*, e che per conſeguenza l' interſechi almeno in un punto *E*. Lo ſteſſo dicaſi della curva *bFkC*, la quale dee tagliare l' aſſe *AB* almeno in un punto *F*. S' aggiunga il punto *C*, e ſi troveranno tre per lo meno i punti d' interſezione.

Segno $CQ = CP$, e cangiato il ſegno all' incognita z nella ſormola (25) $4c^2 ddy : bdz^2 \text{ ſen. } L : 2c = (\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ. } L : c)} - 2 \text{ ſen. } z : c$, trovo $4c^2 ddy : bdz^2 . \text{ ſen. } L : 2c = (\mp e^{-z:c} \pm e^{z:c}) . \sqrt{(\text{coſ. } L : c)} - 2 \text{ ſen. } z{:}c$, o ſia ponendo in cambio di $- 2 \text{ ſen. } z{:}c$ la quantità eguale $2 \text{ ſen. } z{:}c$ $4c^2 ddy : bdz^2 . \text{ ſen. } L : 2c = (\pm e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ. } L : c)} + 2 \text{ ſen. } z : c$. Paragonati inſieme gli omogenei di comparazione della formola (25), e dell' ultima, ſi ſcoprono eguali, ma uno negativo in riguardo all' altro. Eſprime il primo la ſomma dei momenti riſpettivamente al punto qualunque M delle forze applicate alla porzione aM del cilindro, e dal ſecondo vien dinotata la ſomma dei momenti in riguardo al punto N delle forze applicate alla parte di cilindro $aEgCkN$. I predetti aggregati adunque ſono eguali, e contrarj: ma altresì eguali e contrarj, come ho notato nel Corollario 1, ſono gli aggregati di momenti riſpettivamente ai punti N, M delle forze applicate alle porzioni di cilindro $aEgCkN$, $bFkCgM$; dunque paſſa una perfetta uguaglianza fra le ſomme dei momenti riferiti al punto M delle forze applicate alle parti di cilindro da eſſo punto M diviſe; ed eſſendo le nominate ſomme amendue coſpiranti, s' equilibrano mutuamente, dimodo che il cilindro non può far moto alcuno di giramento intorno qualſivoglia punto M ſcelto ad arbitrio.

5. Si differenzj la formola (25), onde s' abbia $4c^3 d^3y : -bdz^3 . \text{ ſen. } L{:}2c = (\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ. } L{:}c)} + 2 \text{ coſ. } z{:}c$ (26). La ſomma delle forze applicate alla porzione di cilindro aM, che ha da eſſere proporzionale a $d^3y : -dz^3$, dee ſerbare altresì la ragione della quantità $(\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ. } L{:}c)} + 2 \text{ coſ. } z{:}c$. S' eguaglierà a nulla la detta ſomma, quando ſi verifichi l' equazione $e^{z:c} + e^{-z:c} = \dfrac{\mp 2 \text{ coſ. } z{:}c}{\sqrt{\text{coſ. } L{:}c}}$, a cui apparten-

gono le due radici $z = \pm L:2$. In fatti ſoſtituito in luogo di z prima l' uno, indi l' altro valore, trovo in tutti e due i caſi $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\mp 2\,\text{coſ.}\,L:2c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}$, formola, che al numero XVII. ho provato eſſer vera. La radice $z = L:2$ m' iſtruiſce, che quando la porzione aM del cilindro eguaglia il nulla, s' applica ad eſſa un aggregato nullo di forze. Dalla radice $z = -L:2$ ci viene additato, equivalere al nulla la ſomma delle forze applicate all' intero cilindro AB, il che interviene, qualora le forze negative pareggiano le poſitive.

Si cavi l' importantiſſima conſeguenza, che ancora quando il cilindro AB s' adatta alle curve del ſecondo genere, dalle quali l' aſſe AB viene tagliato in un numero impari di punti, ſi adempiono le due proprietà, ch' eſſo non poſſa rivolgerſi intorno qualſivoglia punto M, e che ſia del pari tirato da due ſomme di forze uguali, e contrarie. Quindi le forze MH eguali ed oppoſte a quelle, che tentano di farlo reciprocare, lo tengono immobile nel ſito $aEgCkFb$, e tolte di mezzo eſſe forze, altro movimento, ſalvochè quello di vibrazione, non gli è permeſſo di poter acquiſtare.

Ridurre a computo la grandezza, o ſia l' angolo L:c.

XIX. Prendo nuovamente per mano la formola (12) $e^{L:c} = \frac{1 \mp \text{ſen.}\,L:c}{\text{coſ.}\,L:c}$, e fatta la rifleſſione, che tanto $e^{L:c}$, quanto $1 \mp \text{ſen.}\,L:c$ ſono ſempre quantità poſitive, ne inferiſco, che ſotto tal claſſe dee parimente riporſi $\text{coſ.}\,L:c$. Fatto centro in C, col raggio $CA = 1$ (*fig.* 9) deſcrivaſi il circolo $ABab$, il quale dalle linee Aa, Bb venga partito in quattro quadranti. Se il coſeno CG dell' angolo ACF, o pure il coſeno Cg dell' angolo ACf hanno da eſſere poſitivi, il che ſuccede, quando la loro direzione è da C verſo A, ſi rende neceſſario che i lati CF, Cf cadano dentro i quadranti ACB, ACb. Per la qual coſa l' angolo $L:c$ potrà ricevere infiniti valori, i quali ſtaranno o fra l' angolo nulla e l' angolo retto, o fra i tre e i quattro retti, o fra i quattro e i cinque, o fra i ſette e gli otto, o fra gli otto e i nove, o fra gli undici e i dodici, o fra i dodici e i tredici ecc. S' eſprima colla lettera q l' angolo retto, o ſia il quadrante di circolo, il cui raggio $= 1$, e chiamato ϕ quell' angolo minor del retto, per cui l' angolo $L:c$ differiſce da un determinato numero di retti, ci ſi preſenteranno le ſeguenti equazioni

1. $L:c = q - \phi$
2. $L:c = 3q + \phi$
3. $L:c - 5q - \phi$
4. $L:c = 7q + \phi$
5. $L:c = 9q - \phi$
6. $L:c = 11q + \phi$
7. $L:c = 13q - \phi$

ecc.

Le formole, cui ſtanno a lato i numeri impari, aſſegnano all' angolo $L:c = ACF$ valori tali, che il lato CF cade ſempre dentro il quadrante ACB. Al contrario le formole ſegnate coi numeri pari attribuiſcono all' angolo $L:c = ACf$ quelle grandezze, mercè le quali il lato Cf è coſtantemente compreſo dentro il quadrante ACb.

Al punto A del circolo $ABab$ conduco la tangente indefinita HAh, e diviſi per metà ne' punti I, i i due angoli ACF, bCf, ciaſcun de' quali vien dinotato dalla ſpecie ϕ, delineo le ſecanti CIH, Cih. Deſcritte le linee FG, fg parallele a Bb, FN, fn parallele ad Aa, ſi tirino le rette FB, Fb, fb, fB.

Inſiſtendo ſopra lo ſteſſo arco FB i due angoli FbB

alla circonferenza, *FCB* al centro, ſi corriſpondono nella ragione 1 : 2; ma per la coſtruzione l' angolo *FCB* è doppio dell' *HCB*; dunque paſſa eguaglianza fra gli angoli *FbA*, *HCB*. Si oſſervi eguagliarſi gli angoli alterni *HCB*, *CHA*, e ſi deduca l' egualità degli angoli *FbM*, *CHA* nei triangoli rettangoli *FbM*, *CHA*, i quali perciò ſono ſimili, e ci ſomminiſtrano l'analogia $bM : MF :: HA : AC$. Giacchè $FG = MC$ è il ſeno dell' angolo $ACF = L:c$, ſcopriremo $bM = 1 + \text{ſen.}\, L:c$. Abbiamo inoltre $MF = \text{coſ.}\, L:c$, ed altresì $HA = \text{coſ.}\, \frac{1}{2}\phi$, cioè a dire la linea *HA* eguale alla cotangente dell' angolo *BCI* metà del $BCF = \phi$. Ecco adunque l' eſpreſſione analitica della ſovrappoſta analogia $1 + \text{ſen.}\, L:c : \text{coſ.}\, L:c :: \text{coſ.}\, \frac{1}{2}\phi : 1$, da cui deriva l' equazione $\frac{1 + \text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c} = \text{coſ.}\, \frac{1}{2}\phi$. Abbiamo ſuperiormente notato, che la formola $e^{L:c} = \frac{1 + \text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c}$ ci guida all'equazione (20) propria delle curve del ſecondo genere, che tagliano l' aſſe *AB* (*fig.* 4) in un numero impari di punti. S' inferiſca pertanto, che a tali curve ſervono gli angoli *ACF* (*fig.* 9), il cui lato *CF* cade dentro il quadrante *ACB*, e che s' eguagliano ad angoli retti 1, 5, 9, 13 ecc. meno l' angolo ϕ.

Collo ſteſſo progreſſo dimoſtrerò verificarſi l'analogia $Bm : mf :: bA : AC$. Noto ch' eſſendo negativo il ſeno $gf = Cm$ dell'angolo $ACf = L:c$, la linea *Bm* s' eguaglia ad $1 - \text{ſen.}\, L:c$; e quindi la premeſſa analogia s' eſprimerà così
$1 - \text{ſen.}\, L:c : \text{coſ.}\, L:c :: \text{cot.}\, \frac{1}{2}\phi : 1$, e ne riſulterà l' equazione $\frac{1 - \text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c} = \text{cot.}\, \frac{1}{2}\phi$. Fatta l' avvertenza, che dall' equazione $e^{L:c} = \frac{1 - \text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c}$ deriva la formola (19)

ſpettante alle curve del primo genere, che interſecano l' aſſe *AB* (*fig.* 3.) in un numero pari di punti; ſi deduca ſervire a sì fatte curve gli angoli *ACf* (*fig*: 9), il cui lato *Cf* ſta dentro il quadrante *ACb*, e che pareggiano angoli retti 3, 7, 11 ecc. più l'angolo ϕ.

Le coſe dette ci moſtrano a dito adempierſi l' equazione $e^{L:c} = \frac{1 \mp \text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c} = \text{cot.}\, \frac{1}{2}\phi$, la quale comprende le curve del primo, e del ſecondo genere. Facendo tranſito dai numeri ai logaritmi, e richiamando a memoria eſſere log. $e = 1$, troveremo $L:c = \text{log. cot.}\, \frac{1}{2}\phi$.

XX. Prima di paſſar oltre, egli è d' uopo provare, che il valore $L:c = q - \phi$ non può convenire a veruna curva del ſecondo genere, alla quale ad un cilindro, che oſcilla, ſia conceſſo adattarſi. Eſſendo l' angolo $L:c = q - \phi$ minore del retto, ſcopreſi poſitivo il ſeno dell' angolo $L:2c$. Qualmente ho avvertito al numero XIV. i ſegni inferiori della formola (20.) ſuppongono ſen. $L:2c$ grandezza poſitiva. Nel caſo adunque, che preſentemente ſi eſamina, avremo

$$\frac{2y}{b} = \frac{(e^{z:c} - e^{-z:c}).\sqrt{(\text{coſ.}\, L:c)}}{2\, \text{ſen.}\, L:2c} + \frac{\text{ſen.}\, z:c}{\text{ſen.}\, L:2c}.$$

Poſto $L:c = q - \phi$, non può l' ordinata y pareggiare il nulla, ſalvochè nella circoſtanza, che ſia $z = 0$. Quindi non s' adempirebbe quello, che nel Corollario 4. del numero XVIII. ho dimoſtrato dover ſuccedere, che la curva (*fig.* 4.) *aEgCkFb* interſechi l' aſſe *AB* almeno in tre punti. Sia primieramente z maggiore del nulla; e giacchè il maſſimo valore, che poſſa attribuirſi a z, ſi è $L:2$, ci accorgeremo eſſere ſempre poſitivo ſen. $z:c$, ed altresì il termine $\frac{\text{ſen.}\, z:c}{\text{ſen.}\, L:2c}$. Conciossiachè $e = 2,7182818$, ſcopriremo le due quantità $e^{z:c}$, $e^{-z:c}$ l' una maggiore, e l' altra minore dell' unità, ed ed inferiremo, che il termine $\frac{(e^{z:c}-e^{-z:c}).\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}{2\ \text{ſen.}\ L:2c}$ ſi mantiene poſitivo coſtantemente. Conchiudaſi, che all' aſſiſſa z poſitiva corriſponderebbe l'ordinata y affermativa; eſſendo $2y:b$ uguale alla ſomma di due termini ſempre poſitivi, e che contro la natura della noſtra equazione la curva $CgEa$ caderebbe tutta al diſotto del ſemiaſſe CA, nè lo taglierebbe in alcun punto medio fra C ed A.

In ſimil guiſa dimoſtrerò, che ſupponendo z minore del nulla, vale a dire negativa, ſarebbe ſempre negativa l'ordinata y, e ſtando tutta la curva $CkFb$ al diſopra del ſemiaſſe CB, non l' interſecherebbe in verun punto medio fra C e B.

XXI. Eſcluſo il valore $L:c = q - \phi = \log.\ \text{coſ.}\ \frac{1}{2}\phi$, regiſtro nella ſeguente tavola quelli, che ſono confacenti all'equazioni (19) e (20), o ſia alle curve del primo, e del ſecondo genere.

1. $L:c = 3q + \phi = \log.\ \cot.\ \frac{1}{2}\phi$
2. $L:c = 5q - \phi = \log.\ \cot.\ \frac{1}{2}\phi$
3. $L:c = 7q + \phi = \log.\ \cot.\ \frac{1}{2}\phi$
4. $L:c = 9q - \phi = \log.\ \cot.\ \frac{1}{2}\phi$
5. $L:c = 11q + \phi = \log.\ \cot.\ \frac{1}{2}\phi$
6. $L:c = 13q - \phi = \log.\ \cot.\ \frac{1}{2}\phi$

ecc.

Si trova il logaritmo iperbolico della cotangente d'un qualunque angolo, prendendo il lagaritmo delle tavole, ſottraendo il logaritmo del ſeno tutto, e moltiplicando il reſiduo per 2, 3025851 (*f*). Per alleg-

---

(*f*) I logaritmi dei ſeni, e delle tangenti, e quelli dei numeri appartengono alla ſteſſa logiſtica, e differiſcono ſolo nel protonumero, a cui ſi aſſegna il logaritgerire una tal fatica, torna in acconcio il nuovamente ricorrere ai logaritmi. Sia u il logaritmo iperbolico della cotangente dell'angolo $\frac{1}{2}\phi$. Prendaſi dalle tavole il logaritmo d'eſſa cotangente, e fatta la detrazione

---

mo nulla. I primi logaritmi hanno per protonumero $\frac{1}{100000}$, cioè a dire l'unità diviſa pel ſeno tutto: e quindi all'unità tocca il logaritmo 5, 0000000. I ſecondi logaritmi accettano ſiccome protonumero l'unità. Si cavi la conſeguenza, che ſi fa tranſito da quei logaritmi a queſti, ſcemando per 5, 0000000 i logaritmi delle tavole dei ſeni.

Si chiamino T, t le cotangenti, l'una preſa dalle tavole, e l'altra relativa ad un circolo di raggio $= 1$, ambe corriſpondenti allo ſteſſo angolo $\frac{1}{2}\phi$, le quali debbono ſtare come i raggi 100000, 1. Avremo pertanto $\frac{T}{100000} = t$, e giacchè $1 : \frac{1}{100000} :: T : t$, ſarà paſſando ai logaritmi $\log. \frac{1}{100000} + \log. T - \log. 1 = \log t$: ma nelle tavole dei ſeni $\log. \frac{1}{100000} = 0$, $\log. 1 = 5,0000000$; dunque $\log. T - 5,0000000 = \log. t$. Ho fatta l'oſſervazione, che ſi fa paſſaggio dai logaritmi delle tavole de' ſeni a quelli dei numeri, minorando i primi per 5,0000000. Il perchè ſe log. T ſi ſeguiti a prendere nelle tavole dei ſeni, e log. t ſi prenda nelle tavole dei numeri, avremo $\log. T - 10,0000000 = \log. 1$.

Tramuteremo i logaritmi comuni in iperbolici premeſſa la rifleſſione, che riconoſcendo entrambi per protonumero l'unità, i logaritmi d'un qualunque numero ſerbano la proporzione dei logaritmi d'un numero dadel logaritmo del ſeno tutto, quello che avanza ſi chiami v. Eſſendo adunque $u = 2,3025851 . v$, avremo prendendo nelle tavole i logaritmi dei numeri, $\log. u = \log. v + 0,36221571$, e giacchè $u = nq \pm \phi$, ſarà altresì $\log. u = \log. (uq \pm \phi)$. Per determinare queſt' ultimo logaritmo, l' angolo ϕ deve eſprimerſi in parti del raggio nella ſteſſa guiſa, che parimente in parti del raggio ſi dinota l' angolo retto $q = 1,5707963$. Otterremo l'intento, ſe ridurremo l'angolo ϕ in minuti ſecondi, e dal logaritmo di cotal numero ſottrerremo coſtantemente $5,3144251$ (*g*). Così ne riſulterà $\log. \phi$, il quale facendo ritorno ai numeri, ci ſomminiſtrerà il valore dell' angolo ϕ, da cui dipende quello dell' angolo $L:c = u = nq \pm \phi$. Ho detto, che dal logaritmo del numero dei ſecondi componenti l' angolo ϕ

---

to. Ora i logaritmi comune, ed iperbolico del numero 10 ſono $1; 2,3025851$; dunque facendo
$1 : 2,3025851 :: \log. T - 10,0000000 :$
$(\log. T - 10,0000000) . 2,3025851$, il quarto termine eſprimerà il logaritmo iperbolico cercato conforme alla regola da me data.

(*g*) Abbiamo notato eſſere l' angolo retto $q = 1,5707963$ parti del raggio $= 1$. Lo ſteſſo angolo s' eguaglia a ſecondi 324000. Sia N il numero dei minuti ſecondi, ond' è compoſto l' angolo ϕ, e dall' analogia $324000 : 1,5707963 :: N : \phi$ ricaveremo il valore dell' angolo ϕ eſpreſſo in parti del raggio, cioè a dire $\frac{N . 1,5707963}{324000} = \phi$, o facendo tranſito ai logaritmi
$\log. N + \log. 1,5707963 - \log. 324000 = \log. \varphi$: ma
$\log. 324000 = 5,5105450$, $\log. 1,5707963 =$
$0,1961199$, e $5,5105450 - 0,1961199 =$
$5,3144251$; dunque $\log N - 5,3144251 = \log \phi$, come dovea dimoſtrarſi.

dee ſottrarſi 5, 3144251. Concioſſiachè nei computi, che ſono per fare, troveremo ſempre il primo logaritmo minore del ſecondo, s' accreſca la caratteriſtica di quello per 10, e fatta poſcia la ſottrazione, ne proverrà un logaritmo, la cui caratteriſtica ſupererà la vera per 10. Queſt' aumentazione ci addita, che in cambio di ſcrivere il numero corriſpondente al noſtro logaritmo nella ſede, che richiede la caratteriſtica riſultante dalla ſottrazione, lo dobbiamo traſportare dieci ſedi all' indietro.

XXII. Fatte queſte neceſſarie avvertenze per agevolare, e dedurre i calcoli rettamente, non ſarà difficile l' aſſegnare col mezzo delle approſſimazioni il valore dell' angolo ϕ riſpettivamente a qualſivoglia ſpecie di oſcillazioni. Imperciocchè attribuendo a ϕ alquanti valori ad arbitrio, e determinando col computo $nq \pm \phi$, e log. coſ. $\frac{1}{2}\phi$, ſi ſcopriranno i limiti, dentro de' quali ſta il vero valore dell' angolo ϕ; e ſe tali limiti ſono troppo rimoti, ſe ne troveranno de' più vicini, e da queſti finalmente ſi dedurrà il giuſto valore dell' angolo mentovato. Pongo ſotto gli occhi di chi legge i calcoli ſino al numero 6, e noto eſſer inutile il continuarli più avanti; atteſochè l' angolo ϕ diviene così menomiſſimo, che ſi può ſiſicamente ſupporre $L:c = nq$.

Computo pel numero 1.
$\phi = 1^\circ, 0, 40''$
in min. ſec. $= 3640$
log. $= 3,5611014$
ſottra $5,3144251$
log. $\phi = 8,2466763$
$\phi = 0,0176472$
$3q = 4,7123890$
$L{:}c = 3q + \phi = 4,7300262$

$L{:}c = 3q + \phi = \log. \cot. \frac{1}{2}\phi$.
$\phi = 1^\circ, 0, 41''$
in min. ſec. $= 3641$
log. $= 3,5612207$
ſottra $5,3144251$
log. $\phi = 8,2467956$
$\phi = 0,0176521$
$3q = 4,7123890$
$L{:}c = 3q + \phi = 4,7300411$

$\frac{1}{2}\phi = 30', 20''$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 12,0543425$
$v = 2,0543425$
log. $v = 0,3126728$
aggiungi $0,3622157$
log. $u = 0,6748885$
$L{:}c = u = 4,7302984$
errore $= + 2622$
altro errore $= - 171$
differenza $= 2793$.

$\frac{1}{2}\phi = 30', 20''\frac{1}{2}$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 12,0542232$
$v = 2,0542232$
log. $v = 0,3126476$
aggiungi $0,3622157$
log. $u = 0,6748633$
$L{:}c = u = 4,7300240$
errore $= - 171$

Differenza $= 1''$ fra i due valori dell' angolo ϕ. Facciaſi $2793 : 2622 :: 1'' : \frac{2622''}{.2793} = 0,9388''$, ed il quarto termine s'eguaglierà a quella quantità, che aggiunta a $1^\circ, 0, 40''$ mi dà il vero valore dell' angolo
$\phi = 1^\circ, 0', 40, 9388''$
in min. ſec. $= 3640,9388''$
log. $= 3,5612132$
ſottra $5,3144251$
log. $\phi = 8,2467881$
$\phi = 0,0176518$
$3q = 4,7123890$
$L{:}c = 3q + \phi = 4,7300408$ grandezza adequatamente giuſta dell' angolo $L{:}c$ eſpreſſo in parti del raggio $= 1$.

Computo pel numero 2. $L{:}c = 5q - \phi \log.\cot.\frac{1}{2}\phi$.

$\phi = 0,\ 2',\ 40''$	$\phi = 0,\ 2',\ 41''$
in min. ſec. $= 1\ \ 60$	in min. ſec. $= 1\ \ 61$
log. $= 2,2041200$	log. $= 2,2068259$
ſottra $5,3144251$	ſottra $5,3144251$
log. $\phi = 6,8896949$	log. $\phi = 6,8924008$
$\phi = 0,0007757$	$\phi = 0,0007806$
$5q = 7,8539816$	$5q = 7,8539816$
$L{:}c = 5q - \phi = 7,8532059$	$L{:}c = 5q - \phi = 7,8532010$

$\frac{1}{2}\phi = 0,\ 1',\ 20''$	$\frac{1}{2}\phi = 0,\ 1',\ 20''\frac{1}{2}$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 13,4113351$	log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 13,4086292$
$v = 3,4113351$	$v = 3,4086292$
log. $v = 0,5329244$	log. $v = 0,5325798$
aggiungi $0,3622157$	aggiungi $0,3622157$
log. $u = 0,8951401$	log. $u = 0,8947955$
$L{:}c = u = 7,8548897$	$L{:}c = u = 7,8486600$
errore $= +\ \ 16838$	errore $= -\ \ 45410$
altro errore $= -\ \ 45410$	
differenza $=\ \ 62248$	

Differenza $= 1''$ fra i due valori dell' angolo ϕ. Facciaſi $62248 : 16838 :: 1'' : \frac{16838''}{62248} = 0,\ 27050''$ quantità da aggiugnerſi a $0,\ 2',\ 40''$ onde s' abbia il giuſto valore dell' angolo

$\phi = 0,2',40,27050''$
in min. ſec. $= 160,27050$
log. $= 2,2048536$
ſottra $5,3144251$
log. $\phi = 6,8904285$
$\phi = 0,0007770$
$5q = 7,8539816$
$L{:}c = 5q - \phi = 7,8532046$ miſura ſiſicamente e ſatta dell' angolo $L{:}c$ eſpreſſo in parti del raggio.

Computo pel numero 3.	$L:c = 7q + \phi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\phi$
$\phi = 0,\ 0,\ 6''$	$\phi = 0,\ 0,\ 7''$
log. $= 0,7781512$	log. $= 0,8450980$
ſottra $5,3144251$	ſottra $5,3144251$
log. $\phi = 5,4637261$	log. $\phi = 5,5306729$
$\phi = 0,0000291$	$\phi = 0,0000339$
$7q = 10,9955743$	$7q = 10,9955743$
$L:c = 7q + \phi = 10,9956034$	$L:c = 7q + \phi = 10,9956082$
$\frac{1}{2}\phi = 0,\ 0,\ 3''$	$\frac{1}{2}\phi = 0,\ 0,\ 3\frac{1}{2}''$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 14,8373039$	log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 14,7703571$
$v = 4,8373039$	$v = 4,7703571$
log. $v = 0,6846034$	log. $v = 0,6785509$
aggiungi $0,3622157$	aggiungi $= 0,3622157$
log. $u = 1,0468191$	log. $u = 1,0407666$
$L:c = u = 11,1383051$	$L:c = u = 10,9841553$
errore $= +\ 1427017$	errore $= -\ 113529$
altro errore $= -\ 113529$	

differenza $= 1540546$ Differenza $= 1''$ fra i due valori dell' angolo ϕ. Facciaſi $1540546 : 1427017 :: 1'' : \frac{1427017''}{1540546} = 0,\ 9263060''$ porzione di ſecondo, che aggiunta a $0,\ 0,\ 6''$, mi ſomminiſtra la miſura quanto baſta dell' angolo

$\phi = 0,0',6,9263060''$

log. $= 0,8405017$

ſottra $5,3144251$

log. $\phi = 5,5260766$

$\phi = 0,0000336$

$7q = 10,9955743$

$L:c = 7q + \phi = 10,9956079$ grandezza fiſicamente eſatta dell' angolo $L:c$ eſpreſſo in parti del raggio. Si troverebbe con maggior preciſione il valore dell' angolo

$\phi = 6,9202852''$, ſupponendo $L{:}c = u = 10,9956079$; ed indi retrocedendo con metodo contrario a quello da me tenuto, ſino a tanto che ci ſi preſenta il valore di $\frac{1}{2}\phi$ eſpreſſo in ſecondi. Nei numeri ſeguenti a cagione della ſomma picciolezza dell' angolo ϕ, mi ſervirò di un tale artificio.

Computo pel numero 4.	$L{:}c = 9q - \phi = \log.\cot.\frac{1}{2}\phi$.
$\phi = 0, 0, \frac{2}{7}''$	$\phi = 0, 0, \frac{1}{3}''$
$\log. = -0,5440680$	$\log. = -0,4771212$
ſottra $5,3144251$	ſottra $5,3144251$
$-5,8584931$	$-5,7915463$
aggiungi $10,0000000$	$10,0000000$
$\log.\phi = 4,1415069$	$\log.\phi = 4,2084537$
$\phi = 0,000001385$	$\phi = 0,000001616$
$9q = 14,137166941$	$9q = 14,137166941$
$L{:}c = 9q - \phi = 14,137165556$	$L{:}c = 9q - \phi = 14,137165325$
$\frac{1}{2}\phi = 0, 0, \frac{1}{2}''$	$\frac{1}{2}\phi = 0, 0, \frac{1}{6}''$
$\log.\cot.\frac{1}{2}\phi = 16,1595232$	$\log.\cot.\frac{1}{2}\phi = 16,0925764$
$v = 6,1595232$	$v = 6,0925764$
$\log. v = 0,7895471$	$\log. v = 0,7848010$
aggiungi $0,3622157$	aggiungi $0,3622157$
$\log. u = 1,1517628$	$\log. u = 1,1470167$
$L{:}c = u = 14,182828217$	$L{:}c = u = 14,028676138$
errore $= +\ 45662661$	errore $= -\ 108489187$
altro errore $= -\ 108489187$	

differenza $= 154151848$ Differenza $= 231$ fra i due valori del angolo ϕ eſpreſſo in parti del raggio. Facciaſi $154151848 : 45662661 :: 231 : 68$ quantità che aggiunta a 1385 mi dà l' aggiuſtato valore dell' angolo

$\phi = 0,000001453$

$\phi = 0{,}000001453$ Sottraendo queſto da $9q$, reſta $L{:}c = 9q - \phi = 14{,}137165488$. Pongaſi adunque

$L{:}c = u = 14{,}137165488$

$\log. u = 1{,}1503623$

ſottra $0{,}3622157$

$\log. v = 0{,}7881466$

$v = 6{,}1396921$

$\log. \cot. \frac{1}{2}\phi = 16{,}1396921$

$\frac{1}{2}\phi = 0{,}1495316''$

$\phi = 0{,}2990633''$ grandezza eſattiſſima dell' angolo ϕ eſpreſſo in ſecondi.

Computo pel numero 5. $L{:}c = 11q + \phi = \log. \cot. \frac{1}{2}\phi$.

Riducendo a calcolo nel preſente, e nel ſeguente numero il valore dell' angolo $L{:}c$, traſcuro ſiccome riſpettivamente minimo l' angolo ϕ.

$L{:}c = u = 17{,}2787596$

$\log. u = 1{,}2375125$

ſottra $0{,}3622157$

$\log. v = 0{,}8752968$

$v = 7{,}5046691$

$\log. \cot. \frac{1}{2}\phi = 17{,}5046691$

$\frac{1}{2}\phi - 0{,}006461837''$

$\phi = 0{,}012923673''$ miſura adequatamente giuſta dell' angolo piccioliſſimo ϕ eſpreſſo in ſecondi.

Computo pel numero 6. $L{:}c = 13q - \phi = \log. \cot. \frac{1}{2}\phi$.

$L{:}c = u = 20{,}4203522$

$\log. u = 1{,}3100632$

ſottra $0{,}3622157$

$\log. v = 0{,}9478475$

$v = 8{,}8684449$

$\log. \cot. \frac{1}{2}\phi = 18{,}8684449$

$\frac{1}{2}\phi = 0{,}000279242''$

$\phi = 0{,}000558483''$ valore fiſicamente eſatto dell' angolo ϕ eſpreſſo in parti di minuto ſecondo.

Diſpongo ordinatamente nella tavola, che ſegue, le ſei determinate grandezze dell' angolo $L:c$ eſpreſſo in parti del raggio.

Valori dell' angolo $L:c$ eſpreſſo in parti del raggio $= 1$.

(1)$L:c = 3q + \phi = 4,7300408$ log. $= 0,6748648$
(2)$L:c = 5q - \phi = 7,8532046$ log. $= 0,8950469$
(3)$L:c = 7q + \phi = 10,9956079$ log. $= 1,0412192$
(4)$L:c = 9q - \phi = 14,1371655$ log. $= 1,1503623$
(5)$L:c = 11q + \phi = 17,2787596$ log. $= 1,2375125$
(6)$L:c = 13q - \phi = 20,4203522$ log. $= 1,3100632$
ecc. ecc.

Determinare il numero di vibrazioni fatte da un Cilindro nel tempo d' un minuto ſecondo riſpettivamente a ciaſcun modo, in cui può oſcillare.

XXIII. Si chiami m il numero, a cui s' eguaglia l' angolo $L:c$, onde s' abbia $L:c = m$, e conſeguentemente $L = mc$. E concioſſiachè al numero XIII. s' è poſto $c^4 = ELf:M$, ſi ſcoprirà $L^4 = m^4ELf:M$, e perciò $f = ML^3:m^4E$. Abbiamo ſtabilito al fine del numero III. $E = KrM^2:g^2L^2$. Fatta la ſurrogazione d' un tal valore, troveremo $f = L^5g^2:Km^4Mr$. Dalla prima equazione eſprimente la lunghezza f del pendolo ſemplice iſocrono impareremo ſerbar eſſa lunghezza la proporzione compoſta, diretta delle maſſe, e del cubo delle lunghezze dei cilindri, ed inverſa del quadrato—quadrato del numero m, e della forza E, il cui valore ſi determina col mezzo degli eſperimenti, qualmente ho inſegnato nei numeri V. VI. e VII. La ſeconda eſpreſſione ci addita, che la lunghezza f del pendolo ſemplice iſocrono ſta in ragione compoſta, diretta della quinta poteſtà delle lunghezze L dei cilindri, e del quadrato della loro gravità ſpecifica g, ed inverſa del quadrato—quadrato del numero m, della maſſa M, e della rigidità r della materia, onde ſono formati. Non ho fatta menzione del coefficiente K, perchè ho già notato al numero III. mantenerſi ſempre coſtante in tutti i cilindri.

Eſſendo la gravità ſpecifica eguale alla maſſa diviſa pel volume, ed eſſendo la baſe d'un cilindro proporzionale al quadrato del ſuo diametro, avremo g come $M:LD^2$, e per conſeguenza M come gLD^2. Soſtituiti nella noſtra ſeconda eſpreſſione della lunghezza f del pendolo ſemplice iſocrono prima in cambio di g, poſcia in cambio di M, i valori proporzionali, troveremo f come $L^3M:m^4D^4r$, f come $L^4g:m^4D^2r$.

Dalle quattro eſpreſſioni generali ſi dedurranno agevolmente le particolari. Se per eſempio due cilindri ſieno compoſti della ſteſſa materia, e ſi vibrino ſimilmente, ripiegandoſi in curve, che taglino l'aſſe in numero eguale di punti; ſaranno coſtanti i valori delle ſpecie g, r, m, e ſi ſcoprirà f come $L^4:D^2$, cioè a dire le lunghezze dei pendoli ſemplici iſocroni in ragione compoſta, diretta quadruplicata delle lunghezze dei cilindri, ed inverſa duplicata dei loro diametri.

XXIV. Sia h la lunghezza del pendolo ſemplice, che nel fare una vibrazione c'impiega un minuto ſecondo, dimodochè ſia $h = 3,\ 16625$ piedi del Reno, o pure $h =$ piedi 3 linee 8, 57 del piede Reale di Parigi: e giacchè le durate delle oſcillazioni ſerbano la ragione ſudduplicata delle lunghezze dei pendoli, il tempo d'una vibrazione d'un cilindro s'eguaglierà a ſecondi

$$\sqrt{f}:\sqrt{h} = \frac{1}{m^2}\sqrt{(ML^3:hE)} = \frac{1}{m^2}\sqrt{(L^5g^2:KhMr)}\,.$$

Conſeguentemente avremo il numero delle vibrazioni fatte dal cilindro in un minuto ſecondo, o ſia il ſuono d'eſſo cilindro, ch'io chiamo $S = m^2\sqrt{(hE:ML^3)} = m^2\sqrt{(KhrM:L^5g^2)}$.

Se nell'eſpreſſione ſeconda in vece di g, o di M ſoſtituiremo i valori proporzionali $M:LD^2$, gLD^2, ci ſi preſenterà S come $m^2\sqrt{(rD^4:ML^3)}$, come $\frac{m^2D}{L^2}\sqrt{(r:g)}$.

La formola $S = m^2\sqrt{(hE:ML^3)}$ ſerve per iſcoprire il preciſo numero di vibrazioni, che fa un cilindro nel tempo d'un minuto ſecondo, potendoſi determinare il valore della forza E col mezzo degli eſperimenti, la grandezza della maſſa M col mezzo del peſo, la lunghezza L con diligente miſura, ed eſſendo cogniti la lunghezza h del pendolo a ſecondi, ed il numero m, qualmente che il cilindro ſi vibra piuttoſto in un modo, che nell'altro.

L'ultima maniera, colla quale ſi dinotano i ſuoni dei cilindri, cioè S come $\frac{m^2D}{L^2}\sqrt{(r:g)}$, ci mette ſotto degli occhi nel ſuo più ſemplice aſpetto la legge, che dà regola ai ſuoni ſteſſi, i quali ſtanno in proporzione compoſta, diretta duplicata del numero m, ſemplice de' diametri D dei cilindri, dimezzata della rigidità r della materia che li compone, e reciproca duplicata delle loro lunghezze L, e dimezzata delle loro gravità ſpecifiche g.

Corollarj, che ſi deducono dalla formola S come $\frac{m^2D}{L^2}\sqrt{(r:g)}$.

XXV. Dal predetto ultimo modo d'eſprimere i ſuoni dei cilindri s'inferiſcono parecchi corollarj.

1. Cavo ſubito quella conſeguenza, che ha l'aria di paradoſſo, e che da qualcuno non ſi crederebbe, ſe non veniſſe confermata dall'eſperienza, ed è ch' eſſendo il reſto pari, i cilindri ſono tanto più acuti, quanto il diametro loro è maggiore. Si dileguerà per altro l'apparente ripugnanza qualora ſi rifletta, che la forza elaſtica E creſce all'aumentarſi del diametro D, avendola dimoſtrata proporzionale a D^4r nel numero III. e creſce a proporzione più di quello s'ingrandiſca la maſſa M, laonde nell'ipoteſi, che preſentemente ſi conſidera, abbiamo $S = m^2\sqrt{(hE:ML^3)}$ proporzionale a D.

2. Poſtochè due cilindri oſcillino ſimilmente adattandoſi a curve, che interſecano l'aſſe in numero eguale di punti, ſarà coſtante la ſpecie m, e ne riſulterà S come $\frac{D}{L^2}\sqrt{(r:g)}$.

3. Nella ſteſſa ſuppoſizione troveremo la rigidità r come $S^2L^4g:D^2$. Col mezzo dei ſuoni adunque ſi può ſcoprire la proporzione fra le rigidità di varie materie, le quali rigidità, quando i cilindri ſieno egualmente lunghi e groſſi, accetteranno la ragione S^2g, che ſi compone della duplicata dei ſuoni, e della ſemplice delle gravità ſpecifiche. Queſte mie determinazioni ſi accordano con ciò, che ha dimoſtrato il Co: *Jacopo Riccati* mio Padre nella ſua Diſſertazione intorno le leggi delle forze elaſtiche inſerita nel *Tomo I. dei Comentarj dell' Accademia di Bologna*, e riſtampata nel Tomo III. delle ſue Opere.

4. Se due cilindri, che ſi vibrano ſimilmente, ſaranno formati della ſteſſa materia, onde ſieno egualmente rigidi, ed egualmente gravi in iſpezie, o pure ſe in eſſi le rigidità ſtaranno come le gravità ſpecifiche, ſcopriraſſi S come $D:L^2$, cioè a dire i ſuoni in ragione compoſta, diretta dei diametri dei cilindri, ed inverſa duplicata delle loro lunghezze.

5. Se inoltre i due cilindri ſaranno ſimili, avremo S come $1:L$, o pure S come $1:D$, vale a dire i ſuoni dei cilindri ſimili ſi riguarderanno nella ragione reciproca dei lati omologhi. Queſta legge abbraccia tutti i corpi ſimili della ſteſſa materia formati, non eccettuate le corde, per l'eſatta ſimilitudine delle quali non baſta, che i diametri ſieno proporzionali alle lunghezze, ma biſogna altresì che le loro particole ſieno ugualmente rigide, il che interviene, quando le corde ſi ſtendono con forze in ragione delle loro baſi. Coſa maraviglioſa ſi è, che ſi dia un caſo, nel quale s'uniſcano in un ſolo i canoni cotanto diverſi, donde prendono regola i ſuoni di varj corpi differenti nella ſtrut-

tura, e nelle circoſtanze, che nelle loro vibrazioni influiſcono.

6. I ſuoni dello ſteſſo cilindro ſi riferiſcono nella proporzione dei quadrati m^2. Eſſendo $m = nq \pm \phi$, ſe gli angoli ϕ foſſero talmente piccioli, che ſi poteſſero totalmente traſcurare, abbraccierebbero i ſuoni il rapporto dei quadrati n^2: e giacchè n s' eguaglia in ſerie ai numeri impari 3, 5, 7, 9, 11, 13 ecc., i predetti ſuoni ſarebbero come i quadrati di tali numeri, cioè a dire come 9, 25, 49, 81, 121, 169 ecc. Meſſi a computo gli angoli ϕ, e principalmente il più grande, che corriſponde al numero (1.), ſi trovano alterate per poco più di mezzo comma $\frac{81}{80}$, il cui log. = 53950, le proporzioni 9:25, 9:49, 9:81 ecc., nelle quali il ſuono grave 9 paragonaſi cogli acuti. Le altre proporzioni rieſcono preſſochè giuſte; imperciocchè il maggior divario, che modifica la ragione 25 : 49, s' eguaglia in logaritmi a 885 parte 61.^{ma} del comma.

Regiſtro nella ſeguente tavola i ſei ſuoni, che rende un cilindro, mentre oſcillando s' adatta a quelle curve, che tagliano l' aſſe in 2, 3, 4, 5, 6, 7 punti. Paragono i ſuoni acuti col grave, noto le alterazioni dei rapporti 9:25, 9:49, 9:81 ecc., ed oſſervo a quali ſemplici proporzioni ſi accoſtino i mentovati rapporti modificati.

Paragone del ſuono più grave d' un cilindro coi ſuoni acuti.

Quantità proporzionale ai ſuoni.	Loro logaritmi.	
(1)$m^2=(3q+\phi)^2$	log.1, 3497296	
(2)$m^2=(5q-\phi)^2$	log.1, 7900938	$=$ log. $\frac{25}{9}$ — 33333, ſuono, che cala dalla Quarta maggiore ſopra l' Ottava $\frac{25}{9}$ per qualche coſa più di mezzo Comma, il cui log. $=$ 53950.
(3)$m^2=(7q+\phi)^2$	log.2, 0824384	$=$ log. $\frac{49}{9}$ — 32448. Queſto intervallo ſupera la Quarta ſopra la doppia Ottava per 57100 quantità poco più grande del Comma.
(4)$m^2=(9q-\phi)^2$	log.2, 3007246	$=$ log. $\frac{81}{9}$ $=$ log.9 — 32475, Seconda maggiore ſopra l' Ottava triplicata.
(5)$m^2=(11q+\phi)^2$	log.2, 4750250	$=$ log. $\frac{121}{9}$ — 32475, Seſta maggiore preſſochè giuſta ſopra la tripla Ottava, creſcendo ſolamente per 3566, parte decimaquinta del Comma.
(6)$m^2=(13q-\phi)^2$	log.2, 6201264	$=$ log. $\frac{169}{9}$ — 32475, Seconda ſuperflua ſopra la quadrupla Ottava, calante per 6700 ottava parte del Comma dalla ragione $\frac{7}{6}.16=\frac{56}{3}$ propria d' eſſo intervallo.

XXVI. In grazia dell' eſperimento, che a ſuo luogo riferirò, metto ſotto gli occhi di chi legge la ſeguente Tavola, in cui, poſto che il ſuono più grave d' un cilindro ſia uniſono ad una corda, la cui lunghezza 60, diſpongo ordinatamente le lunghezze delle porzioni della corda ſteſſa uniſone agli altri ſuoni d' eſſo cilindro.

Porzioni della corda 60 uniſone ai ſuoni acuti d' un cilindro nella ſuppoſizione, che il ſuono più grave ſia uniſono alla corda intera.

	Lunghezze delle corde
(1)	60
(2)	21, 75 +
(3)	11, 10 +
(4)	6, 717 −
(5)	4, 496 +
(6)	3, 219 +
ecc.	ecc.

XXVII. Stabiliſce rettamente il celebratiſſimo Signor *Leonardo Eulero*, che riſpettivamente alle lamine elaſtiche ſia $S = m^2 \sqrt{(bE:ML^3)}$. Ma aſſerendo egli alla pag. 269. che la forza elaſtica E ſta in ragione, compoſta della rigidità r della materia componente le lamine della loro larghezza D, e del quadrato G^2 della loro groſſezza, viene ad abbracciare la proporzione S come $\frac{m^2}{L^2} \sqrt{(Gr:g)}$, la quale non ſi accorda colla verità, ed è riprovata dall' eſperienza. Le lamine della ſteſſa materia ſimili, e ſimilmente vibrantiſi, non s' uniformerebbero alla legge comune a tutti i corpi ſimili, i cui ſuoni ſerbano la ragione reciproca dei lati omologhi. Oltre a ciò i ſuoni delle lamine, che differiſcono ſolo nella groſſezza, dovrebbero riferirſi nella proporzione dimezzata delle groſſezze, e gli eſperimenti c' inſegnano, che i ſuoni ſi corriſpondono nella ragione ne delle groſſezze. Col metodo da me praticato in riguardo ai cilindri ſi dimoſtra, che nelle lamine la forza elaſtica E ſta come rDG^3. Fatto uſo di un tal canone, troveremo S come $\frac{m^2G}{L^2} \surd (r{:}g)$, rapporto, che ha il fondamento d' una rigoroſa dimoſtrazione, e coll' eſperienza s' accorda mirabilmente.

Aggiungo l' importante avvertenza, che nella determinazione dei ſuoni delle lamine elaſtiche non ha veruna parte la loro larghezza; dimodochè due lamine, la cui differenza conſiſta ſolo nella larghezza, rendono lo ſteſſo ſuono.

Determinare riſpettivamente a ciaſcun modo, in cui può oſcillare un cilindro, i nodi, o punti ſtabili intorno ai quali ſi vibra.

XXVIII. Dalle coſe ſopra ſpiegate raccoglieſi, che il numero de' punti immobili s' eguaglia a 2, 3, 4, 5, 6, 7 ecc. ſecondo che un cilindro ſi vibra o giuſto la prima, o giuſto la ſeconda, o giuſto la terza ecc. ſpecie delle oſcillazioni, che può concepire. Se il numero dei nodi è impari, un nodo cade alla metà del cilindro, e la ſua poſizione è determinata. Reſterebbe adunque da ſtabilirſi il ſito di due nodi nelle ſpecie di vibrazioni prima e ſeconda, di quattro nodi nelle ſpecie terza e quarta, di ſei nodi nelle ſpecie quinta e ſeſta; ſenonchè ſendo collocati eſſi nodi a coppia a coppia a pari diſtanze dalla metà del cilindro, l' uno a deſtra, e l' altro a ſiniſtra, baſta a determinare un nodo nella prima e nella ſeconda ſpecie, due nodi nella terza e nella quarta ſpecie, tre nodi nella quinta e nella ſeſta ſpecie di oſcillazioni, e così di ſeguito.

Nel ſito del punto immobile è l' ordinata $y = 0$, ed in tal ipoteſi abbiamo per i corollari terzo del numero XVI. e ſecondo del numero XVIII. le due equazioni

$e^{z:c}+e^{-z:c}=\pm\frac{2\,\text{coſ.}^{\,z:c}}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}$, $e^{z:c}-e^{-z:c}=\pm\frac{2\,\text{ſen.}^{\,z:c}}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}$. Il ſegno negativo negli omogenei di comparazione è adattato a que' caſi, ne' quali ſono negative le quantità coſ. $z:c$, ſen. $z:c$. Se i predetti coſeni, e ſeni ſi conſidereranno ſempre poſitivi, qualunque ſia la lor direzione, valerà il ſegno poſitivo, del quale farò uſo coſtantemente. Servono le due equazioni, la prima pel genere di vibrazioni indicato coi numeri impari, la ſeconda pel genere di vibrazioni dai numeri pari contraſſegnato.

Si ſtabiliſce la poſitura d'un nodo, aſſegnando all'angolo $z:c$ quella preciſa miſura, onde ſecondo i varj generi di vibrazioni ſi verifichi o l'una, o l'altra delle premeſſe equazioni. Troveremo poi la grandezza ſiſicamente eſatta dell'angolo mentovato, ponendo in opera il metodo dei limiti uſato al numero XXII. per iſcoprire il valore dell'angolo ϕ. Oſſerverà il Lettore nei ſeguenti computi, ch' io riſtringo la miſura dell'angolo $z:c$ fra due confini, che differiſcono per un ſolo minuto ſecondo, e che dagli errori, nei quali s' incorre abbracciando l'uno, o l'altro limite, ne deduco il valore adequatamente giuſto dell' angolo $z:c$.

XXIX. S'eſprima in minuti ſecondi l'angolo $z:c$, e col metodo inſegnato al numero XXI. e praticato al numero XXII. in riguardo all'angolo ϕ ſi trovi il logaritmo dell'angolo $z:c$ eſpreſſo in parti del raggio $=1$. Il logaritmo del numero $e = 2, 7182818$ s'eguaglia a $0, 4342945$, ed il logaritmo di queſt' ultimo numero pareggia $-0, 3622157$, e quindi il logaritmo del logaritmo del numero e, o ſia
log. log. $e=-0, 3622157$. Sottraendo adunque dal logaritmo dell'angolo $z:c$ eſpreſſo in parti del raggio il numero $0, 3622157$, ne riſulterà una quantità $=$ log. $z:c$ $+$ log. log. e. Si faccia tranſito coll' ajuto delle tavole dai logaritmi ai numeri, e ci ſi preſenterà il valore della grandezza $z:c$ log. e, e nuovamente paſſando dai logarit-

mi ai numeri, ſcopriremo il valore di $e^{z:c}$. Dato queſto, rieſce facile il ritrovare il valore di $e^{-z:c} = \frac{1}{e^{z:c}}$, e conſeguentemente quello di $e^{z:c} \pm e^{-z:c}$.

I valori dell'uno, e dell'altro omogeneo di comparazione $\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}$, $\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}$ ſi determinano col mezzo del ſeguente artificio. Prendaſi dalle tavole il logaritmo del coſ. $z:c$, e del ſen. $z:c$, ed indi ſottratto $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c$, dal reſiduo nuovamente ſi levi 4, 6989700, e quello che reſta s' eguaglierà a log. $\left(\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right)$, o pure a log. $\left(\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right)$ (*b*). I predetti coſeni, e ſeni

---

(*b*) Chiamo U, V i logaritmi preſi dalle tavole dei ſeni delle quantità coſ. $z:c$, coſ. $L:c$, e per le coſe dimoſtrate nell' annotazione ſegnata (f), ed inſerita nel numero XXI. ſaranno $U - 10,0000000$, $V - 10,0000000$ i logaritmi tolti dalle tavole dei numeri, proprj dei coſeni relativi al raggio $= 1$ degli ſteſſi angoli $z:c$, $L:c$; dimodochè ſi avrà log. coſ. $z:c = U - 10,0000000$, log. coſ. $L:c = V - 10,0000000$: ma in riguardo ai logaritmi comuni, il cui protonumero $= 1$ log. $\left(\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right) =$ log. coſ. $z:c +$ log. $2 - \frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c$; dunque ſurrogati nell'omogeneo di comparazione in cambio di log. coſ. $L:c$, di log. 2 i loro valori $U - 10,0000000$; $V - 10,0000000$; $0,3010300$, e ridotti i computi, troveremo log. $\left(\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right) = U - \frac{1}{2}V - 4,6989700$;

ſaranno relativi al raggio $= 1$, ſiccome al principio del numero XIII. è ſtato da me preſcritto. Fatto poſcia il paſſaggio dai logaritmi ai numeri, ci ſi affaccieranno i valori dei due omogenei di comparazione $\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}$, $\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}$.

Determinato col metodo dei limiti il valore fiſicamente eſatto dell' angolo $z:c$ eſpreſſo in minuti ſecondi, e trovato poi il logaritmo del medeſimo angolo eſpreſſo in parti del raggio $= 1$, ſi ſottri log. $L:c$, ed il reſiduo s' eguaglierà a log. $z:L$. I diverſi valori, che può avere log. $L:c$ riſpettivamente alle varie ſpecie di oſcillazioni, gli ho regiſtrati al fine del numero XXII. Aggiungaſi log. $2 = 0,3010300$, e ne riſulterà il valore di log. $z:\frac{1}{2}L$, col mezzo del quale le tavole ci ſuggeriranno quello di $z:\frac{1}{2}L$, quantità, che determina la cercata proporzione fra la linea nota $\frac{1}{2}L = CA$ (*fig.* 3, 4, 5, 6, 7, 8 ecc.) e la lunghezza di z uguale per eſempio a CE, all' eſtremità della quale il punto immobile E corriſponde.

XXX. Dopo che ho ſpiegata la maniera d' iſtituire i computi paſſo ad effettuare i computi ſteſſi, che m' hanno coſtata una lunga fatica, e ch' io continuo ſino alla ſpecie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

---

il che ecc. La ſteſſa dimoſtrazione vale per comprovare il valore aſſegnato a log. $\left(\frac{2.\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right)$.

Computo per la ſpecie I. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c=$	$74,\ 45',\ 23''$	$z:c=$	$74,\ 45,\ 24''$
in min. ſec.=	$269123''$	in min. ſec.=	$269124''$
log.=	5,4299508	log.=	5,4299524
ſottra	5,3144251	ſottra	5,3144251
log. $z:c=$	0,1155257	log. $z:c=$	0,1155273
ſottra	0,3622157	ſottra	0,3622157
log.$z:c$+log.log.$e=$	9,7533100	log.$z:c$+log.log. $e=$	9,7553116
$z:c$ log. $e=$	0,5666436	$z:c$ log. $e=$	0,5666457
$e^{z:c}=$	3,6867496	$e^{z:c}=$	3,6867674
$e^{-z:c}=$	0,2712417	$e^{-z:c}=$	0,2712403
$e^{z:c}+e^{-z:c}=$	3,9579913	$e^{z:c}+e^{-z:c}=$	3.9580077
log. coſ. $z:c=$	9,4198295	log. coſ. $z:c=$	9,4198218
ſottr.$\frac{1}{2}$log.coſ.$L:c=$	4,1233764	ſottr.$\frac{1}{2}$log.coſ. $L:c=$	4,1233764
	5,2964531		5,2964454
ſottra	4,6989700	ſottra	4,6989700
$\log.\left(\frac{2\ \text{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}\right)=$	0,5974831	$\log.\left(\frac{2\ \text{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}\right)=$	0,5974754
$\frac{2\ \text{coſ.}\ L:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}=$	3,9580665	$\frac{2\ \text{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}=$	3,9579964
errore=+	752	errore=−	113
altro errore=−	113		
differenza=	865		

Facciaſi $865 : 752 :: 1'' : \frac{752''}{865} = 0,\ 8694''$ porzione di ſecondo, per cui va accreſciuto il minor valore dell' angolo $z:c$, onde ſia

$z:c=$	$269123,8694''$
log.=	5,4299522
ſottra	5,3144251
log. $z:c=$	0,1155271
ſottra log. $L:c=$	0,6748648
log. $z:L=$	9,4406623

aggiun. log. $2 = 0{,}3010300$

log. $z : \frac{1}{2} L = 9{,}7416923$

$z : \frac{1}{2} L = CE : CA = 0{,}5516864$ (*fig.* 3.)

Computo per la ſpecie II. delle vibrazioni dei cilindri

$z:c = 165^\circ,32',5''$	$z:c = 165^\circ,32',6''$
in min. ſec. $= 595925$	in min. ſec. $= 595926$
log. $= 5{,}7751916$	log. $= 5{,}7751924$
ſottra $5{,}3144251$	ſottra $5{,}3144251$
log. $z:c = 0{,}4607665$	log. $z:c = 0{,}4607673$
ſottra $0{,}3622157$	ſottra $0{,}3622157$
log. $z:c \div$ log. log. $e = 0{,}0985508$	log. $z:c \div$ log. log. $e = 0{,}0985516$
$z:c$ log. $e = 1{,}2547317$	$z:c$ log. $e = 1{,}2547340$
$e^{z:c} = 17{,}9775993$	$e^{z:c} = 17{,}9776945$
$e^{-z:c} = 0{,}0556248$	$e^{-z:c} = 0{,}0556245$
$e^{z:c} - e^{-z:c} = 17{,}9219745$	$e^{z:c} - e^{-z:c} = 17{,}9220700$
log. ſen. $z:c = 9{,}3975807$	log. ſen. $z:c = 9{,}3975725$
ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c = 3{,}4452230$	ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c = 3{,}4452230$
$5{,}9523577$	$5{,}9523495$
ſottra $4{,}6989700$	ſottra $4{,}6989700$
log. $\left(\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right) = 1{,}2533877$	log. $\left(\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right) = 1{,}2533795$
$\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}} = 17{,}9220512$	$\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}} = 17{,}9217128$
errore $= + \quad 767$	errore $= - \quad 3572$
altro errore $= - \quad 3572$	
differenza $= 4339$	

Facciaſi $4339 : 767 :: 1'' : \frac{767''}{4339} = 0,\ 1768''$ parte di ſecondo, che deve aggiungerſi al più piccolo valore dell'angolo $z:c$, onde s'abbia

$z:c = 595925{,}1768''$

log. $= 5{,}7751918$

ſottra $5{,}3144251$

log. $z:c = 0{,}4607667$

ſottra log. $L:c = 0,8950469$

log. $z:L = 9,5657198$

aggiungi log. $2 = 0,3010300$

log. $z:\frac{1}{2}L = 9,8667498$

$z:\frac{1}{2}L = CE:CA = 0,7357831$ (*fig.* 4)

Computo per la ſpecie III. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 89^\circ,10',41''$	$z:c = 89^\circ,10',42''$
in min. ſec. $= 321041''$	in min. ſec. $= 321042''$
log. $= 5,5065605$	log. $= 5,5065618$
ſottra $5,3144251$	ſottra $5,3144251$
log. $z:c = 0,1921354$	log. $z:c = 0,1921367$
ſottra $0,3622157$	ſottra $0,3622157$
log.$z:c$+log.log.$e = 9,8299197$	log.$z:c$+log.log.$e = 9,8299210$
$z:c$ log. $e = 0,6759580$	$z:c$ log. $e = 0,6759600$
$e^{z:c} = 4,7419617$	$e^{z:c} = 4,7419836$
$e^{-z:c} = 0,2008832$	$e^{-z:c} = 0,2108822$
$e^{z:c} + e^{-z:c} = 4,9528449$	$e^{z:c} + e^{-z:c} = 4,9528658$
log. coſ. $z:c = 8,1566857$	log. coſ. $z:c = 8,1565394$
ſottr. $\frac{1}{2}$log.coſ. $L:c = 2,7628494$	ſottr. $\frac{1}{2}$log.coſ. $L:c = 2,7628494$
$5,3938363$	$5,3936900$
ſottra $4,6989700$	ſottra $4,6989700$
log. $\left(\frac{2\,\mathrm{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\mathrm{coſ.}\,L:c}}\right) = 0,6948663$	log. $\left(\frac{2\,\mathrm{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\mathrm{coſ.}\,L:c}}\right) = 0,6947200$
$\frac{2\,\mathrm{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\mathrm{coſ.}\,L:c}} = 4,9529772$	$\frac{2\,\mathrm{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\mathrm{coſ.}\,L:c}} = 4,9513090$
errore $= +\ 1323$	errore $= -\ 15568$
altro errore $= -\ 15568$	
differenza $= 16891$	

Facciaſi $16891 : 1323 :: 1'' : \frac{1323''}{16891} = 0,0783''$ porzione di ſecondo da aggiungerſi al minor valore dell' angolo $z:c$, onde s' abbia

$z:c = 321041{,}0783''$
log. = 5,5065606
ſottra 5,3144251

log. $z:c =$ 0,1921355
ſottra log. $L:c =$ 1,0412192

log. $z:L =$ 9,1509163
aggiungi log. 2 = 0,3010300

log. $z:\frac{1}{2}L =$ 9,4519463
$z:\frac{1}{2}L = CE:CA =$ 0,2831042 (*fig.* 5)

Segue il computo per la ſpecie III. delle virbazioni dei cilindri.

$z:c = 255°,30',6''$	$z:c = 255°,30',7''$
in min. ſec. = 919806''	in min. ſec = 919807''
log. = 5,9636963	log. = 5,9636967
ſottra 5,3144251	ſottra 5,3144251
log. $z:c =$ 0,6492712	log. $z:c =$ 0,6492716
ſottra 0,3622157	ſottra 0,3622157
log. $z:c$ ÷ log. log. $e =$ 0,2870555	log. $z:c$ + log. log. $e =$ 0,2870559
$z:c$ log. $e =$ 1,9366695	$z:c$ log. $e =$ 1,9366713
$e^{z:c} = 86{,}4309940$	$e^{z:c} = 86{,}4313519$
$e^{-z:c} = 0{,}0115700$	$e^{-z:c} = 0{,}0115699$
$e^{z:c} + e^{-z:c} = 86{,}4425640$	$e^{z:c} + e^{-z:c} = 86{,}4429218$
log. coſ. $z:c =$ 9,3985507	log. coſ. $z:c =$ 9,3985426
ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c =$ 2,7628494	ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c =$ 2,7628494
6,6357013	6,6356932
ſottra 4,6989700	ſottra 4,6989700
$\log.\left(\frac{2\,\mathrm{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\mathrm{coſ.}\ L:c}}\right) = 1{,}9367313$	$\log.\left(\frac{2\,\mathrm{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\mathrm{coſ.}\ L:c}}\right) = 1{,}9367232$
$\frac{2\,\mathrm{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\mathrm{coſ.}\ L:c}} = 86{,}4432869$	$\frac{2\,\mathrm{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\mathrm{coſ.}\ L:c}} = 86{,}4416733$
errore = + 7229	errore = − 12485
altro errore = − 12485	
differenza = 19714	Facciaſi 19714 : 7229 :: 1'' ::

$\frac{7229''}{19714} = 0,3667''$ parte di ſecondo, che dee aggiungerſi al valore più picciolo dell' angolo $z{:}c$, onde ſia

$z{:}c = 919806,3667''$

$\log. = 5,9636964$

ſottra $5,3144251$

$\log. z{:}c = 0,6492713$

ſottra $\log. L{:}c = 1,0412192$

$\log. z{:}L = 9,6080521$

aggiungi $\log. 2 = 0,3010300$

$\log. z{:}\frac{1}{2}L = 9,9090821$

$z{:}\frac{1}{2}L = C2E{:}CA = 0,8111144$ (*fig.* 5.)

Computo per la ſpecie IV. delle vibrazioni dei cilindri.

$z{:}c = 179^\circ,12',50''$	$z{:}c = 179^\circ,12',51''$
in min. ſec. $= 645170''$	in min. ſec. $= 645171''$
$\log. = 5,8096742$	$\log. = 5,8096749$
ſottra $5,3144251$	ſottra $5,3144251$
$\log. z{:}c = 0,4952491$	$\log. z{:}c = 0,4952498$
ſottra $0,3622157$	ſottra $0,3622157$
$\log. z{:}c + \log. \log. e = 0,1330334$	$\log. z{:}c + \log. \log. e = 0,1330341$
$z{:}c \log. e = 1,3584179$	$z{:}c \log. e = 1,3584201$
$e^{z:c} = 22,8253757$	$e^{z:c} = 22,8254913$
ſottra $e^{-z:c} = 0,0438107$	ſottra $e^{-z:c} = 0,0439107$
$e^{z:c} - e^{-z:c} = 22,7815650$	$e^{z:c} - e^{-z:c} = 22,7816806$
$\log. \text{ſen.}\, z{:}c = 8,1373342$	$\log. \text{ſen.}\, z{:}c = 8,1371818$
ſottra $\frac{1}{2} \log. \text{coſ.}\, L{:}c = 2,0806276$	ſottra $\frac{1}{2} \log. \text{coſ.}\, L{:}c = 2,0806276$
$6,0567066$	$6,0565542$
ſottra $4,6989700$	ſottra $4,6989700$
$\log. \left(\frac{2\, \text{ſen.}\, z{:}c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L{:}c}}\right) = 1,3577366$	$\log. \left(\frac{2\, \text{ſen.}\, z{:}c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L{:}c}}\right) = 1,3575842$

$\frac{2\ \text{ſen.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}} = 22{,}7890714$	$\frac{2\ \text{ſen.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}} = 22{,}7816002$
errore $= +\ 75064$	errore $= -\ 804$
altro errore $= -\ 804$	
differenza $= +\ 75868$	

Facciaſi $75868 : 75064 :: 1'' : \frac{75064''}{75868} = 0{,}9894''$ porzione di ſecondo, che va aggiunta al minor valore dell' angolo $z:c$, onde ci ſi preſenti

$z:c = 645170{,}9894''$

log. $= 5{,}8096748$

ſottra $5{,}3144251$

log. $z:c = 0{,}4952497$

ſottra log. $L:c = 1{,}1503623$

log. $z:L = 9{,}3448874$

aggiungi log. $2 = 0{,}3010300$

log. $z:\frac{1}{2}L = 9{,}6459174$

$z:\frac{1}{2}L = CE:CA = 0{,}4425042$ (*fig.* 6)

Segue il computo per la ſpecie IV. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 345°{,}30'{,}15''$	$z:c = 345°{,}30'{,}16''$
in min. ſec. $= 1243815''$	in min. ſec. $= 1243816''$
log. $= 6{,}0947558$	log. $= 6{,}0947561$
ſottra $5{,}3144251$	ſottra $5{,}3144251$
log, $z:c = 0{,}7803307$	log. $z:c = 0{,}7803310$
ſottra $0{,}3622157$	ſottra $0{,}3622157$
log. $z:c$ + log. log. $e = 0{,}4181150$	log. $z:c$ + log. log. $e = 0{,}4181153$
$z:c$ log. $e = 2{,}6188764$	$z:c$ log. $e = 2{,}6188782$
$e^{z:c} = 415{,}7922488$	$e^{z:c} = 415{,}7939713$
ſottra $e^{-z:c} = 0{,}0024050$	ſottra $e^{-z:c} = 0{,}0024050$
$e^{z:c} - e^{-z:c} = 415{,}7898438$	$e^{z:c} - e^{-z:c} = 415{,}7915663$
log. ſen. $z:c = 9{,}3984774$	log. ſen. $z:c = 9{,}3984693$
ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c = 2{,}0806276$	ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c = 2{,}0806276$
$7{,}3178498$	$7{,}3178417$

ſottra $4{,}6989700$	ſottra $4{,}6989700$
$\log.\left(\frac{2\ \text{ſen.}\ z{:}c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L{:}c}}\right) = 2{,}6188798$	$\log.\left(\frac{2\ \text{ſen.}\ z{:}c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L{:}c}}\right) = 2{,}6188717$
$\frac{2\ \text{ſen.}\ z{:}c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L{:}c}} = 415{,}7955024$	$\frac{2\ \text{ſen.}\ z{:}c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L{:}c}} = 415{,}7877512$
errore $= +\ 56586$	errore $= -\ 38151$

altro errore $= -\ 38151$

differenza $= 94737$ Facciaſi $94737 : 56586 :: 1'' : \frac{56586''}{94737} = 0,\ 5973''$ parte di ſecondo, che aggiunta al minor valore dell'angolo $z{:}c$ ci dà

$z{:}c = 1243815{,}5973''$

$\log. = 6{,}0947560$

ſottra $5{,}3144251$

$\log.\ z{:}c = 0{,}7803309$

ſottra $\log.\ L{:}c = 1{,}1503623$

$\log.\ z{:}L = 9{,}6299686$

aggiungi $\log.2 = 0{,}3010300$

$\log.\ z{:}\tfrac{1}{2}L = 9{,}9309986$

$z{:}\tfrac{1}{2}L = C2E{:}CA = 0{,}8530974$ (*fig.* 6)

Computo per la ſpecie V. delle vibrazioni de' cilindri.

$z{:}c = 89°{,}57'{,}50''$	$z{:}c = 89°{,}57'{,}51''$
in min. ſec. $= 323870''$	in min. ſec. $= 323871''$
$\log. = 5{,}5193707$	$\log. = 5{,}5103720$
ſottra $5{,}3144251$	ſottra $5{,}3144251$
$\log.\ z{:}c = 0{,}1959456$	$\log.\ z{:}c = 0{,}1959469$
ſottra $0{,}3622157$	ſottra $0{,}3622157$
$\log. z{:}c + \log.\log. e = 9{,}8337299$	$\log. z{:}c + \log.\log. e = 9{,}8337312$
$z{:}c \log. e = 0{,}6819144$	$z{:}c \log. e = 0{,}6819165$
$e^{z:c} = 4{,}8074458$	$e^{z:c} = 4{,}8074690$
$e^{-z:c} = 0{,}2080107$	$e^{-z:c} = 0{,}2080097$
$e^{z:c} + e^{-z:c} = 5{,}0154565$	$e^{z:c} + e^{-z:c} = 5{,}0154787$

log. coſ. $z:c =$ 6,7995181	log. coſ. $z:c =$ 6,7961645
ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c =$ 1,3984804	ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c =$ 1,3984804
5,4010377	5,3976841
ſottra 4,6989700	ſottra 4,6989700
$\log.\left(\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right) = 0{,}7020677$	$\log.\left(\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right) = 0{,}6987141$
$\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}} = 5{,}0357912$	$\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}} = 4{,}9970552$
errore $= +$ 203347	errore $= -$ 184235
altro errore $= -$ 184235	
differenza $=$ 387582	

Facciaſi 387582 : 203347 :: $1'' : \frac{203347''}{387582} = 0{,}\ 5247''$ parte di ſecondo da aggiungerſi al valore più picciolo dell' angolo $z:c$, onde ſia

$z:c = 323870{,}5247''$
log. $=$ 5,5103714
ſottra 5,3144251
log. $z:c =$ 0,1959463
ſottra log. $L:c =$ 1,2375125
log. $z:L =$ 8,9584338
aggiungi log. 2 $=$ 0,3010300
log. $z:\frac{1}{2}L =$ 9,2594638
$z:\frac{1}{2}L = CE:CA =$ 0,1817456 (*fig.* 7)

Segue il computo per la ſpecie V. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 269^\circ,12',45''$	$z:c = 269^\circ,12',46''$
in min. ſec. $=$ 969165$''$	in min. ſec. $=$ 969166$''$
log. $=$ 5,9863977	log. $=$ 5,9863982
ſottra 5,3144251	ſottra 5,3144251
log. $z:c =$ 0,6719726	log. $z:c =$ 0,6719731
ſottra 0,3622157	ſottra 0,3622157
log. $z:c$ + log. log. $e =$ 0,3097569	log. $z:c$ + log. log. $e =$ 0,3097574
$z:c$ log. $e =$ 2,0405954	$z:c$ log. $e =$ 2,0405977

$$e^{z:c} = 109,7982563$$
$$e^{-z:c} = 0,0091076$$
$$e^{z:c} + e^{-z:c} = 109,8073639$$

$\text{log. coſ. } z:c = 8,1380961$

$\text{ſottr. } \tfrac{1}{2}\text{ log. coſ. } L:c = 1,3984804$

$6,7396157$

ſottra $4,6989700$

$$\text{log.}\left(\frac{2 \text{ coſ. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}\right) = 2,0406457$$

$$\frac{2 \text{ coſ. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}} = 109,8109762$$

errore $= + \; 36123$

$$e^{z:c} = 109,7988375$$
$$e^{-z:c} = 0,0091076$$
$$e^{z:c} + e^{-z:c} = 109,8079451$$

$\text{log. coſ. } z:c = 8,1379437$

$\text{ſottr. } \tfrac{1}{2}\text{ log. coſ. } L:c = 1,3984804$

$6,7394633$

ſottra $4,6989700$

$$\text{log.}\left(\frac{2 \text{ coſ. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}\right) = 2,0404933$$

$$\frac{2 \text{ coſ. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}} = 109,7724539$$

errore $= - \; 354912$

altro errore $= - \; 354912$

differenza $= 391035$ Facciaſi $391035 : 36123 :: 1'' : \dfrac{36123''}{391035} = 0,0924''$ parte di ſecondo, per cui dee accreſcerſi il minor valore dell'angolo $z:c$, onde s' abbia

$z:c = 969165,0924''$

$\text{log.} = 5,9863978$

ſottra $5,3144251$

$\text{log. } z:c = 0,6719727$

$\text{ſottra log. } L:c = 1,2375125$

$\text{log. } z:L = 9,4344602$

$\text{aggiungi log. } 2 = 0,3010300$

$\text{log. } z:\tfrac{1}{2}L = 9,7354902$

$z:\tfrac{1}{2}L = C2E:CA = 0,5438638$ (*fig.* 7)

Segue il computo per la ſpecie V. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 435°,30',11''$

in min. ſec. $= 1567811''$

$\text{log.} = 6,1952936$

$z:c = 435°,30',12''$

in min. ſec. $= 1567812''$

$\text{log.} = 6,1952939$

ſottra 5,3144251	ſottra 5,3144251
log. $z:c$ = 0,8808685	log. $z:c$ = 0,8808688
ſottra 0,3622157	ſottra 0,3622157
log. $z:c$ + log. log. e = 0,5186528	log. $z:c$ + log. log. e = 0,5186531
$z:c$ log. e = 3,3010555	$z:c$ log. e = 3,3010578
$e^{z:c}$ = 2000,1174574	$e^{z:c}$ = 2000,1280516
$e^{-z:c}$ = 0,0005000	$e^{-z:c}$ = 0,0005000
$e^{z:c} + e^{-z:c}$ = 2000,1179574	$e^{z:c} + e^{-z:c}$ = 2000,1285516
log. coſ. $z:c$ = 9,3985100	log. coſ. $z:c$ = 9,3985019
ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c$ = 1,3984804	ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c$ = 1,3984804
8,0000296	8,0000215
ſottra 4,6989700	ſottra 4,6989700
log. $\left(\frac{2\ \text{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}\right)$ = 3,3010596	log. $\left(\frac{2\ \text{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}\right)$ = 3,3010515
$\frac{2\ \text{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}$ = 2000,1363427	$\frac{2\ \text{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}$ = 2000,0990327
errore = + 183853	errore = − 295189
altro errore = − 295189	
differenza = 479042	

Facciaſi 479042 : 183853 :: $1'' : \frac{183853''}{479042} = 0,3838''$ porzione di ſecondo, che unita al minor valore dell' angolo $z:c$ ci dà

$z:c$ = 1567811,3838″
log. = 6,1952938
ſottra 5,3144251
log. $z:c$ = 0,8808687
ſottra log. $L:c$ = 1,2375125
log. $z:L$ = 9,6433562
aggiun. log. 2 = 0,3010300
log. $z:\frac{1}{2}L$ = 9,9443862
$z:\frac{1}{2}L = C3E:CA$ = 0,8798045 (*fig.* 7.)

Computo per la ſpecie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c=$	$179^\circ,57',56''$	$z:c=$	$179^\circ,57',57''$
in min. ſec.=	$647876''$	in min. ſec.=	$647877''$
log.=	5,8114919	log.=	5,8114926
ſottra	5,3144251	ſottra	5,3144251
log. $z:c=$	0,4970668	log. $z:c=$	0,4970675
ſottra	0,3622157	ſottra	0,3622157
log.$z:c$+log.log.$e=$	0,1348511	log.$z:c$+log.log.$e=$	0,1348518
$z:c$ log. $e=$	1,3641153	$z:c$ log. $e=$	1,3641175
$e^{z:c}=$	23,1267891	$e^{z:c}=$	23,1269063
$e^{-z:c}=$	0,0432399	$e^{-z:c}=$	0,0432397
$e^{z:c}-e^{-z:c}=$	23,0835492	$e^{z:c}-e^{-z:c}=$	23,0836666
log. ſen. $z:c=$	6,7789965	log. ſen. $z:c=$	6,7706810
ſottr.$\frac{1}{2}$log.coſ.$L:c=$	0,7162924	ſottr.$\frac{1}{2}$log.coſ.$L:c=$	0,7162924
	6,0627041		6,0543886
ſottra	4,6989700	ſottra	4,6989700
log.$\left(\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right)=$	1,3637341	log.$\left(\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right)=$	1,3554186
$\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}=$	23,1064981	$\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}=$	22,6682829
errore=	+ 229489	errore=	— 4153837
altro errore=	— 4153837		
differenza=	4383326		

Facciaſi 4383326 : 229489 :: $1'' : \frac{229489''}{4383326} = 0,0524''$ parte di ſecondo da aggiungerſi al minor valore di $z:c$, onde ne riſulti

$z:c = 647876,0524''$

log. = 5,8114919

ſottra 5,3144251

log. $z:c$ = 0,4970668

ſottra log.$L:c$ = 1,3100632

log. $z:L$ = 9,1870036

aggiungi log.$2 = 0,3010300$

log. $z:\frac{1}{2}L = 9,4880336$

$z:\frac{1}{2}L = CE:CA = 0,3076335$ (*fig.* 8)

Segue il computo per la ſpecie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 359°,12',45''$	$z:c = 359°,12',46''$
in min. ſec. $= 1293165''$	in min. ſec $= 1293166''$
log. $= 6,1116539$	log. $= 6,1116542$
ſottra $5,3144251$	ſottra $5,3144251$
log. $z:c = 0,7972288$	log. $z:c = 0,7972291$
ſottra $0,3622157$	ſottra $0,3622157$
log.$z:c$+log.log.$e = 0,4350131$	log.$z:c$+log.log.$e = 0,4350134$
$z:c$ log. $e = 2,7227837$	$z:c$ log. $e = 2,7227856$
$e^{z:c} = 528,1821168$	$e^{z:c} = 528,1825349$
$e^{-z:c} = 0,0018933$	$e^{-z:c} = 0,0018933$
$e^{z:c} - e^{-z:c} = 528,1802235$	$e^{z:c} - e^{-z:c} = 528,1825349$
log. coſ. $z:c = 8,1380961$	log. coſ. $z:c = 8,1379437$
ſottr.$\frac{1}{2}$log.coſ.$L:c = 0,7162924$	ſottr.$\frac{1}{2}$log.coſ.$L:c = 0,7162924$
$4,4218037$	$7,4216513$
ſottra $4,6989700$	ſottra $4,6989700$
log.$\left(\frac{2\ \text{ſen.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}\right) = 2,7228337$	log.$\left(\frac{2\ \text{ſen.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}\right) = 2,7226813$
$\frac{2\ \text{ſen.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}} = 528,2429440$	$\frac{2\ \text{ſen.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}} = 528,0575942$
errore $= +\ 627205$	errore $= -\ 1249407$
altro errore $= -\ 1249407$	
differenza $= 1876612$	

Facciaſi $1876612 : 627205 :: 1'' : \frac{627205''}{1876612} = 0,3342''$ porzione di ſecondo, per cui dee aumentarſi il minor valore di $z:c$, onde ſia

$z:c =$

$z:c=$ 1293165,3342″
log.= 6,1116540
ſottra 5,3144251
log. $z:c=$ 0,7972989
ſottra log. $L:c=$ 1,3100632
log. $z:L=$ 9,4871657
aggiun. log. 2= 0,3010300
log. $z:\frac{1}{2}L=$ 9,7881957
$z:\frac{1}{2}L=C2E:CA=$ 0,6140386 (*fig.* 8.)

Segue il computo per la ſpecie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c=$	525°,30′,11″	$z:c=$	525°,30′,12″
in min. ſec.=	1891811″	in min. ſec.=	1891812″
log.=	6,2768777	log.=	6,2768779
ſottra	5,3144251	ſottra	5,3144251
log. $z:c=$	0,9624526	log. $z:c=$	0,9624528
ſottra	0,3622157	ſottra	0,3622157
log. $z:c+$log. log. $e=$	0,6002369	log. $z:c+$log. log. $e=$	0,6002371
$z:c$ log. $e=$	3,9832440	$z:c$ log. $e=$	3,9832459
$e^{z:c}=$	9621,5265487	$e^{z:c}=$	9621,5685841
ſottra $e^{-z:c}=$	0,0001039	$e^{-z:c}=$	0,0001039
$e^{z:c}-e^{-z:c}=$	9621,5264448	$e^{z:c}-e^{-z:c}=$	9621,5684902
log. ſen. $z:c=$	9,3985100	log. ſen. $z:c=$	9,3985019
ſottr. $\frac{1}{2}$log. coſ. $L:c=$	0,7162924	ſottr. $\frac{1}{2}$log. coſ. $L:c=$	0,7162924
	8,6822176		8,6822095
ſottra	4,6989700	ſottra	4,6989700
log. $\left(\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right)=$	3,9832476	log. $\left(\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right)=$	3,9832395
$\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}=$	9621,6061947	$\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}=$	9621,4269912
errore=+	797499	errore=—	1414890
altro errore=—	1414890		
differenza=	2212389		

Facciaſi 2212389 : 797499 ::

$1'' : \frac{797499''}{2212389} = 0,\ 3605''$ quantità da aggiugnerſi al più picciolo valore dell' angolo $z{:}c$, onde ci ſi preſenti

$$z{:}c = 1891811{,}3605''$$
$$\log. = 6{,}2768778$$
$$\text{ſottra}\quad 5{,}3144251$$
$$\log.\ z{:}c = 0{,}9624527$$
$$\text{ſottra}\ \log.\ L{:}c = 1{,}3100632$$
$$\log.\ z{:}L = 9{,}6523895$$
$$\text{aggiungi}\ \log.2 = 0{,}3010300$$
$$\log.\ z{:}\tfrac{1}{2}L = 9{,}9534195$$
$$z{:}\tfrac{1}{2}L = C3E{:}CA = 0{,}8982961 \qquad (\textit{fig. } 8)$$

Confermare coll' eſperienza la ſcoperta legge dei ſuoni dei cilindri.

XXXI. Egli è d' uopo confermare coll' eſperienza le verità inſegnate dalla teorica. Do principio dal paragonare inſieme i ſuoni principali, cioè a dire i più gravi di varj cilindri. Feci lavorare tre cilindri d' acciajo *A*, *B*, *C*, ed ordinai, che i due primi foſſero egualmente groſſi, e diverſamente lunghi in ragione di $\sqrt{2} : 1$. Il primo ed il terzo doveano avere uguali le lunghezze, ed ineguali i diametri in proporzione di 4 : 5. L' Artefice non eſeguì eſattiſſimamente la mia intenzione, e le miſure dei cilindri furono le ſeguenti, che da me s' eſprimono in linee del piede Real di Parigi.

Miſura del cilindro *A*. $D =$ lin. 9, $L =$ lin. 86.
Miſure del cilindro *B*. $D =$ lin. 9, $L =$ lin. 61.
Miſure del cilindro *C*. $D =$ lin. $11\frac{1}{2}$, $L =$ lin. 87.

Differendo i due cilindri *A*, *B* ſolamente nella lunghezza, i loro ſuoni debbono corriſponderſi in ragione inverſa duplicata delle lunghezze, cioè a dire come $(61)^2{:}(86)^2$, o ſia come 3721 : 7396. Queſto rapporto s' accoſta molto al ſemplice 1 : 2 proprio dell' Ottava, ed il divario conſiſte nella proporzione 7396 : 7442, o ſia nella fiſicamente uguale 161 : 162, metà preſſochè giuſta del Comma 80 : 81. In fatti percoſſi i cilindri *A*, *B*, trovai che i loro ſuoni in Ottava un poco calante ſi riferivano.

Giuſta il canone da me ſtabilito i ſuoni dei cilindri *A*, *C* debbono ſtare in ragione compoſta, diretta ſemplice dei diametri, ed inverſa duplicata delle lunghezze, vale a dire come $\frac{9}{(86)^2} : \frac{11\frac{1}{2}}{(87)^2}$. Queſta proporzione riduceſi alla ſeguente 68121 : 85054, la quale diſcorda pochiſſimo dalla ſemplice 4 : 5 conveniente alla Terza maggiore. La differenza s'eguaglia al rapporto 8505400 : 8515125, cioè proſſimamente a 875 : 876, undecima parte all'incirca del Comma 80 : 81, minuzia così picciola, che non viene dall'orecchio anche più perito notata. Poſti al confronto i ſuoni dei cilindri *A*, *C*, ſi conformarono alla teorica, ed il cilindro più groſſo *C* reſe un ſuono una Terza maggiore più acuto di quello del cilindro più ſottile *A*.

XXXII. M'inoltro all'eſame dei ſuoni, che giuſta le varie ſpecie di oſcillazioni un cilindro produce. Feci primieramente tirare con diligenza a martello, e lima un cilindro *E* d'acciajo, ed indi ne feci gittare un altro *F* di bronzo, il quale fu poſcia ripulito ſul tornio, e ridotto alla maggior eſattezza, che fu poſſibile. Miſure del cilindro *E* d'acciajo. $D =$ lin. 6, $L =$ lin. 259. Miſure del cilindro *F* di bronzo. $D =$ lin. 6, $L =$ lin. 257. $\frac{1}{2}$. Gli volli aſſai ſottili riſpettivamente alle loro lunghezze, e tollerai, che il ſuono loro più grave riuſciſſe muto, perchè ſi rendeſſero ſenſibili i ſuoni acuti, il che non interviene, quando la groſſezza alla lunghezza ha quella proporzione, che ſi ricerca, acciocchè il ſuono principale, e più grave acquiſti corpo, e ſi faccia udire grato al ſenſorio.

Segnai accuratamente i nodi, o punti ſtabili in riguardo alle diverſe ſpecie di vibrazioni, e ſottopoſti a sì fatti punti i ſoſtegni, ſi ſentirono chiari e diſtinti i ſei primi ſuoni in ambo i cilindri. Avendo dentro queſti limiti riſtretto i miei calcoli, non mi ſono più oltre dilatato nè pur colle oſſervazioni. Avverto, che gli ſcannelli debbono eſſere riveſtiti d'una materia cedente, per eſempio di panno. Io mi ſervj di due funicelle, le quali erano forſe un po' troppo dure, e credo che ſarebbero meglio riuſciti due groſſi ſpaghi. Anche riſpettivamente alle corde, mentre ſi vogliono far ſuonare diviſe in parti aliquote, biſogna adoperare degli oſtacoli leggeri, e appoggiarli ad uno di que' punti, che ſeparano una parte aliquota dall' altra. Veggaſi ciò, che ho ſcritto in tale propoſito ai numeri XX. e XXI. dello Schediaſma IV, che tratta *delle vibrazioni delle corde ſonore* nella mia Opera *Delle Corde*, *ovvero Fibre elaſtiche*.

Accordai all' uniſono col ſuono principale del cilindro *E* d'acciajo una corda diviſa in parti 60, ed un'altra corda egualmente lunga, e ſimilmente partita la riduſſi all' Ottava alta del ſuono principale del cilindro *F* di bronzo. Rendeva queſto un ſuono talmente grave, che mettendo con eſſo all' uniſono la predetta corda, avrebbe della ſonorità fatto perdita. Per ſeparare dal rimanente quelle porzioni di corda, che ſono uniſone ai ſuoni ſecondo, terzo, quarto ecc. dell' uno, e dell' altro cilindro, ho poſto in opera uno ſcannello, la cui baſe s'eguaglia ad una porzione ſeſſanteſima della corda, ed è diſtribuita in parti dieci. Con queſto artificio s'ottiene la diviſione della corda in parti 600.

Nel numero XXVI. ho poſto in ſerie le porzioni della corda 60, che ſecondo la teorica debbono ſtar all' uniſono coi ſuoni acuti d'un cilindro nella ſuppoſizione, che il ſuono più grave ſia uniſono alla corda intera. Queſta progreſſione ſerve pel cilindro *E* d' acciajo, ed in riguardo al cilindro *F* di bronzo, il cui ſuono principale è uniſono alla corda 120, ſi hanno da prendere porzioni il doppio lunghe delle mentovate.

Le ſeguenti due Tavole ſono formate da tre colonne. I numeri della prima eſprimono le ſpecie delle vibrazioni. La ſeconda contiene le porzioni della corda 60, che giuſto la teorica deggiono corriſpondere all' uniſono coi ſuoni acuti dei cilindri. Nella terza ſi comprendono le parti della ſteſſa corda, che meſſa in opera la maggior attenzione, ſi ſono trovate uniſone ai ſuoni nominati, preſtandomi diligente aſſiſtenza il Sig. *Domenico Bianchi* valente organiſta, ed accuratiſſimo accordatore di gravicembali.

Porzioni della corda 60 uniſone ai ſuoni acuti del cilindro E d' acciajo nella ſuppoſizione, che il ſuono più grave ſia uniſono alla corda 60.

Specie delle vibrazioni.	Lunghezze delle porzioni giuſto la teorica.	Lunghezze delle porzioni giuſto l' eſperienza.
I.	60	60
II.	21, 75	21, 75
III.	11, 1	11, 15
IV.	6, 717	6, 9
V.	4, 496	4, 7
VI.	3, 219	2, 9

Porzioni della corda 60. uniſone ai ſuoni acuti del cilindro F di bronzo nella ſuppoſizione, che il ſuono più grave ſia uniſono alla corda 120.

Specie delle vibrazioni.	Lunghezze delle porzioni giuſto la teorica.	Lunghezze delle porzioni giuſto l' eſperienza.
I.	120	120
II.	43, 5	43, 5

III.	22, 2	22, 3
IV.	13, 434	13, 6
V.	8, 992	9, 1
VI.	6, 438	6, 7

Per vero dire il cilindro *F* di bronzo era di figura più eſatta di quello d'acciajo, ed oltre a ciò di materia più uniforme, ed omogenea, ſiccome formato per via di fuſione. E quindi le ſue voci acute con più aggiuſtatezza di quelle del cilindro *E* d'acciajo s'accomodavano ai tuoni dalla teorica determinati. La maggior differenza in ambo i cilindri s'udiva nel ſeſto ſuono, il quale nel cilindro d'acciajo creſceva ſopra il corriſpondente ſtabilito dal computo per la ragione 2900 : 3219, o ſia proſſimamente per qualche coſa meno di 9 : 10, ch'è quanto a dire per un Tuono un poco calante. Al contrario nel cilindro di bronzo il predetto ſuono calava dall'analogo fiſſato dal calcolo pel rapporto 6700 : 6438, cioè per una proporzione media fra le due 25 : 24, 26 : 25 eſprimente un Semituono minore ſcarſo. I notati oppoſti divarj danno a conoſcere, che ſe ci foſſe un cilindro di perfettiſſima figura, e compoſto di materia ſquiſitamente omogenea, renderebbe i ſuoni eſattamente uniſoni a quelli, che mi è riuſcito di ſcoprire nella preſente Diſſertazione.

Determinare la proporzione fra le rigidità dell'acciajo, e del bronzo, dei quali erano compoſti i cilindri uſati nel riferito eſperimento.

XXXIII. Non tralaſcio di determinare la proporzione fra le rigidità dell'acciajo, e del bronzo, ond'erano formati i noſtri cilindri. Ho notato nel corollario terzo contenuto nel numero XXV. che mentre due cilindri oſcillano ſimilmente, le loro rigidità r ſtanno come $S^2L^4g:D^2$. Eſſendo il diametro D coſtante in amendue i cilindri E, F, le maſſe M ſtanno come Lg, e le rigidità r come S^2L^3M. Il cilindro di bronzo era uniſono a parti $91\frac{1}{2}$ della corda 60 uniſona al cilindro d'acciajo; e quindi i ſuoni S dei due cilindri d'acciajo, e di bronzo ſi riguardavano nella ragione $91\frac{1}{2} : 60$, o ſia $61 : 40$. Ho già detto nel precedente numero XXXI. che le lunghezze L ſerbavano il rapporto $259 : 257\frac{1}{2}$, cioè in numeri interi $518 : 515$. Peſò il cilindro E once 25, il cilindro F once 27, e per conſeguenza le maſſe M ſi riferivano nella ragione $25 : 27$. Soſtituiti in cambio delle ſpecie analatiche i convenienti valori, troveremo le rigidità dell'acciajo e del bronzo componenti i noſtri cilindri come $(61)^2.(518)^3.\ 25 : (40)^2.(515)^3.\ 27$, o ſia ridotti i computi, come $64648575859 : 29698029000$, proporzione che ſta di mezzo fra le due $24 : 11$, $13 : 6$, avvicinandoſi per altro più alla prima, che alla ſeconda.

Determinare la proporzione fra le lunghezze, ed i diametri dei cilindri gravi, ed acuti; acciocchè rendano ſuoni del pari forti, e aggradevoli.

XXXIV. Chiudo la mia fatica collo ſtabilire la ragione fra le lunghezze ed i diametri dei cilindri gravi, ed acuti; affinchè rendano ſuoni ugualmente forti, e aggradevoli. I cilindri di metallo, o di creta, i quali compongono uno ſtrumento, ſi percuotono con eguali forze vive, e per conſeguenza oſcillando di pari forze vive fanno l'acquiſto. Collo ſteſſo metodo uſato in riguardo alle corde nello Schediaſma VI. della mia Opera ſopraccitata potrei dimoſtrare, che tali cilindri rendono ſuoni ugualmente forti. Queſti ſuoni in oltre debbono riuſcire del pari aggradevoli, il che dipende dalla proporzione fra le lunghezze, ed i diametri dei varj cilindri, la quale mi accingo ad indagare preſentemente. Qualche ſtrumento da me veduto non s'eſtend[illegible] ſalvo che per due Ottave, ed era formato di cilindri, che differivano ſolo nella lunghezza. Per verità i cilindri eſtremi cadevano in difetti oppoſti; imperciocchè i più gravi erano troppo pieghevoli, e producevano ſuoni per dir così ſenza corpo: ed al contrario i più acuti erano troppo groſſi, e poco fleſſibili, dimodochè i loro ſuoni ſi ſperimentavano ottuſi.

Le maſſe M, m di due cilindri della ſteſſa materia ſtanno come $LD^2 : ld^2$, e giacchè ſono pari le forze vive MV^2, mv^2, ſi verifica l'analogia $V : v :: \frac{1}{L^{\frac{1}{2}}D} : \frac{1}{l^{\frac{1}{2}}d}$. S'aſſegni alle velocità la legge perfettamente media fra i limiti ſtabiliti ne' numeri X. e XI. del citato Schediaſma VI. onde s'abbia $V : v :: \frac{1}{T^{\frac{3}{4}}} : \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$, e ſcopriremo eſſere $L^{\frac{1}{2}}D : l^{\frac{1}{2}}d :: T^{\frac{3}{4}} : t^{\frac{3}{4}}$, e conſeguentemente $L^{\frac{2}{3}} D^{\frac{3}{4}} : l^{\frac{2}{3}} d^{\frac{3}{4}} :: T : t$. C'inſegna il corollario 4. contenuto nel numero XXV. che ſe due cilindri formati della ſteſſa materia ſi vibrano ſimilmente, ſtanno i loro ſuoni come $\frac{D}{L^2} : \frac{d}{l^2}$; ma i tempi delle vibrazioni accettano la ragione inverſa dei ſuoni; dunque $T : t :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ e perciò $L^{2:3} D^{4:3} : l^{2:3} d^{4:3} :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ analogia, da cui derivano le due ſeguenti
$L : l :: D^{7:4} : d^{7:4}$, $D : d :: L^{4:7} : l^{4:7}$. Nel canone de' tempi delle vibrazioni $T : t :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ ſi ſoſtituiſcano prima in cambio di L, l, indi in cambio di D, d i valori

lori proporzionali, e ſcopriremo, effettuati i neceſſarj calcoli,
$D : d :: T^{2:5} : t^{2:5}$, $L : l :: T^{7:10} : t^{7:10}$. Regolate a norma di queſte leggi le dimenſioni dei cilindri, riuſciranno i loro ſuoni egualmente grati all' orecchio.

Stimo bene l' illuſtrare la teorica con un eſempio. Due cilindri ſi corriſpondano in quintupla Ottava, onde ſia $T : t :: 32 : 1 :: 2^5 : 1$. Fatto uſo di tali valori in luogo dei tempi T, t, ci ſi preſenterà $D : d :: 4 : 1$, $L : l :: \sqrt{128} : 1$, o proſſimamente $11,3137 : 1$.

Aſſai proſſima alla preſcelta ſarebbe la legge $V : v :: \frac{1}{T^{2:3}} : \frac{1}{t^{2:3}}$, da cui ſi dedurrebbe $D^2 : d^2 :: L : l$, $D : d :. T^{1:3} : t^{1:3}$, $L : l :: T^{2:3} : t^{2:3}$. La ſua maggiore ſemplicità renderebbe le miſure dei cilindri più facili da conteggiare.

XXXV. Concioſſiachè gli ſtrumenti compoſti di cilindri ſieno di poco uſo, e ſe ne lavorino in picciola quantità, non han potuto gl' induſtrioſi Pratici colle replicate ſperienze condurli a quella perfezione, di cui ſono capaci. Giudico adunque opportuna coſa il diſtendere una tavola, che per lo ſpazio di due Ottave contenga le lunghezze, ed i diametri dei cilindri ſecondo la più perfetta legge $L : l :: T^{7:10} : t^{7:10}$, $D : d :: T^{2:5} : t^{2:5}$. La nominata tavola è formata da ſei colonne. La prima comprende le lettere naturali, e le modificate dal Dieſis, e dal B molle diſpoſte giuſto la ſcala degli uſuali ſtrumenti da taſto, preſa per baſe la lettera C. Nella ſeconda colonna ſtanno diſpoſti i logaritmi dei ſuoni convenienti a ciaſcuna lettera, e temperati ſecondo il metodo da me ſpiegato nel *Saggio ſopra le leggi del Contrappunto* pag. 116. Contiene la terza colonna i logaritmi delle lunghezze dei cilindri componenti la detta ſcala, i quali battuti con forze vive uguali, hanno da produr ſuoni, che rieſcano egualmente grati all' udito.

Si veggono collocate ordinatamente nella quarta colonna le lunghezze d'eſſi cilindri. Seguono finalmente le colonne quinta, e ſeſta, e ſono regiſtrati in quella i logaritmi dei diametri dei noſtri cilindri, in queſta le miſure dei diametri ſteſſi. Le colonne principali riſpettivamente alle preſenti ricerche ſono la quarta, e la ſeſta, in grazia della determinazion delle quali ho poſto le colonne ſeconda, terza, e quinta.

Ecco il metodo da me tenuto per determinare le colonne quarta, e ſeſta. Sia l la lunghezza d' un cilindro, d il diametro, t il tempo d'una vibrazione, n il numero delle vibrazioni fatte in tempo dato, o ſia il ſuono d'eſſo cilindro. Ho provato nel precedente numero XXXIV. dover eſſer l come $t^{7:10}$: ma t come $= 1:n$; dunque l come $\frac{1}{n^{7:10}}$, e paſſando dall'analogia all'equazione, $l = \frac{L}{n^{7:10}}$. L è una coſtante da determinarſi in progreſſo. Dai numeri faccio tranſito ai logaritmi, e mi ſi preſenta la formola log. $l =$ log. $L - \frac{7}{10}$ log. n. Serve queſta per iſtabilire il valore della coſtante L. Il logaritmo del ſuono n prodotto dal cilindro C baſe dello ſtrumento s'eguaglia a nulla; dunque in tal caſo log. l. $=$ log. L, e per conſeguenza $l = L$, cioè a dire la coſtante L uguale alla lunghezza l del cilindro C baſe dello ſtrumento, la quale ſi ſuppone nella mia tavola diviſa in parti 10000. Si troverà pertanto il logaritmo della lunghezza l d'un cilindro detraendo dal log. L, o ſia dal logaritmo del numero 10000 le ſette decime parti del logaritmo del ſuono, che il detto cilindro deve produrre. Determinato così log. l, le tavole dei logaritmi mi additano il valore della lunghezza cercata l.

In riguardo ai diametri dei cilindri ho dimoſtrato eſſere d come $t^{2:5}$, come $\frac{1}{n^{2:5}}$. Quindi ne naſcono le formole $d = \frac{D}{n^{2:5}}$, log. $d =$ log. $D - \frac{2}{5}$ log. n. D è il diametro del cilindro C baſe dello ſtrumento, che ſuppongo diviſo in parti 1000. Sottratte dal log. 1000 le due quinte parti del logaritmo del ſuono n, che dee rendere il cilindro, ne riſulterà il logaritmo del diametro d, la di cui miſura relativa a quella del diametro D competente al cilindro C verrà reſa nota dalle tavole logaritmiche.

Sarà facile l'ampliare la ſeguente tavola alle tre, alle quattro, alle cinque Ottave, valendoſi della regola del tre. Quella ſteſſa proporzione, che ha C, la cui lunghezza 10000, a C^d, la cui lunghezza 9640, la ſerba parimente C, la cui lunghezza 3789, a C^d, che poſta in uſo la nominata regola, ſi troverà lungo 3653. Con pari metodo ſi ſcoprirà il diametro del detto C^d 562, e ſi paſſerà poſcia a ſtabilire le dimenſioni di D, di E^b, di E ecc.

Sebbene poteva baſtare il dilatar la tavola ad una ſola Ottava. Determinato il ſecondo C, che in relazione al primo è lungo 6156, groſſo 758, ſi prendano per date le mentovate miſure, e dividendo la lunghezza in parti 10000, il diametro in parti 1000, chiaramente ſi ſcoprirà, che la diſtribuzione della prima Ottava ſerve altresì per la ſeconda, e per tutte l'altre, che ſeguono.

Per valerſi utilmente della noſtra tavola, fra varj cilindri pari di diametro, e diverſi di lunghezza biſogna ſcegliere quello, che rende un ſuono vigoroſo e chiaro, eſcluſi gli altri, che o per eſſere troppo lunghi riſpettivamente alla groſſezza producono un ſuono ſnervato, e ſenza corpo, o per eſſere troppo corti tramandano un ſuono muto, ed ottuſo. Se il cilindro preſcelto ſi trova uniſono col C baſe d'uno ſtrumento coriſta, s'intenda diviſa la ſua lunghezza in parti 10000, il ſuono diametro in parti 1000, ed in relazione a tali diviſioni ſi ſtabiliſcano le miſure dei cilindri più acuti a norma della mia tavola. Che ſe lo ſteſſo cilindro foſſe uniſono ad un altro ſuono per eſempio *A* della prima Ottava; dovendo eſſere giuſto la tavola la lunghezza d'un tal cilindro 6965, ed il diametro 813; ſi concepiſcano diſtribuiti la lunghezza, ed il diametro nei detti numeri di parti 6965, 813, ed in riguardo a sì fatti compartimenti ſi determinino coll'ajuto della mia tavola le dimenſioni dei cilindri più gravi, e più acuti del dato cilindro *A*.

Se la lunghezza, ed il diametro del cilindro preſcelto foſſero dati eſempigrazia in linee, ſi potranno trovare le miſure degli altri cilindri eſpreſſe parimente in linee col mezzo della regola del tre. Sieno cogniti in linee la lunghezza, ed il diametro del cilindro *A* appartenente alla prima Ottava, e ſi voglia ſapere di quante linee debbono eſſer compoſti la lunghezza, ed il diametro del cilindro *C* baſe dello ſtrumento. Si faccia come la lunghezza del cilindro *A* a quella del cilindro *C* notate nella mia tavola, cioè come 6965 a 10000, così il numero di linee, che formano la lunghezza del cilindro *A*, al quarto termine proporzionale, il quale s'eguaglierà al numero delle linee, che hanno da formare la lunghezza del cilindro *C*. Non altrimenti ſe faremo come 813 a 1000 diametri, che la mia tavolá aſſegna ai cilindri *A*, *C*, così il numero delle linee, onde conſta il diametro del cilindro *A*, al quarto termine proporzionale; pareggerà queſto il numero delle linee componenti il diametro cercato del cilindro *C*.

In uno ſtrumento lavorato ſecondo il mio metodo gli ſcannelli ſu i quali s' appoggiano i cilindri, e che debbono ſtare ſotto i loro circoli d'ammortimento, hanno ad eſſere di figura curva, la quale facilmente ſi deſcrive, eſſendo nota dei mentovati circoli la poſizione.

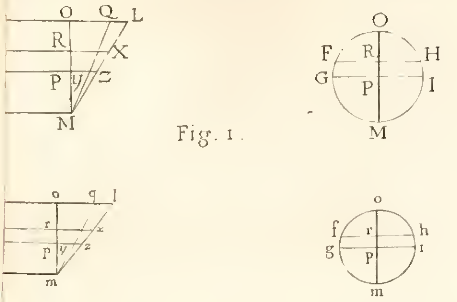

O
Q
L
R
X
P
y
z
M
O
F
R
H
G
P
I
M
o
q
l
r
x
p
y
z
m
o
f
r
h
g
p
i
m

Fig. 1.

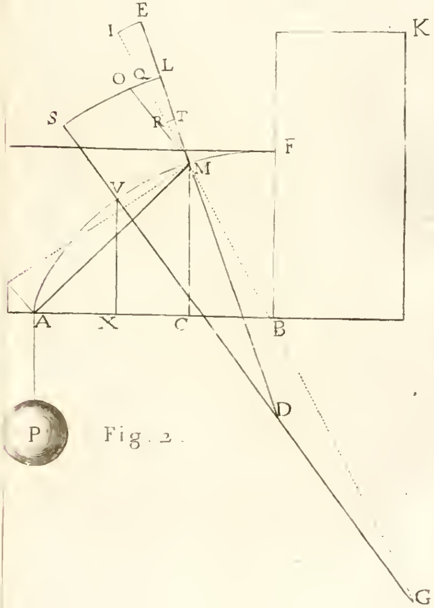

E
I
L
O
Q
S
R
T
F
K
M
V
A
X
C
B
D
P
G

Fig. 2.

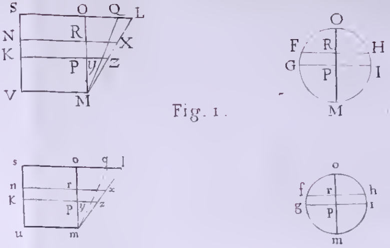

S
O
Q
L
N
R
X
K
P
y
Z
V
M
O
F
R
H
G
P
I
M
s
o
q
l
n
r
x
K
p
y
z
u
m
o
f
r
h
g
p
i
m

Fig. 1.

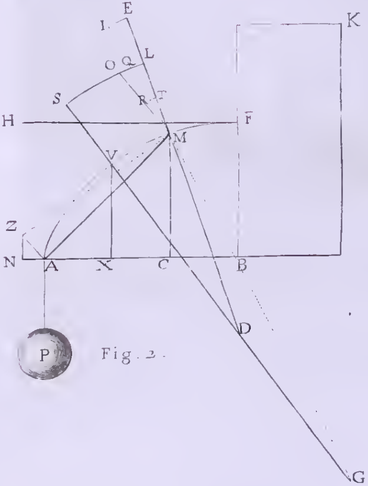

E
I
L
O
Q
S
R
T
H
F
M
V
K
Z
N
A
X
C
B
D
P
G

Fig. 2.

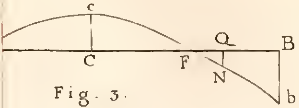


Fig. 3.

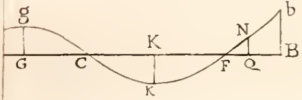

g
b
N
K
B
G
C
F
Q
K

Fig. 4.

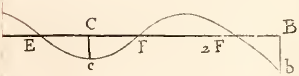


Fig. 5.

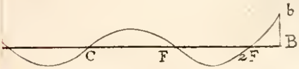


Fig. 6.

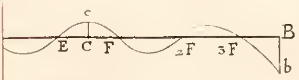

c
B
E
C
F
2F
3F
b

Fig. 7

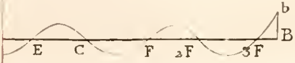


Fig. 8.

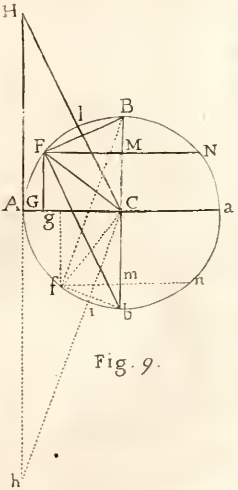

H
I
B
F
M
N
A
G
C
a
g
m
f
n
i
b
h

Fig. 9.

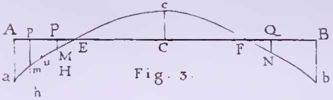

c
A
p
P
E
C
F
Q
B
M
u
m
H
N
a
b
h

Fig. 3.

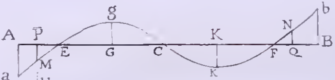

g
b
A
P
K
N
B
E
G
C
F
Q
M
a
H
K

Fig. 4

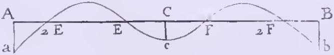

A
C
B
2 E
E
F
2 F
a
c
b

Fig. 5.

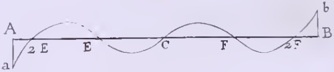

b
A
B
2 E
E
C
F
2 F
a

Fig. 6.

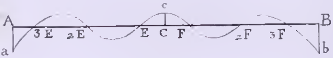

c
A
B
3 E
2 E
E
C
F
2 F
3 F
a
b

Fig. 7

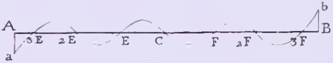

b
A
B
3 E
2 E
E
C
F
2 F
3 F
a

Fig 8.

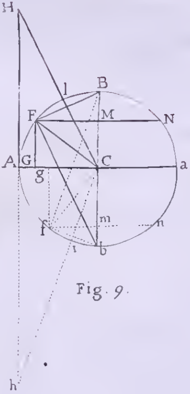

H
l
B
F
M
N
A
G
C
a
g
m
n
f
i
b
h

Fig. 9.

Lunghezze, e diametri dei cilindri per l' eſtenſione di due Ottave temperate giuſta il mio metodo.

	Logaritmi dei ſuoni.	Log. delle lunghezze dei cilindri	Lunghezze dei cilindri.	Log. dei diametri dei cilin.	Diametri dei cilindri.
C	0,0000000	4,0000000	10000	3,0000000	1000
C^d	0,0227556	3,9840711	9640 −	2,9908978	979 +
D	0,0492448	3,9655261	9237 −	2,9803006	956 −
E^b	0,0757412	3,9469812	8851 −	2,9697035	933 −
E	0,0984968	3,9310522	8532 +	2,9606013	913 +
F	0,1258908	3,9118764	8163 $\frac{1}{2}$	2,9496437	891 −
F^d	0,1481958	3,8962629	7875 +	2,9407217	872 +
G	0,1751392	3,8774026	7540 $\frac{1}{2}$	2,9299443	851 +
G^d	0,1983454	3,8611582	7264 −	2,9206618	833 +
A	0,2243876	3,8429287	6965 +	2,9102450	813 +
B^b	0,2513310	3,8240683	6669 +	2,8994676	793 +
B	0,2736360	3,8084548	6434 −	2,8905456	777 +
C	0,3010300	3,7892790	6156 −	2,8795880	758 −
C^d	0,3237856	3,7733501	5934 +	2,8705650	742 +
D	0,3502784	3,7548051	5686 −	2,8598886	724 +
E^b	0,3767712	3,7362602	5448 +	2,8492915	707 −
E	0,3995268	3,7203312	5252 +	2,8401893	692 +
F	0,4269208	3,7011554	5025 +	2,8292317	675 −
F^d	0,4492258	3,6855419	4848 −	2,8203097	661 +
G	0,4761692	3,6666816	4642 −	2,8095323	645 −
G^d	0,4993754	3,6504372	4471 +	2,8002498	631 +
A	0,5254176	3,6322077	4288 −	2,7898330	616 +
B^b	0,5523610	3,6133473	4105 +	2,7790556	601 +
B	0,5746660	3,5977338	3961 −	2,7701336	589 +
C	0,6020600	3,5785580	3789 +	2,7591760	574 +

OSSERVAZIONI

ED ESPERIMENTI

Sopra la Scompoſizione del Sale ammoniaco per mezzo della Calce terrea.

Del Sig. CONTE DI SALUZZO.

1. SOno a tutti note le ſingolari alterazioni, che arreca la calce al ſale ammoniaco, cioè la coſtante forma fluida, in cui s' ottiene l' alcali volatile; la riguardevole ſua cauſticità; la ſua ineffervesſcibilità cogli acidi; ed un abbondantiſſimo ſviluppamento di vapori, che accompagnano queſta ſcompoſizione, dotati di tanta elaſticità, che ſe non ſi uſino le maggiori cautele, ne ſegue lo ſcoppio de' vaſi, ne' quali ſi fa l' operazione.

2. Varie ſin qui ſono ſtate le opinioni intorno alla cauſa de' riferiti fenomeni; ma quella dell' inſigne Sig. *Duhamel* era fra tutte la più diſtinta, perchè appoggiata ad una diligente ſerie di ben inteſi eſperimenti. Avea queſto valoroſo Accademico riuniti a ſuo favore i ſuffragi de' più illuminati coltivatori della naturale Filoſofia, ed erano attribuiti queſti effetti alla ſofferta modificazione della parte infiammabile di queſta ſoſtanza ſalina dall' azione cauſtica della calce, e dalla diſſoluzione dell' alcali volatile nell' acqua contenuta in queſta combinazione.

3. Prevale però al dì d' oggi una nuova dottrina, ch' è dipendente da quella che fa il fondamento della

teoria della cauſticità ingegnoſamente prodotta dal celebre Sig. *Black*.

4. Mio aſſunto è pertanto l' eſaminare di nuovo la vera cauſa delle ſopraccennate alterazioni, e dovrà l' eſperienza decidere una così importante ed intricata quiſtione.

5. Il valente Chimico Sig. *Bucquet* entrato anch' eſſo in ſoſpetto contro l' azione eſcluſivamente in queſto ſiſtema aſcritta alla privazione totale d' aria fiſſa nella calce viva per produrre i narrati effetti ſul ſale ammoniaco, ha fatto varj ingegnoſi eſperimenti. Mi ſono ſingolarmente con eſſo incontrato in quello, con cui direttamente ha eſplorata l' influenza da aſſegnarſi alla preſenza dell' aria fiſſa ſuddetta, al dì d' oggi conoſciuta e compreſa ſagaciſſimamente nella claſſe dei gaz (*a*) dal celebre Autore del Dizionario di Chimica Sig. *Macquer*; ma non pertanto può fondatamente dirſi appieno eſauſto l' argomento, mentre ſenza verun eſperimento diretto paſſa a conchiudere a favore d' una cauſa miſta, cioè dell' azione combinata del principio acquoſo coll' aria fiſſa o gaz cretaceo (*gàs crayeux*) o mofetico.

6. Era queſta parte d'un mio lavoro molto più eſteſo ſu queſto ſoggetto rimodernato già compiuta da molto tempo, allorchè mi venne alle mani il IX. Vol. *delle Mem. preſentate all' Accademia di Parigi*, nel quale trovaſi la belliſſima diſſertazione del Sig. *Bucquet*; ma quantunque vi abbia incontrato una piacevole conformità d' idee ſu varj punti, ho avuta la ſoddisfazione di vedere, ch' era io avanzato aſſai più oltre proccurando di ſviluppare l' oſcura cauſa delle efferveſcenze, e di altri punti molto intereſſanti.

7. Sono le efferveſcenze generalmente attribuite allo

(*a*) Queſto valoroſiſſimo chimico ha ordinato ſotto il vocabolo generale di gaz tutti i fluidi aeriformi ſinqui conoſciuti per meglio diſtinguerli, e contraſſegnarne i caratteri ſpecifici.

ſprigionamento d' un fluido elaſtico ; ma ſi riconoſcerà evidentemente che l' eſpulſione dei gaz non è che un effetto, il quale rende manifeſta la cauſa di quanto ſuccede in quelle circoſtanze ; cioè allor quando da una forza eſterna alla ſoſtanza paſſiva ſi giunge a ſuperare la forza di contatto, che trovaſi tra le parti della medeſima ſoſtanza, e ſe ne proccura la diviſione, e l' uniforme diſtribuzione colle parti del fluido , che eſercita la ſua attività: ſe dunque trovanſi de' principj volatili nelle ſoſtanze di cui ſi proccura la combinazione, dovranno eſſi neceſſariamente venire eſpulſi in ragione dell' attività, colla quale opera il menſtruo, e della reazione delle forze particolari, di cui ſono dotate le parti della ſoſtanza; e queſta eſpulſione non ſarà che un effetto neceſſario, e concomitante delle alterazioni prodotte reciprocamente nelle parti delle materie combinate.

8. Non mi eſtenderò anticipatamente in teoriche riflesſioni ; e per iſchivare una faſtidioſa ripetizione degli apparecchj onde ſoglio far uſo da più di venticinque anni in tutte le operazioni, nelle quali ſi ſviluppano vapori di grande elaſticità, ne deſcriverò (*Tav. I. fig. I*) qui uno de' principali; quello di cui mi ſono ſempre ſervito per la ſcompoſizione del ſale ammoniaco colla calce, il quale non molto differiſce dall' apparecchio che ſoglio impiegare per l' acido nitroſo fumante (*fig. II*) e per lo ſpirito di ſale, e che avuti i debiti riguardi ſerve ottimamente in tutte le ſperienze della produzione de' fluidi aeriformi, oſſia gaz . Debbo però confeſſare, che non m' è mai venuto in mente che la combinazione, che ſi trova negli apparecchj di queſta ſpecie, poteſſe far epoca nella ſtoria de' progreſſi delle umane cognizioni , e che doveſſe un dì fiſſare l' attenzione de' Filoſofi , parendomi che da qualunque Fiſico avvezzo ad oſſervare e ſperimentare , ſe ne poteſſe facilmente immaginare, e promovere l' uſo; dalla deſcrizione

zione de' miei ſi potrà raccogliere, conſiderandoli con imparzialità, ſe debbo anch'io attribuirne l'idea al Sig. *Woulfe*, come fa il Sig. *Prieſtley*, e qualche altro.

9. Le ſtorte *AA*, che io ſoglio adoperare per queſte ſperienze, hanno l'eſtremità del loro collo *BB* fatto a forma di cono, perchè poſſano facilmente inſinuarſi, ed eſſere lutate nei tubi di comunicazione *CC*, che per la ſteſſa ragione dalla parte per cui vengono inſinuati nei tubetti *H* dei palloni *X* hanno una figura conica.

10. Queſti miei palloni *XX* hanno ciaſcuno diverſi di queſti tubetti *HH* in differenti ed oppoſte direzioni; poichè in alcuno di eſſi v' è adattato con luto un tubo di comunicazione *RR*; in alcun altro evvi ſolidamente fiſſato con tenace maſtice un cannello a chiave di ottone *Y*, il di cui foro interno è coperto da un tubo di vetro, che difende il ſottopoſto ottone dall'azione diſſolvente dei vapori acidi od alcalini che per eſſo ſi traducono. La chiave *K* di un tal cannello è di avorio o di corno, e meglio anche di un metallico ſerve un cannello tutto di criſtallo.

11. Dall'eſtremità di queſto cannello *Y* parte un tubo di criſtallo *MM*, il di cui braccio più lungo diſcende e penetra pel coperchio nel vaſe cilindrico *SS* fino quaſi a toccare il fondo del medeſimo, affinchè i fluidi aeriformi che paſſano per il tubo *MM* abbiano ad attraverſare un altro ſtrato di liquore contenuto nel vaſe *SS*, il quale a queſto oggetto deve eſſere molto alto.

12. Oltre a ciò, queſto vaſe ha un coperchio traforato da più fori, in ciaſcuno de' quali è inſinuato a tenuta d' aria un tubo ricurvo di vetro *OO*, che penetra nel riſpettivo vaſe cilindrico *TT*. Ognuno dei vaſi cilindrici, le di cui capacità ſono relative alla qualità dei liquori, di cui ſono ripieni, ha un coperchio a tenuta d'aria, il quale oltre al foro, per cui s'introduce il tubo *OO*, ha un cannello a chiave, al di cui collo è legata una veſcica *P*.

13. Il liquore, di cui faccio uſo per queſto apparato, e di cui riempio i vaſi *TT*, *SS*, è principalmente l' acqua diſtillata, onde riempio il recipiente più grande *SS*, ch' io chiamo il recipiente principale, poichè queſto fluido è il più innocente feltro pe' vapori aeriformi. Negli altri vaſi *TT* ecc. ſoglio verſare dell' acido nitroſo concentrato, dell' olio di vitriolo, dell' acido marino, dell' acido acetoſo concentrato, dell' olio di tartaro, del liquor cauſtico ecc.

Ne' liquori acidi ho avuto ſempre l' avvertenza di porre una foglia d' oro, perchè m' è nato lo ſcrupolo, che nell' atto della ſcompoſizione del ſale ammoniaco colla calce ſi eſali dell' acido marino ſotto forma vaporoſa per la poca aderenza, ch' egli ha colle terre calcaree, e per la grandiſſima ſua affinità coll' acqua ſpecialmente, perchè la ſcompoſizione ſuddetta è ſempre accompagnata da notabile calore, e dall' elaſtica eſpulſione dell' alcali volatile.

Al tubetto ſuperiore *H* del pallone *X* è fiſſato il tubo di comunicazione *RR*, che ſi uniſce al cannello *G* fiſſato nella ſommità della campana *LL*, la quale ripiena d' acqua è immerſa in un vaſe *II* parimenti ripieno d' acqua (*b*).

(*b*) Siccome in tutte le operazioni, che diremo Chimico-fiſiche, ſempre ſi fa un vuoto più o meno notabile nelle capacità principali, cioè in quelle nelle quali debbono ſeguire le ſcompoſizioni o combinazioni, qualunque ſia il modo o per via umida o ſecca, o finalmente per una via miſta, e ſia o nò impiegato il ſuſſidio del fuoco; così due condizioni hanno da riempiere gli apparecchj, quella cioè di ammettere l' aria, e gli altri fluidi eſpulſi; e quella di reſtituire alle capacità vuote l' aria ſtatane ſcacciata. Ma dovendo determinare ſe il fluido raccolto ecceda l' aria eſpulſa, e giudicare con ſicurezza, ſe ſiaſi fatta produzione di fluido aeriforme coſtante, ſarà il mezzo più ſicuro, e più pronto quello di far paſſare dai recipienti colle dovute cautele il riſpettivo gaz entro ad una campana piena d' acqua, la quale abbaſſandoſi ſino al livello ſia ſufficiente a contenerlo tutto; e quindi da queſta ſia ſtabilita una comunicazione col pallone al tubo di comunicazione *RR* ſuperiore o altrimenti; ſicchè finita l' elaſtica eſpulſione, ed aperta queſta comunicazione ſi riaſſorba dalle capacità vuote il fluido contenuto nel-

L'apparato rappreſentato nella fig. II. non è molto diverſo da quello della fig. I., ed è pure ſimile a quello della fig. I. Tav. II., poichè non ſono che leggere differenze le modificazioni, che vi ſi ſcorgono, talchè ſtimo inutile il farne minuta deſcrizione, baſtando una ſemplice oſſervazione delle tavole, onde comprendere la moltiplicità ed eſtenſione degli uſi.

14. Tutte le coſe deſcritte potranno comparire a prima viſta minute e ſoverchie; ma non farà queſto giudizio chi è ſolito a far frequenti operazioni di tal natura. Premeſſe pertanto ſiffatte materiali notizie paſſerò a dare contezza del ſeguito eſame, rimettendo ſotto gli occhi de' riſpettabili Accademici, che la privazione d'aria fiſſa ſuppoſta nella calce viene aſſegnata per unica cagione della ſua cauſticità (poichè ſi prende dimoſtrata queſta privazione dal non ottenerſi effervеſcenza almeno notabile, nel combinarſi la calce viva cogli acidi, qualvolta ſia ella buona e ben cotta); nè altrimenti ſi ſpiega la cauſticità della pietra cauſtica, dell'alcali fiſſo cauſtico in forma fluida, dello ſpirito volatile cauſtico ecc.

15. Si potrebbe ſpeditamente troncare la difficoltà per provare l'inſuſſiſtenza del raziocinio riguardo allo ſpirito volatile cauſtico, dicendo, che la calce che deve impiegarſi per ottenerlo non è viva, e perciò in circoſtanze del tubo diverſe dalle ſuppoſte: tanto più che effervеſcente quanto mai è la calce eſtinta; ma non farò per prevalermene, e comincerò dall' eſame di ciò, che avviene colle accennate ſoſtanze nello ſtato di maſſima cauſticità.

---

la Campana; e dal riempierſi o nò di nuovo d'acqua la Campana ſuddetta ſi abbia ſicuro riſcontro dell' avvenuto: non eſſendovi altra differenza fra queſti apparecchi, ſalvo che queſto è veramente più dimoſtrativo: rieſce però un po' più faſtidioſo, ma ſerve più acconciamente per quelle operazioni nelle quali il gaz è filtrato da' recipienti comunicati inſieme, come nelle operazioni degli acidi nitroſo e marino. *Tav. II. Fig. I.*

16. Prendaſi adunque della miglior calce uſcita appena dal fuoco; ſi laſci raffreddare, ed in un mortajo alcun poco riſcaldato la ſi faccia in pezzi, de' quali fatta ſcelta de' più groſſi s' immergano queſti nell' acqua forte; poco o nulla ſi vedrà uſcire di bollicine dalla medeſima; e mentre ſi fa queſta oſſervazione ſi peſtino preſtamente alcuni altri pezzi, e ſe ne getti la polvere a poco a poco nell' acido ſuddetto. Si vedrà tanto maggiore l' effervеſcenza quanto più minutamente ſtritolata e polverizzata è la calce (*c*).

17. Ciò che ſuccede con la calce viva più manifeſtamente avviene con la pietra cauſtica, e col vetro ſiliceo; mentre l' acqua forte ſteſſa, la qual non dà il menomo ſegno d' azione ſopra queſte materie, quando ſono in groſſi pezzi, per poco che ſia concentrata, coll' aggiunta a poco a poco d' alcune gocce d' acqua, manifeſta una ſenſibile effervеſcenza, la quale diventa notabiliſſima toſto che le materie ſopraddette ſieno ridotte in fina polvere.

18. Non oſtante l' opinione generale dell' ineffervеſcenza di queſte materie cogli acidi, mi pare che ſarebbe ſtato almeno prudente di diffidarne, ponendo mente che (*d*) in altre circoſtanze ſi è dimoſtrato con eſperimenti ingegnoſiſſimi, che i gaz riſultano dalla ſcompoſizione degli acidi; così la privazione di gaz in quelle ſoſtanze dovrebbe a mio giudizio eſſere cagione d' una effervеſcenza più viva, perchè la tendenza e avidità, per così dire, delle ſoſtanze a ripigliare i principj, onde ſono ſtate ſpogliate, deve eſſere in ragione dell' affinità,

---

(*c*) Soglio preferire l' acqua forte all' acido più concentrato, e ſpecialmente all' acido vitriolico, perchè ſono più ſenſibili queſti effetti.

(*d*) Ecco come ſi eſprime il valoroſo Sig. *Lavoiſier* in una ſua Memoria ſopra l' eſiſtenza dell' aria nell' acido nitroſo (Mem. dell'Accad. per l' anno 1776. p. 672.) *Non è dal metallo, che provengono queſte differenti ſpecie d' aria, come avrò molte occaſioni di farlo vedere; eſſe ſono dovute alla ſcompoſizione dell' acido ſteſſo ecc.*

che queſti medeſimi principj avevano colle altre parti del miſto, e della maggior eſpulſione, che ſe n'è fatta.

19. Da queſte ſperienze ſempliciſſime mi pare dimoſtrato che le effervescenze non dipendono dalla preeſiſtenza dei gaz o dell'aria nelle materie, che affettano queſto movimento cogli acidi; ma un nuovo fatto ſarà riprova della verità di queſto principio. Si prenda del vetro ſiliceo, il quale non contiene alcun gaz; ſi peſti ſottilmente in un mortajo riſcaldato, e vi ſi verſi ſopra dell'alcali volatile cauſtico non effervescente: ſi farà nel momento del contatto un'effervescenza uguale a quella, che può fare il miglior acido coll'alcali fiſſo. Nelle ſteſſe circoſtanze ha luogo lo ſteſſo fenomeno fra queſt'alcali volatile, e la pietra cauſtica; e medeſimamente la calce viva; tutta la differenza conſiſte nel grado di attività, quella col vetro ſiliceo eſſendo la più violenta, e quella con la pietra cauſtica ſuperando quella della maggior calce.

20. Quantunque io ammetta l'eſiſtenza d'un acido nello ſpirito volatile cauſtico, come avrò occaſione di dimoſtrarlo in progreſſo, ſarà però ſempre vero, che lo ſpirito volatile ben fatto è reputato ineffervescente cogli acidi; e che da tutti ſi crede che la ſua ineffervescibilità ſia dovuta alla mancanza di gaz; che il vetro ſiliceo in groſſi pezzi non è effervescente, e che dal celebre Sig. *Bergmann* ſi dice ſpoglio di gaz; che la pietra cauſtica finalmente e la calce viva ſono riconoſciute per ſoſtanze ineffervescenti cogli acidi. Forz'è dunque conchiudere, che non è allo ſviluppamento dell'aria nè di un gaz pneumatico, che ſi debbono attribuire le effervescenze. Ma ecco ancora nuovi fatti che avvalorano queſta verità.

21. Se ſi combini della calce viva (la quale in groſſi pezzi non è effervescente) con uguale quantità di ſpirito volatile parimenti ineffervescente entro una ſtorta di vetro, e ſe ne faccia la diſtillazione, impiegando un

tubo di barometro col mercurio per accertarſi, che non ſi fa alcun aſſorbimento dell'aria contenuta nelle capacità, o qualche altro mezzo per aſſicurarſene; come pure perchè non reſti ſoſpetto ſul perfetto ſuggellamento dell'apparecchio; dopo che ſaranno paſſati i vapori elaſtici nel recipiente, l'aria ſarà riaſſorta, e quando la calce comparirà quaſi sfogliata e bianchiſſima, e non paſſerà più coſa alcuna, laſciato cadere il fuoco, e raffreddata a vaſi chiuſi, ſe la ſi cimenti cogli acidi, manifeſterà ella l'eminente proprietà, ch'avrà acquiſtato di far effervefcenza eziandio collo ſpirito d'aceto; ſe invece d'impiegare della calce ſi coobi lo ſpirito volatile ineffervefcente ſopra la pietra cauſtica o ſopra il vetro ſiliceo peſtato, in un ſimile apparecchio, ſarà lo ſpirito volatile, che ſarà divenuto incomparabilmente più potente e più volatile, e fatto ſommamente effervefcente. Ecco qui altre ſoſtanze reputate prive di gaz perchè non fanno effervefcenza cogli acidi, le quali dopo di eſſere combinate tra di sè ſono grandemente effervefcenti.

22. Parmi conveniente di oſſervare, che non oſtante che non ſi faccia altro in queſte operazioni, che una concentrazione di liquori, la volatilità de' vapori e l'elaſticità loro produce un vuoto nella ſtorta; e non mancherebbe di farſi un aſſorbimento ſe s'impiegaſſero apparecchj a feltro *(e)*. Ma in queſto caſo baſterebbe ſeparare la parte dell'apparecchio, la quale è unita al pallone, e adattare al cannello a chiave ſucceſſivamente le veſciche che ſono ſtate riempiute di gaz. Comunque ciò ſegua, è queſto gaz ſoggetto alle ſteſſe affezioni di tutti gli altri fluidi aeriformi nitroſo, marino, e degli altri riferiti dal Sig. *Macquer*; cioè eſſendo eſſi ridotti

---

(e) Per apparecchio a feltro intendo qualunque apparecchio, col quale ſi proccuri il dilavamento dei gaz entro qualche liquore.

al minimo dell' acqua neceſſaria alla loro eſſenza ſalina, e conſeguentemente nel maſſimo grado di concentrazione, acquiſtano l' apparenza aeriforme. Non mi tratterrò per ora ſull' importante ſingolarità delle efferveſcenze delle riferite ſoſtanze fra loro, baſtandomi di richiamarle dopo di aver reſo conto d' alcuni altri fenomeni, che non ſono ancora ſtati oſſervati, e da' quali ſi ricava la prova della verità di queſti riſultati, ſomminiſtrandoci lo ſcioglimento di molte importantiſſime verità.

23. Ho già oſſervato nel §. 5. che i Fiſici ſull' autorità del dotto Sig. *Black* aſſegnano per cauſa della cauſticità di alcune ſoſtanze la ſola privazione totale dell' aria fiſſa o del gaz mefitico; ed ha per verità queſto valente Ingleſe ſagacemente appoggiata la ſua teorica alle ſperienze, che ha fatto ſulla calce terrea. Il Sig. *Macquer* col Sig. *Lavoiſier* e molti altri Filoſofi del primo ordine hanno abbracciata queſta ſteſſa dottrina; ma raccogliendo e combinando i ſentimenti ſparſi ne' varj articoli del Dizionario di Chimica, ſembra che l' illuminato Autore colla ſolita ſua avvedutezza riguardi l' eſpulſione di queſti fluidi elaſtici, oſſia gaz, come un fenomeno inſeparabile dall' azione, che produce la cauſticità. In fatti egli è fuori di dubbio, che queſta circoſtanza non può non aver luogo nella maniera d' eſſere in cui ſi riduce un corpo, per poter quindi eſercitare quella forza reciproca, da cui prende anima la natura, e che è eſpreſſa in una maniera energica da' varj effetti, che ella ad ogni paſſo ci offeriſce; forza già da gran tempo riferita da' Geometri alla gravitazione univerſale, e che conſiſte nella maggiore o minore omogeneità, che ſi procura tra le parti della materia.

24. Queſto effetto dunque non mi pare che una circoſtanza concomitante da cui può derivare una diſpoſizione più favorevole alla materia per manifeſtare gli ef-

ſetti della cauſticità (*f*), ſempre che le altre circoſtanze vi concorrano; ma la ſerie delle ſperienze, che comincerò a dare in queſto Saggio, mi ſembrano baſtanti per convincerci dell'eſiſtenza d'un principio poſitivo ridotto ad uno ſtato di perfetta inerzia, ſin che non è eccitato dalla reſtituzione del principio acquoſo del quale egli è ſtato intieramente ſpogliato in certa ſpecie di ſoſtanze cauſtiche. (*g*)

25. Sono tanto più diſpoſto a ſeguire queſta mia opinione, da me già annunciata nella prima parte d' una Memoria ſopra il *ſal nitro* (*h*), quanto che eſſa non mi allontana dalle idee luminoſe del Sig. *Macquer*, e da quelle del detto Sig. *Lavoiſier*. Il primo parlando della fuſibilità, che le terre calcaree (*i*) proccurano alle ſabbie, e alle argille, ſi ſpiega in queſti termini: *queſto fenomeno, del quale la cauſa è molto oſcura e difficile a rinvenirſi, pare che dipenda da una diſpoſizione paticolare del principio infiammabile, e forſe da un' ultima porzione del principio acquoſo;* e la ſua opinione intorno ai gaz aeriformi è, *che le ſoſtanze ſaline* (*l*) *acide o alcaline in queſto ultimo grado di concentrazione hanno una*

(*f*) Dall' eſpulſione di molti principj eterogenei delle materie ſottopoſte a violente operazioni naſce per neceſſaria conſeguenza una più o meno perfetta omogeneità fra le parti, che rimangono, e ſi fa tra eſſe un maggior adattamento. Da queſta più grande ſemplicità riſulta manifeſtamente un'affezione paſſiva, che procura alle ſoſtanze una maggior forza per attrarre e combinarſi co' principj, co' quali ſi mettono in contatto. Laonde può eſſere attiva la tendenza alla combinazione in certe ſoſtanze, ed affatto paſſiva in altre, come appunto nella calce viva, ed altre ſimili, nelle quali tuttavia ſarei per ſoſpettare non ſenza fondamento, che rimaneſſero ancora alcuni principj eterogenei, ma ridotti per l'eſtrema concentrazione ad uno ſtato di totale inerzia.

(*g*) Non credo di potermi diſpenſare dal diſtinguere i cauſtici in attivi, e paſſivi.

(*h*) Queſta Memoria non ha potuto eſſere ammeſſa al concorſo per eſſere giunta troppo tardi; ma è ſtata però ritenuta.

(*I*) V. queſt' articolo alla p. 71. *Tom.* 4.

(*l*) V. l'artic: gaz alcali volatile alla p. 30.

una tendenza eſtrema a combinarſi in generale con un gran numero di altre ſoſtanze, e particolarmente coll'acqua: queſti punti di viſta, convien dirlo, ſono grandi, luminoſi, e degni della reputazione del loro Autore.

26. Non debbo ommettere di rendere anche la giuſtizia dovuta alla ſuperiorità de' talenti, ed alle cognizioni del dotto Sig. *Lavoiſier*, il cui ingegno ſi manifeſta in tutte le ſue opere. Parlando queſto Autore dell' aria o del gaz nitroſo, dice ch' egli è *l' acido ſpoglio d' aria e d' acqua*; ch' è quanto dire un acido reſo inerte per la maſſima ſua concentrazione (*m*). Egli è vero che un dotto Accademico non pare ſoddisfatto di queſta definizione, e che non oſtante la ſua arrendevolezza nell' ammettere la poſſibilità di concentrare queſt' acido ſino a ridurlo ad uno ſtato concreto, penſa tuttavia per analogia col zolfo (nel quale il celebre *Stahl* ha dimoſtrato l' eſiſtenza dell' acqua) che queſt' acido così concreto non ſarebbe privo d' aria nè d' acqua; ma ſiccome non reca alcuna eſperienza per prova dell' ineſattezza di quella opinione, ed io avrò in ſeguito occaſione di riferire de' fatti, che ſembrano ſtabilirne la ſolidità, non mi eſtenderò più oltre in queſte oſſervazioni.

27. Intanto per non abbandonarmi alla ſeduzione, che può eccitare l' amor proprio, e la prevenzione, mi ſono determinato a cominciare da una breve analiſi delle opinioni de' Fiſici, e particolarmente del ſiſtema del Sig. *Black* intorno alla cauſticità, ſperando così di non eſſere ſoſpettato di abbandonarmi alla ripugnante diſpoſizione di cenſurare gli altrui ſentimenti.

28. Quale è dunque la cauſa della cauſticità? Ella è l' intiera eſpulſione del gaz dalla terra calcarea, riſponde il Sig. *Black* e con eſſo lui un grandiſſimo numero d' eccellenti Fiſici.

(*m*) Mem. dell' Accad. p. 680.

29. Egli è un acido d'una natura particolare aſſociato alle parti del fuoco, il quale non è che una fiſſazione e concentrazione delle parti della luce, riſponde il Sig. *Meyer* ſeguitato da alcuni riſpettabili dotti (*n*).

Riſtringendomi per ora al ſiſtema del Sig. *Black* per il rapporto immediato, che egli ha coi gaz, debbo oſſervare prima d' ogni coſa, ch'egli non è dotato del carattere di generalità, che pur mi pare indiſpenſabile allo ſtabilimento d' una verità primaria e fondamentale, la cui eſtenſione ed importanza influiſce nello ſviluppamento di molte verità particolari. In fatti eſſendo egli limitato a rendere ragione della cauſticità delle calci terree, e di alcuni prodotti, che vi hanno rapporto, biſogna poi ricorrere ad altra cauſa, ſovente anche contraddittoria, per iſpiegare la cauſticità di molte altre ſoſtanze: come ſarebbe per gli acidi, per gli alcali, pe' ſali metallici (*o*), pe' fosfori, e piroſori ecc. Ma baſti per ora di averne fatto parola.

31. La calce viva è dunque cauſtica perchè è riputata del tutto priva di gaz, e ſi è penſato così a cagione di ſua creduta ineffervefcenza cogli acidi: ma dopo le ſperienze già riferite, non credo che ſi poſſa ragionevolmente continuare in queſta opinione, perchè abbiamo dimoſtrato, che l' ineffervefcenza della calce viva e di molte altre ſoſtanze cauſtiche dipende unicamente dal contatto più perfetto fra la parti in cui ſono ridotte, alle quali poi proccurando una diviſione anche pu-

---

(*n*) E' ſtata l' opinione del Sig. *Meyer* diverſamente modificata da altri dotti, ed egli ſteſſo non ha fatto che riſuſcitare le opinioni degli antichi; ma come oggi è riguardato queſt' Autore per capo di queſta dottrina, e ſi poſſono far entrare in quell' opinione tutte le modificazioni ſattevi da altri, credo di potermi diſpenſare dal ſarne ulteriore menzione, perchè non è ancora tempo di diſcuterne la ſolidità.

(*o*) Penſo che ſi debba far diſtinzione tra le ſoſtanze ſaline metalliche, e le calci fatte col fuoco pel carattere di cauſticità, del quale ſono dotate le prime, mentre la ſteſſa proprietà non ſi manifeſta almeno ſenſibilmente nelle ſeconde.

ramente meccanica, di modo che preſentino una maggior quantità di ſuperficie all' azione dell'acido, ſi ottengono le effervescenze: fenomeno che parmi ſtabilire ſenza reſtrizione la ſolidità della teoria della tendenza della materia a combinarſi, teoria ſpiegata con tanta eleganza dal Sig. *Macquer* (*p*).

32. Il ſentimento però de' Fiſici par che riceva una forte conferma dal paſſaggio o traſporto che ſi pretende di proccurare al gaz delle ſoſtanze, che lo contengono in quelle, che ne ſono ſprovviſte; e fra i varj eſempj che ſe ne recano, quello della ſcompoſizione del ſale ammoniaco (*q*) colla calce viva ſembra ſomminiſtrare una dimoſtrazione aſſai ſolida a favore di queſta teoria. Di fatto, diceſi, togliendoſi dalla calce viva il gaz al ſale ammoniaco, non è ſtraordinaria coſa il vedere che l'alcali volatile, che ne riſulta, ſia totalmente ineſſerveſcente cogli acidi, e ſia dotato della più potente cauſticità (*r*): ma nell' atto di cedere alla forza di queſti argomenti, altri fatti ſi preſentano, i quali baſtano per indurre la maggior diffidenza.

33. Senza entrare per ora nella nojoſa diſcuſſione di molti fatti implicanti contraddizione evidente coll'aſſunto principio, e impegnarci in una proliſſa enumerazione di fenomeni ripugnanti, li quali non avrebbero un rapporto diretto colla ſcompoſizione del ſale ammoniaco in alcali volatile cauſtico, di cui è attualmente quiſtione, mi baſta di qui richiamare la ſcompoſizione di queſto ſteſſo ſale, che ſi ottiene per mezzo delle calci metalliche. L'alcali volatile che ſe ne ricava è di ſom-

---

(*p*) Anch'io ho fatto uſo di queſta forza di contatto nelle Mem., che ho ſcritto ſul fluido elaſtico della polvere V. Miſc. Taur. *T.* I. an. 1759.

(*q*) Quello dell' alcali cauſtico, dal quale ſi ricava la pietra cauſtica, è pure un eſempio di queſto traſporto.

(*r*) V. gli Art. del Dizionario di Chimica (*Alcali volatile ammoniaco*) (*ſale*) (*cauſticità*) (*calci* ecc.)

ma cauſticità, ed in forma fluida, colla differenza poi, ch' egli è effervеſcente cogli acidi (*s*). Ma le calci metalliche ſi vogliono pur cariche di gaz. Ognun vede pertanto ciò che ne conſegue legittimamente.

34. Ora prima di paſſare più oltre debbo oſſervare, che le alterazioni, che ſoffre l' alcali volatile nella ſcompoſizione del ſale ammoniaco colla calce, le quali nel ſiſtema del Sig. *Black* ſono aſſegnate all' azione dell' aria fiſſa, come ſi eſprime il Sig. *Bucquet*, ſono, come ho già detto ſin da principio, 1°. che l' alcali volatile che ſe ne ottiene è ſempre ſotto forma fluida; 2.° ch' egli è potentemente cauſtico; 3.° ch' egli è ineffervеſcente cogli acidi; 4.° che queſta ſcompoſizione è accompagnata da uno ſviluppamento tumultuoſo di vapori, riguardato da molti Fiſici per una vera produzione d' aria o di gaz, la quale non manca di cagionare la rottura de' vaſi ſe non ſe gli dà ſcampo libero opportunamente. Siffatte alterazioni eſſendo conſiderate come proprietà, che diſtinguono queſt' alcali volatile da quello che riſulta dalla ſcompoſizione del ſale ammoniaco colla creta, e coll' alcali fiſſo, ho creduto di doverne fare l' oggetto di un eſame tanto più metodico quanto mi è ſembrato egli più proprio a conciliare gradi di fede alla nuova teoria della cauſticità.

35. Le ſperienze delle quali ho reſo conto per riguardo all' effervеſcibilità della calce mi pajono per verità

(*s*) Il Sig. *Bucquet* riſpettabiliſſimo Chimico avea intrapreſo l'eſame di queſto oggetto, e lo pubblicò prima, che foſſi determinato di dare alla luce le mie ricerche ſu queſta ſteſſa materia, dovendo elle far parte d'un'opera molto più conſiderabile. Mi fo pertanto un dovere di rendere qui un giuſto tributo di ſtima alla ſua Memoria rimettendo al giudizio de' dotti le coſe noſtre. E ritornando al mio oggetto mi prevalerò de' termini di queſto illuſtre Fiſico Franceſe nel ſuo eccellente Scritto ſu queſto ſale inſerito nel IX. vol. des *Sau etrang.* p. 572., *nel ſiſtema del dottore Black ſi attribuiſcono* (dice queſt' Autore) *all' azione dell' aria fiſſa le alterazioni che ſoffre l' alcali volatile nella ſcompoſizione del ſale ammoniaco colla calce* ecc.

baſtanti a diſtruggere la ſuppoſizione, alla quale s' appoggiano i Fiſici, cioè ch' ella dimoſtri l' eſiſtenza d' un gaz; ma dovendoſi ragionevolmente diſtinguere queſti fluidi aeriformi in una maniera più ſpecifica, onde formarne idea meno confuſa, ſtimo bene di dividerli, e conſiderarli generalmente in *gaz pneumatici*, ed in *gaz vaporoſi*; giudicando conveniente di dichiarare la mia opinione ſu queſto movimento, ottimamente eſpreſſo dal dotto Autore del Dizionario di Chimica, e parendomi altresì indiſpenſabile di diſtinguere la cauſa d' un effetto dalle circoſtanze, che poſſono accompagnarla. E' dunque la mancanza totale del principio acquoſo, a mio parere, e così d' ogni qualunque gaz, una circoſtanza di fatto, oſſia una conſeguenza neceſſaria del tormento ſofferto dalla ſoſtanza terrea. Queſta diſunione promoſſa con una cauſa così violenta non fa che rimettere la materia in uno ſtato di omogeneità, da cui dipende l' accennata forza della tendenza alla combinazione; forza dipendente dal contatto più o meno eſatto delle parti, il quale riduce le ſoſtanze in uno ſtato di eſtrema aridità, e le rende avide di nuove aſſociazioni, che più o meno perfette, più o meno pronte riuſciranno, in ragione del contatto loro con altre ſoſtanze, e delle proprietà di queſte. Così prontiſſimo ſarà il riaſſorbimento dell' acqua dalla calce, perchè è diffuſo più uniformemente (per la ſua ſemplicità e per la ſua fluidità) e più permeante queſto principio di natura: e ſeco reſtituirà una parte dell' aria, perchè ne contien ſempre in iſtato, dirò col Sig. *Roux*, di diſſoluzione; come in ſimile ſtato contiene i principj d' acidità negli acidi, e d' alcalinità negli alcali.

Ma appunto dal conflitto che naſce nel combinarſi di queſte materie pel rapimento che fanno le une del principio acquoſo alle altre, e per cui ſegue neceſſariamente la loro ſcompoſizione, naſce il movimento che conoſciamo ſotto il nome di efferveſcenza, nel quale lo ſprigionamento di qualunque principio volatile è allora unicamente dovuto, come ottimamente penſa il Sig. *Lavoiſier*, alla ſcompoſizione dell' altra ſoſtanza qualunque, il che ha luogo anche più generalmente, non eſſendo riſtretto il caſo al ſolo acido, del quale parla queſto valoroſo Accademico.

36. Molti inſigni Scrittori, fra' quali il Sig. *Bergmann*, dubitano che ſi poſſa confondere queſto movimento delle effervescenze con quello che è proſſimamente conforme al moto prodotto dall' ebullizione; ma baſta eſaminare le circoſtanze degli effetti, che ne naſcono, onde non temere di prendere abbaglio: mentre non riſulta dal moto di ebullizione altro effetto, che quello d' un' accelerata diſſipazione del principio evaporabile ſenza che venga prodotta mutazione eſſenziale nelle ſoſtanze, ſalvo che nella diſtribuzione de' principj meno volatili. All' oppoſto le effervefcenze ſono ſempre un ſicuro riſcontro di alterazione nelle medeſime. E' vero che nell' uno e nell' altro caſo vi può eſſere, e vi ſarà eſpulſione più o meno compiuta delle parti volatili, e più diſpoſte alla ſvaporazione; ma ſarà queſto nel caſo dell' ebullizione il maſſimo effetto, che ſi può aſpettare; e nelle effervefcenze ſarà ſoltanto una circoſtanza neceſſariamente concomitante. La fermentazione *animata* potrebbe più giuſtamente dar a temere di equivoco, perchè riuniſce le circoſtanze de' due movimenti ſuddetti; ma per la ſua preſſo che uniforme equabilità anch' eſſa va a confonderſi finalmente in quello di putrefazione: moto generato dal concorſo generale delle forze della natura, che reſtituiſce l' equilibrio tra gli elementi nello ſtemperamento delle già logorate combinazioni, per reſtituirle ai puri rudimenti di materia informe; ed è queſto il riſultato di tutti, nè vi s' incontra la debolezza o la violenza ne' mezzi, nè il tumulto negli effetti, onde ſi deve meritamente riguardare come un perfetto temperamento riſerbato alla natu-

ra per produrre, ad onta noſtra, quelle trasformazioni continue, colle quali conſerva un' aſſai equilibrata uniformità nelle coſe ſue; ciò che non ſenza fondamento ha dato motivo a' noſtri anteceſſori di farne un ſiſtema di dottrina compreſo nel volgare adagio *corruptio unius eſt generatio alterius*. Ma troppo mi ſono ſcoſtato dal mio aſſunto, perlochè troncata ogni ulteriore digreſſione ripiglio l' argomento.

37. Egli è dunque abbaſtanza manifeſto, che ſeguendo l' opinione che l' effervèſcenze provino l' eſiſtenza dei gaz, avendo noi dimoſtrato, come è facile a ciaſcheduno di convincerſene, che le ſoſtanze, le quali ſi pretendevano ineffervèſcenti, preſentano per altro queſto movimento, ogni volta che ſi diſtrugge, anche meccanicamente, la forza di tendenza, colla quale i principj ſtavano uniti fra loro; tutta la teoria della cauſticità dipendente dalla privazione del gaz viene legittimamente confinata fra gli enti di ſottile ſpeculazione; e perciò intieramente diſtrutta. Ma per non dipendere più la cauſticità delle mentovate ſoſtanze da così comodo principio, non ſiamo diſpenſati dal mettere in opera ogni sforzo, onde indagarne la vera cagione.

Per accingermi dunque il primo a queſto aſſunto, e per non iſcoſtarmi dall' oggetto in quiſtione, comincerò dall' eſaminare da che dipenda, che queſto alcali è ſempre ſotto forma fluida; perchè queſto liquore è cauſtico; ſe è vero ch' egli ſia e debba eſſere ineffervèſcente cogli acidi; e finalmente ſe i vapori, che ſi manifeſtano nell' atto della ſcompoſizione, ſieno un gaz pneumatico, che ſi ſviluppi, o ſe debbano ſoltanto attribuirſi ad una eſpulſione contemporanea dell' aria contenuta nelle capacità coi vapori alcali volatili, la cui elaſticità iniziale è ſtrepitoſa e tumultuante.

38. Quantunque la calce viva non foſſe effervèſcente cogli acidi, in qualunque modo ella s' impiegaſſe in frammenti più o meno minuti, faremmo tuttavia auto-

rizzati a ſoſpettare dell' eſattezza della ſuppoſizione nella circoſtanza particolare di queſto proceſſo; mentre gli ſperimenti irreprenſibili e ſtati ſin qui riſpettati del valoroſiſſimo Sigr. *Duhamel* ci mettono in diritto di dubitare, ſe ſia lecito ſupporre, che la calce la quale dee ſervire alla ſcompoſizione del ſale ammoniaco ſia ſcevra affatto di gaz, avendo queſto celebre Accademico provato deciſivamente, che non ſegue alcuna ſcompoſizione del ſale ammoniaco colla calce veramente viva, e che è di tutta neceſſità d' impiegarla eſtinta (*t*): non è poi da dubitare che la calce eſtinta, comunque ſe ne faccia l' eſtinzione, non ſi trovi più nelle circoſtanze in cui era; e dalle ſperienze da me fatte, la ſemplicità delle quali mi diſpenſa da ogni dettaglio, riſulta eſſer certiſſima coſa che la calce eſtinta all' aria o nell' acqua riuniſce ogni condizione, per cui manifeſta cogli acidi un movimento più o meno impetuoſo, e che ſi conoſce ſotto il nome d' efferveſcenza, non di ebullizione.

39. Se otteneſſi dunque di provare la falſità dell' aſſerzione, che la calce, la quale produce la ſcompoſizione del ſale ammoniaco, non è altramente nelle circoſtanze della calce viva, e che non potrebbe ella nè meno effettuarla finchè foſſe nelle circoſtanze di queſta, crederei ſoddisfatto il mio aſſunto; ma l' eſattezza dell' analiſi non mi permette d' attenermi alla ſola confutazione del fatto, e mi ſtimo in dovere d' aggiugnere tutto ciò

(*t*) Il Sig. *Fourcroy* nelle ſue Lezioni dice per verità alla p. 282., che la calce eſtinta all' aria ſcompone queſto ſale ugualmente, che la calce viva. Queſta oſſervazione m' è giunta inaſpettata, eſſendo diametralmente oppoſta ai lavori del Sig. *Duhamel*, al ſentimento generale de' Chimici, ed alle mie ſperienze ſteſſe.

Ad onta del mio riſpetto per gli uomini grandi, non mi credo diſpenſato dal ripetere le ſperienze loro, e dall' aſſicurarmi io ſteſſo de' riſultati, come ho fatto ſon già più di vent' anni ſu queſto ſoggetto. Ma ſi vedrà in appreſſo ciò che ho riconoſciuto dalle ſperienze, che queſta nuova opinione mi ha ſuggerite.

to ciò che può eſſere neceſſario per dimoſtrare, che non è nè meno per parte del gaz che ha luogo queſta ſcompoſizione,

40. *Sempre*, dice il Sig. *Duhamel*, *che ſi ottiene l' urinoſo ammoniaco ſotto forma di ſpirito*, *ſi è perchè è paſſato nella diſtillazione coll' acqua contenuta nelle materie*, *e che invece d' eſſere unito ad una ſoſtanza ſolida*, *la quale gli dia corpo*, *lo è ad un liquido che lo diſcioglie*.

41. Queſto paſſo così preciſo d' un Fiſico tanto riſpettabile quanto il Sig. *Duhamel* non m' è sfuggito dalla mente, e già ne ho fatto uſo nel lavoro preſentato all' Accademia noſtra di Torino in principio dell' anno 1760. in ſeguito di varie ſperienze fatte da me ſull' iſteſſo argomento, le quali non ſono forſe conoſciute, ed alle quali rimando i Lettori, che ne poteſſero eſſer curioſi (*u*) per non appoggiarmi ſopra la mia autorità dopo quella del dotto Autore, che ho citato.

42. Quella all' incontro del celebre Autore del Dizionario di Chimica è di troppo gran peſo per ommettere di riferirla: *Egli è ſenſibile che la fluidità dell' alcali volatile dipende dall' acqua contenuta in gran quantità nella calce eſtinta*, *in cui l' alcali volatile è diſciolto*.

43. Il Sig. *Bucquet* nella ſua eccellente Memoria già citata ha cercato d' aſſicurarſi intorno ai dubbj, ch' egli aveva ſull' azione comunemente attribuita alla privazione del gaz nella calce riguardo a queſto ſale, ed eſſendoſi accertato, che nonoſtante il ſoggiorno di queſta ſoſtanza nel gaz mofetico non ſuccedeva alcuna differenza in queſta ſcompoſizione, ha conchiuſo che non ſi doveva aſſegnare alla privazione del gaz; e quantunque

---

(*u*) Trovaſi altresì queſto opuſcolo nel Tom. XIII. dell' eccellente depoſito delle ſcienze fiſiche, la Collez. Accademica.

non ſia andato più innanzi nella ricerca del principio, dal quale poſſono dipendere tutti queſti fenomeni, egli ha tuttavia ſtimato di conchiudere, che ſi devono al concorſo del principio acquoſo carico di gaz; concluſione a mio giudizio un poco troppo precipitata, mentre non ha fatto paſſo all' eſame dell' azione del principio acquoſo privo di gaz, prima di permetterſi queſta concluſione, come lo avrebbe richieſto il rigore dell' analiſi, ed i ſuoi riſultati continuando poi ad eſſere negativi; coſa che non gli ſarebbe avvenuta certamente, come ſi vedrà dalla ſerie delle mie ſperienze. Avrebbe per ultimo potuto ſottomettere all' eſame l' azione riunita del gaz e dell' acqua per conchiudere, come ha fatto, ſenza alcuna taccia.

44. Queſto è appunto il piano, che ho ſeguito affine di dare la maggior generalità alle mie ricerche; ma l' infedeltà de' dati avendomi ſempre reſo più diffidente ho creduto di dovermi aſſicurare anche delle più triviali e minute circoſtanze di queſto proceſſo.

45. Ho adunque cominciato dalla ricognizione dell' effervеſcibilità della calce eſtinta, ed ho oſſervato, che quella ch' è perfettamente eſtinta all' aria è più effervеſcente di quella che lo è coll' acqua, e che l' eſtinzione fatta dall' acqua induce grandiſſime differenze, eſſendo ſenſibilmente più effervеſcente, quando è fatta lentamente e con cautela; ciò che conferma, che dipendono le effervеſcenze della calce cogli acidi dallo ſtato di aridità delle parti della medeſima, e dalla diviſione, che ſi proccura tra le medeſime per mezzo dell' acqua; di modo che per il conflitto che inſorge nell' atto di queſte combinazioni dal rapimento del principio acquoſo, riſulta per neceſſità la ſcompoſizione delle ſoſtanze, da cui ſi ſtrappa. In qualunque maniera però ſia ſtata eſtinta la calce, che s' impiega, non ſuccede alcuna differenza nella ſcompoſizione del ſale ammoniaco, ſe non ſe quella che deve neceſſariamente procedere dal-

ſa maggiore o minore quantità d' acqua, della quale è pregna la calce; ma ne riſultano di aſſai ragguardevoli nello ſviluppamento de' vapori, i quali ſono ſempre più elaſtici e tumultuoſi a miſura che la calce impiegata è meno diviſa.

46. La conſiderazione della poca aderenza dell' acido marino alle terre calcari, dalla quale hanno tratto argomento di ſpiegare i Maeſtri dell' arte il fatto avanzato da alcuni Chimici di avere ſpogliato il ſale marino del ſuo acido colla ſola azione del fuoco, avendomi fatto naſcere, come diſſi, il ſoſpetto che in queſta ſcompoſizione, atteſa ſpecialmente la grande affinità di queſt' acido coi principj volatili, e perciò col principio acquoſo, coll' infiammabile, e coll' alcalino volatile, ne poteſſe sfuggire qualche parte ſotto forma gazoſa, ho diſpoſto il mio apparecchio in guiſa che dopo eſſerſi feltrato attraverſo un conſiderabile ſtrato d' acqua diſtillata, il fluido ſviluppato doveſſe quindi attraverſarne un altro d' acido nitroſo allungato, affinchè ſi regalizzaſſe, e ſcioglieſſe la foglia d' oro, che vi era. Siccome da alcuni Chimici poi ſi è preteſo d' aver ottenuta la diſſoluzione dell' oro in liquori acidi, diverſi dall' acqua regia, mi è perciò venuto in mente di proccurare la feltrazione d' una parte del gaz che diremo *ammoniacale* attraverſo l' acido vitriolico, l' acido marino, e l' acido vegetale, ne' quali tutti eravi una foglia d' oro, e per iſchivare ogni ſoſpetto di ſcambievole comunicazione tra i vapori nitroſi e marini, avendo acceſſo nello ſteſſo recipiente dell' acqua, ho fatto comunicare queſti due liquori riſpettivamente con due altri recipienti, ne' quali vi era pure dell' acqua diſtillata; e ſiccome le comunicazioni erano ſtabilite per mezzo de' tubi di vetro, che ſi ſtendevano ſin verſo il fondo de' recipienti, così non mi reſtava a temere la reciproca alterazione di queſti due acidi: erano inoltre i recipienti tutti di grandiſſima altezza in proporzione del-

la loro vaſtità, come ho notato al §. 12., ed ho creduto anche utile bene ſpeſſo il proccurare la feltrazione del gaz per l' olio di tartaro, e pel liſſivio cauſtico.

47. Nella moltiplicità delle operazioni fatte ſu queſto oggetto ho ſtimato bene di ripetere tutti i proceſſi indicati da' diverſi Autori riguardo alla proporzione tra il ſale ammoniaco, e la calce viva; e così anche di aſſicurarmi delle varietà che poſſono dipendere dallo ſtato delle calci, e dalla maniera di fare le combinazioni delle materie; e mi è riſultato che ſia preferibile la combinazione ſollecita de' fiori di ſal ammoniaco ben puri con tre volte il loro peſo di calce ben viva e appena raffreddata, coll' aſperſione contemporanea e pronta dell' acqua (nella quantità preſcritta dal Sig. *Baumè*) entro la ſteſſa ſtorta per mezzo d' un tubo di latta ricurvo, la cui eſtremità ſia fatta a forma d'innaffiatojo. Richiede queſto metodo, la cui combinazione riſulta dai metodi e dalle oſſervazioni de' celebri Signori *Rouelle* e *Baumè*, una diligente ed anticipata preparazione di tutte le parti dell' apparecchio; perchè non è appena diffuſa l' acqua entro la miſtura, che naſce una veemente fermentazione in eſſa accompagnata da gagliardiſſimo calore, che la fa bollire, ed accelera rapidiſſimamente la ſcompoſizione, dalla quale ſorge preſſo che iſtantanea, e violentiſſima l' eſpulſione de' vapori, i quali eſſendo di ſorprendente elaſticità non potrebbero più trattenerſi ſe rimaneſſe altro lutamento da fare, oltre quello della ſtorta col tubo di comunicazione: avvenendo anzi frequentemente, che per la prontezza della calce nell' imbeverſi d'acqua ſi ha appena il tempo d'infonderla tutta, prima che cominci la ſcompoſizione colla copioſa, ed incomoda emiſſione di vapori ſoffocanti; ma poco ſe ne perde, ſe ſia in pronto l'apparecchio qui avanti deſcritto ai §. §. 10. 11. 12. e 13, e ſe ſieno praticate tutte le ſuggerite cautele.

48. Queſta operazione così eſeguita baſta per aſſuefare l' occhio d'un diligente oſſervatore a riconoſcere la differenza che paſſa tra i movimenti, che ſi diſtinguono dai Fiſici, cioè di ebullizione, di fermentazione, e di effervеſcenza, mentre le circoſtanze loro ſono abbaſtanza diſtinte da non poterſi confondere: l'ebullizione altro non eſſendo, come diſſi, che un' accelerata evaporazione; la fermentazione ſi ſa da tutti eſſere un moto inteſtino più o meno ſenſibile, da cui riſulta la diſunione delle parti della materia, e conſeguentemente la diſtruzione progreſſiva della forza di coeſione; l' effervеſcenza abbiamo veduto dipendere da un rapimento o ſcambievole o unico di qualche principio nell' atto della compenetrazione delle materie, nel quale ſempre vi è azione e reazione, e perciò ſcompoſizione, e nuova combinazione con diſpendio violento di principj volatili.

49. Ne' primi momenti dello ſconvolgimento dei principj delle ſoſtanze meſſe in eſperienza ſi ottiene un liquore di maſſima volatilità e cauſticità ſenza miniſtero di fuoco; ma ſiccome coi vapori viene rapidamente eſpulſa l' aria dalle capacità ne' primi iſtanti, così per metterſi a coperto da un egualmente rapido aſſorbimento del liquore contenuto nel magazzino o gran recipiente, che comunica col pallone, è coſa opportuna il cominciar a metter del fuoco ſotto il bagno a miſura che ſi vede ſcemare l'elaſticità de' vapori dimoſtrata dal rallentamento delle bolle, che attraverſano l'anzidetto liquore.

50. Egli è vero che ſi potrebbe ſupplire chiudendo la ſola comunicazione tra il pallone ed il magazzino; e per non eſporſi alla frattura della ſtorta pel peſo dell' aria eſterna (coſa più volte accadutami in varie ſperienze, nelle quali erano preſſo che vuote le ſtorte) ſi potrebbe aprire la comunicazione dal tubo ſuperiore *RR* del pallone *X* alla campana *LL*. Ma dovendoſi poi di

nuovo chiudere pel nuovo ſviluppamento del gaz che ſi fa dall' azione del fuoco, ſarà più ſpedito di anticipare l' applicazione del fuoco ſotto il bagno.

51. Non eſſendovi confronto da fare tra il liquore de' primi momenti e quello che ſi ottiene in ſeguito dell' operazione, allorchè voglio procacciarmi liquori concentratiſſimi, ho per coſtume di chiudere il tubetto inferiore, e di mutare il recipiente, toſto che ſono di molto rallentati i vapori del primo periodo, vale a dire di quelli, che ſono eſpulſi ſenza fuoco; e ſurrogato un nuovo recipiente *E* raccolgo un liquore, che ſi produce in tutto il tempo che per l' azione del fuoco ſi fa ſviluppamento di gaz ſino all' iſtante, in cui comincia a manifeſtarſi un' oſcillazione nel tubo comunicante col magazzino, la quale nel ſuo rifluſſo ſupera l' altezza dell' acqua dentro al magazzino medeſimo: ſegno infallibile del termine del ſecondo periodo, e di un imminente aſſorbimento. Mutato per l' ultima volta il recipiente *E* ſi dà corſo all' operazione ſino al ſuo fine coll' apertura della campana *LL* immerſa nell' acqua, la quale reſtituiſce l' aria, ch' è ſtata ſcacciata dalle capacità.

52. I riſultati ſono 1.° che il liquore ricavato ſenza fuoco è in uno ſtato di tale concentrazione, che laſciandovi cadere goccia a goccia dell' acido nitroſo ſi fa un ſibilo così veemente, che emula quello d'un acido vitriolico concentratiſſimo nell' acqua, o di un ferro rovente a bianco. Con poche goccie di queſt' acido ottenni 47. gradi di calore nel Termometro a mercurio di *Reaumur*; è ſorprendente la ſua volatilità, e la ſua cauſticità.

53. 2.° quello che ſi raccoglie col fuoco nel tempo dell' eſpulſione è altresì ſommamente effervescente, ma non produce un calore così gagliardo; è per altro conſiderabile del pari la ſua volatilità, e cauſticità.

54. 3.° L' ultimo liquore raccolto parimenti col fuo-

co nel tempo che ſi fa l' aſſorbimento non è per verun conto effervefcente, ed è aſſai meno volatile e cauſtico: che ſe ſi meſcolino inſieme queſti tre prodotti, non ſi ottiene più effervefcenza, e ſi ha il liquore alcali volatile cauſtico ſolito a raccoglierſi nell' operazione dai Chimici.

55. L' acqua dei magazzini è pregna, come può comprenderſi da ognuno, di gaz alcali volatile puriſſimo; ed è la ſua forza ed attività in ragione della quantità de' vapori, e di quella dell' acqua (*v*).

Quanto poi a' liquori che hanno ſervito alla feltrazione del gaz, e ne' quali trovaſi l' oro, evvi un precipitato bianco, talora grigio, e talora finalmente oſcuro nell' acido vitriolico; e qualche volta vi ſi trova un poco annerito l' oro. Nello ſpirito d' aceto ſi ſcorgevano alcune volte de' fiocchi bianchi ſopranatanti, ed altre volte un poco di ſimile precipitato, ma ſempre ſenza offeſa dell' oro; nell' acido nitroſo era ſenſibile la diſſoluzione di queſto metallo dal calore, ch' egli acquiſtava paſſando dal bianco limpido al giallo più o meno carico; nell' acido marino poi viviſſima è la ſua azione ſull' oro, eſſendone la diſſoluzione più compiuta e più pronta che negli altri (*x*). Quanto poi all' olio di tartaro, ſenſibile è il precipitato che vi ſi ſcorge come pure nel liſſivio cauſtico.

(*v*) Speſſo ſi ſcorge nel magazzino principale un tenue precipitato più o meno bianco, il quale mi è ſembrato eſſere una finiſſima terra di natura calcarea ſtata probabilmente aſportata dal gaz nel tumulto de' primi vapori.

(*x*) Non ſempre ſuccede la diſſoluzione dell' oro in queſti acidi nel tempo dell' operazione, almeno in una maniera diſtinta, eccetto che nel caſo che la quantità delle materie impiegate ſia molta, dipendendo dalla durata, e dalla quantità de' vapori eſpulſi, come pure dalla quantità dell' oro per riſpetto a quella degli acidi impiegati in qualità di ſeltro, e dalla maggiore o minore concentrazione. Ma quand' anche non riuſciſſe contemporanea la diſſoluzione, ſi avrà motivo di riconoſcerla col ſoggiorno dell' oro negli ſteſſi acidi carichi di gaz.

56. Non credo di potermi diſpenſare dal riferire un fenomeno del tutto ſtraordinario, che mi è più volte riuſcito di vedere, cioè la perdita dell'effervеſcibilità di un liquore alcali fiſſo da me talvolta impiegato; era queſto una diſſoluzione carica a tutto potere d'un tartaro che ſi ſuole impiegare da varj Artiſti nelle tinture, il quale non eſſendo perſettamente calcinato nè tampoco purificato dalle diſſoluzioni, feltrazioni, ed eſſiccazioni ſucceſſive e ripetute, può riguardarſi come un alcali impuro, nel quale, oltre a molta materia terrea, vi ſono unite molte parti flogiſtiche, e forſe qualcuna ancora delle acide; ad ogni modo però ſempre che ho fatto ſeltrare il gaz alcalino, o vogliam dire *ammoniacale* entro a queſto liſſivio, paſſato però per la carta, perdeva intieramente la proprietà di fare effervеſcenza con qualunque acido, quando era ben carico di vapori alcali volatili cauſtici: di bianco limpido diventava giallo, e quindi roſſigno il liquore; ſviluppava una tinta arſiccia nella carta azzurra, divenuta ſecca dopo di eſſervi ſtata immerſa; ed infondendovi ſopra il ſale di tartaro ben purgato e ben ſecco, pareva eccitarvi uno ſviluppamento di bollicine con ſchiuma alle pareti de' vetri da orologio, de' quali ſoglio ſervirmi per ſiffatte eſplorazioni. Succedeva finalmente a queſto liquore quello che alle volte accade coll'olio di tartaro per deliquio carico di colore, vale a dire che oltrepaſſando apparentemente il punto di ſaturazione ſi condenſa lo ſpirito volatile in un liquore più chiaro, ſopranuota al liquore alcali fiſſo, galleggiando, come fa l'olio graſſo ſull'acqua. Ma è degna d'oſſervazione la corteccia, che diſtingue la ſeparazione di queſti due liquori, mentre s'aſſomiglia ad una pellicola ſottiliſſima ed arricciata partecipante del colore particolare d'ognuno de' due liquori.

57. Parmi d'aver tutto il fondamento, onde aſcrivere la ſingolarità di queſti fenomeni al rapimento dell'acqua dell'olio di tartaro dal gaz ammoniacale, e dalla

neceſſaria diverſità che ſi produce nella diſtribuzione, aderenza, e tenuità del flogiſto cagionata dalla tendenza del medeſimo a combinarſi collo ſpirito volatile, mentre viene dalla forza di coeſione ritenuto dall' alcali fiſſo. In fatti chiariſſimo ſuol eſſere lo ſpirito alcali volatile cauſtico; chiaro del pari potrà eſſere il liſſivio alcalino; ad ogni modo colorita più o meno riſulterà la combinazione de' medeſimi, lo ſteſſo ſpirito ſopranuotante comparirà tinto in giallo più o meno carico, mentre più roſſiccio ancora rimarrà l' alcali ſiſſo. Non è equivoca l' azione dell' alcali volatile cauſtico ſulla parte infiammabile de' liquori, e baſta un ſemplice ſperimento per convincerſene. Si combini un acido concentrato tanto che baſti per mordere l' olio che vi s' infonde; vi ſi getti ſopra dello ſpirito volatile cauſtico concentrato: immediatamente ſi vedrà rapito l' olio all' acido, e ridotto in forma ſaponacea *(y)*, baſtando altresì a dimoſtrare queſta attività il colore giallo roſſigno, che acquiſta lo ſpirito volatile più limpido, quando, otturata una boccia con turacciolo di ſughero, s' immerga queſto nel liquore.

Per altro farò nel caſo di far conoſcere un' altra volta che la ſteſſa proprietà, che hanno varie ſoſtanze di poterſi infiammare, dipende non tanto dalla quantità che dalla tenuità, e diſtribuzione del principio infiammabile in eſſe contenuto.

58. Egli è però evidente, che gli errori che poſſono eſſerſi introdotti non ſono che una conſeguenza neceſſaria delle ineſattezze occorſe nello ſtabilire i dati, mentre ſinora non s' era da alcuno de' Fiſici ſoſpetta-

---

(y) Sarebbe forſe troppo ardito il penſare, che l' apparenza ſaponacea foſſe da riguardarſi come un ſegno di antagoniſmo di forze riſultanti dalla cauſticità, che confondendoſi ſoltanto reciprocamente ſenza combinarſi reſtano in ſoſpeſo.

to. 1.° che l' ineffervеſcenza dello ſpirito volatile cauſtico dipendeſſe dal mero difetto di concentrazione. 2.° Che nella ſcompoſizione del ſale ammoniaco con la calce ſi aſſociaſſe una parte dell' acido marino coi vapori alcalini ; anzi a dire il vero concederò, che vi foſſe fondamento per non formare queſto ſoſpetto, giudicandone da ciò che ſuole avvenire nel combinarſi queſte ſoſtanze, poichè ne riſulta la produzione dello ſteſſo ſale ammoniaco : non potendoſi fare argomento in contrario, fuorchè conoſcendo appieno ciò che ſuccede in sì fatte ſcompoſizioni, cioè che ceſſano le forze mutue di tendenza alla combinazione per il difetto del veicolo neceſſario, vale a dire del principio acquoſo, eſſendo ridotto ognuno d' eſſi ad un ſingolare grado di concentrazione; laonde non può aſcriverſi a riprenſibile errore di mente l' aver aſſegnata la cauſa della cauſticità alla privazione dell' aria fiſſa, eſſendo queſta una circoſtanza di fatto, la quale però non è che una conſeguenza neceſſaria e concomitante la vera cauſa, cioè quella della diviſione più o meno violenta delle parti, con ſimultanea eſpulſione di alcuni principj e l' inzeppamento forſe in alcune di un acido ridotto alla ſua maſſima concentrazione, e del flogiſto anche in altre (Υ). La dimoſtrazione di queſti effetti in tutte le materie dotate del carattere di cauſticità ſarebbe troppo eſteſa per comprenderla in queſto Saggio, e mi baſti di averli dimoſtrati nel caſo concreto dello ſpirito volatile contro uno di que' punti fiſſi, e fondamentali, ſu' quali ſi è appoggiata l' ingegnoſa dottrina del Sig. *Black*; riſervandomi a darne lo ſviluppamento generale in altra occaſione per non diſcoſtarmi dai riguardi, che

---

(Υ) Avvertaſi che qui s' intende di eſprimere quel grado di concentrazione, cui non può attignere un acido ſenza ceſſare di eſſer tale; gli ulteriori gradi convertendolo probabilmente per ultima metamorfoſi, prima dell' intera riſoluzione, in alcali volatile.

preſcrive il rigore analitico d' un accademico ragionamento. Mi reſtringerò pertanto ad oſſervare che dal non eſſerſi poſto mente al vuoto, che neceſſariamente deve ſuccedere ne' vaſi chiuſi, perchè ſegua una qualſivoglia operazione capace d'aver effetto in tali circoſtanze, poſſono facilmente eſſerſi moltiplicate chimeriche produzioni di nuove arie, grande diverſità paſſando tra ciò che deve intenderſi per aria, e il gaz o fluido aeriforme.

59. Quantunque non intenda di entrare per ora in una più eſteſa dimoſtrazione della concentrazione ed inzeppamento di varj principj, e dell'acido ſingolarmente non meno che della relazione ſtrettiſſima, ch'egli ha col flogiſtico; per poter affermare che l'acido ridotto allo ſtato di maſſima concentrazione, o di privazione eſtrema del principio acquoſo, ſi manifeſta quindi o colle proprietà cauſtiche, o coi ſintomi di flogiſto, e forſe (ſiami permeſſo d'andar più innanzi ancora) con quelli d'alcali volatili, ſecondo che la materia, nella quale trovanſi inzeppati queſti rudimenti, viene modificata dalle nuove aſſociazioni, che ſe le fanno incontrare, onde per mezzo di eſtemporanee aſſociazioni o concordemente o ſoltanto in parte concorrono alla formazione di nuovi prodotti; mi baſti l'accennare alcuni fatti comprovanti queſta manifeſtazione del flogiſto nelle ſoſtanze coll'acquiſtata cauſticità.

60. Il Sig. *Gellert* aſſicura alla p. 170. del ſecondo volume della ſua Chimica metallica eſſer non ſolo poſſibile di ridurre la luna cornea per mezzo dell'alcali fiſſo (oſſervazione altresì fatta dal ſagaciſſimo Sig. Cav. *Landriani* di concerto col dotto Sig. Profeſſore *Moſcati*), ma che ſi può eziandio rivivificare la calce di piombo, e quella d'antimonio per mezzo della creta. Ancorchè da queſto Autore ſi ſparga poi qualche dubbietà ſulla neceſſità del flogiſto nella riduzione delle calci metalliche per la poca quantità, che queſte materie ne con-

tengono, ravvicinando un altro ſperimento riferito dal celebre Sig. *Baumè* nella ſua Chimica ragionata alla p. 33. del Tom. 2°, il quale conſiſte nella precipitazione del ferro d' una diſſoluzione di vitriuolo verde in una ſpecie d' azzurro di Berlino col liſſivio cauſtico, mi pare che più fondato ſia il penſiere del Sig. Cav. *Landriani*, cioè che per mezzo della cauſticità ſegua la flogiſticazione dell' alcali fiſſo, vale a dire, ſecondo l' interpretazione che debbo permettermi, che per queſta operazione diventi manifeſta la preſenza della materia infiammabile, diſtribuita prima e diffuſa in troppo gran numero di parti, riducendoſi così allo ſtato di vero flogiſto; cioè a dire d' un ravvicinamento de' principj infiammabili per mezzo della concentrazione loro, dipendente dalla diſſipazione ſegnatamente del principio acquoſo: non ſolo ho riconoſciuta la verità del fatto accennato dal Sig. *Baumè*, ma l' ho anche moltiplicato combinando colla diſſoluzione del vitriolo marziale lo ſpirito volatile di ſale ammoniaco cauſtico; una diſſoluzione del fegato di zolfo calcareo alcalino nell' aceto; l' alcali volatile ottenuto per mezzo del liſſivio cauſtico del liquore ſiliceo; lo ſteſſo liquore ſiliceo benchè men prontamente, e meno intenſo ſia ſtato il precipitato, e con queſti anche l' alcali volatile concreto ricavato per mezzo dell' alcali fiſſo, oſſervandoſi una ſingolare diverſità dall' eſſere o no ridotte queſte ſoſtanze allo ſtato di cauſticità nella ſegnata precipitazione.

61. Senza ſtendermi più a lungo ſu queſto punto mi ſia ſolamente permeſſo di oſſervare, che proccurandoſi la precipitazione del ferro per mezzo di ſoſtanze volatili, tutto che cauſtiche; non è durevole la tinta azzurra, ſe ſi laſcia libero l' adito all' aria; ſuccedendo il contrario ſe ſe ne interrompa la comunicazione; e tanto è più inſtabile queſta tinta, quanto ſi fa la combinazione in vaſi di maggior apertura; dal che mi naſce il ſoſpetto, che una delle condizioni più eſſenziali alla ſolidità del-

la tinta turchina ſia la totale eſpulſione o la fiſſazione de' principj volatili (z); condizione che appunto parmi compiutamente ottenerſi per mezzo della calcinazione, poichè in virtù della eſpulſione del principio acquoſo ſi giugne al termine della neceſſaria concentrazione del flogiſto, in cui diventa inerte la naturale ſua volatilità, ed eſercita quindi la nuova qualità acquiſtata di cauſtico ſul ferro medeſimo; potendoſi a mio giudizio riguardare queſta proprietà della cauſticità come un attributo generale della materia diſſeminato con diverſa relazione tra le ſoſtanze, ed eſprimente una maſſima forza d'affinità per la tendenza invariabile d'una diſtribuzione equilibrata fra le parti componenti le ſoſtanze combinate; equilibrio che richiede neceſſariamente lo ſtato di fluidità delle medeſime; e mi farò lecito per ultimo di fare una rifleſſione, cioè che ſi conſerva ſempre l'analogia tra il flogisto ed il principio acquoſo, ſicchè è queſto alle ſoſtanze metalliche, ciò che è l'acqua eſſenziale alla natura de' ſali, mentre un'altra parte ſovrabbondante e meno ardente, che giuſtamente può denominarſi materia infiammabile, corriſponde a quella quantità d'acqua che ſi riguarda come meramente aggregativa, e da cui dipendono le riſpettive forme delle criſtallizzazioni.

62. Un punto importantiſſimo al quale debbo ora rivolgermi ſi è quello della diſſoluzione dell' oro nell' acido marino. Si ſa che il dotto Sig. *Scheele* ha annunciato ai Fiſici la poſſibilità di conferire queſta proprietà a queſt' acido diſtillandolo ſopra la calce del man-

---

(z) Volgare è l'oſſervazione della volatilità delle diſſoluzioni del ferro, e però ſembra aſſai plauſibile il penſare, che dall' adunamento, e ravvicinamento de' principj infiammabili non ſolo perda il flogiſto gran parte della ſua volatilità, ma che adattandoſi più eſattamente alle parti del ferro ſcemi altresì la volatilità di queſto.

ganeſe ; e deduce col Sig. *Bergman* eſſere la medeſima dipendente dalla flogiſticazione, che ſi fa di queſt' acido per tal mezzo, e che lo ſteſſo ſucceda nella combinazione dell' acido nitroſo col marino conoſciuta ſotto il nome di acqua regia.

63. Volentieri conſento coi medeſimi ſu queſto punto di teoria riguardo all' acido marino, perchè contro il comune ſentimento credo che l' acido nitroſo ſia intieramente ſprovviſto di flogiſtico, ed appunto per queſto ſia più d' ogni altro acido avido di rapirlo alle ſoſtanze che ne contengono. Oſerò dire anche di più, che non ſia la ſua natura compatibile colla combinazione della materia infiammabile, e che ſia dovuta al ſommo grado di concentrazione de' due principj la debole aſſociazione del flogiſto nello ſpirito fumante; ma che ſia aſſai probabile che non poſſa a meno di ſeguire la reciproca loro ſcompoſizione, quando naſca quel rapporto tra i loro principj conſtituenti da poterſi combinare in una maniera più ſtretta ed aderente; di modo che non oſtante l' attività ſua per iſtrapparlo dalle materie, non gli conferiſca però la facoltà di ſeco contrarre un' unione veramente intima ed eſplorabile. Quantunque la mia ſcoperta confermi in parte il penſiero de' ſuddetti Fiſici, la conſiderazione però dell' aſſociamento de' vapori di queſt' acido con gli alcalini nella ſegnata ſcompoſizione del ſale ammoniaco per la calce mi ha laſciata qualche dubbiezza intorno alla modificazione, che ſi vorrebbe recata eſcluſivamente ſul flogiſto. Laonde per procedere più cautamente mi ſono propoſto di moltiplicare gli ſperimenti relativi a queſt' acido. Ho pertanto combinato 4. onc. di ſale ammoniaco purgato con 12. onc. d' olio di tartaro, nel quale ho diſciolto 3. onc. di ſale di tartaro ſecco in un mattraccio *A* (*fig. III. tav. II*) alto onc. 22. di Piemonte compreſa la boccia del diametro d' un po' più di 3. onc., il di cui orifizio *B* fatto in forma conica combaciava eſattamente

con quello d'un capitello tubulato *E* a cono roveſcio, e col becco ripiegato ad angolo, perchè poteſſe diſtenderſi con l' eſtremità ſin verſo il ſondo d' un recipiente del diametro di circa 1. onc., e 5. in circa d' altezza, nel quale contenevaſi dell' acido marino allungato con acqua diſtillata, e dell' oro; ſtendevaſi poi di là un tubetto a forma d' imbuto, onde portare l' olio di tartaro nel mattraccio ſenza pericolo di ſpanderſi nel capitello. Furono diligentemente otturate tutte le aperture, e fu adattata la veſcica al tubo a chiave, di cui era guernito il recipiente; e ſi poſe il fuoco ſotto la boccia del mattraccio non eſſendo inſorta coſa alcuna prima dell' applicazione del medeſimo.

64. In un ſimile apparecchio fu combinato il ſale ammoniaco al peſo di 4. onc. con 12. di liſcivio cauſtico; ed in un altro quantità pari di ſale ammoniaco con 12. onc. di liquore ſiliceo. Nè queſto pure produſſe alcun ſenomeno prima dell' applicazione del fuoco; ma all' oppoſto divenne ſpumante la miſtura del ſale col liſcivio cauſtico *(aa)*, e s' ebbe appena il tempo di chiudere, che cominciò lo ſviluppamento del gaz.

65. I riſultati della ſcompoſizione coll' olio di tartaro furono il ſolito ſviluppamento del gaz, e la formazione del ſale concreto nel primo tempo; ma divenne preſſo che floſcia la veſcica, e ſeguì l' aſſorbimento del liquore, nel quale era immerſo il becco del capitello.

66. Queſto periodo è un ſegno infallibile che non ſarà per accreſcerſi la quantità del ſale volatile concreto; ma che dalla eſpulſione del medeſimo dipende la maggior energia de' vapori, mentre diventa indiſpenſabile un continuo accreſcimento di calore a miſura che

---

(aa) Era fatto queſto liſcivio ſecondo il metodo del fu Sig. *Bucquet* deſcritto dal Sig *Fourcroy* nelle ſue Lezioni alla p. 264. Tom. 1.

egli ſi aduna alle pareti del vetro, per cui ſi riduce l' acqua in vapori, e ſi diſcioglie nuovamente il ſale. Queſta diſſoluzione è altresì degna d' oſſervazione, perchè ricade il liquore in iſtriſcie ſpirali con un' apparenza olioſa; dalla continuata coobazione però ſi riduce la materia allo ſtato di ſiccità, con un colore oſcuro e foſco, eſalando pochiſſimo odore d' alcali volatile dall' apparecchio aperto, come pure dal recipiente, in cui ſi contiene il liquore, nel quale ſi fa un precipitato purpureo ſporco, che tuttavia dimoſtra la diſſoluzione dell' oro, ch' è ſingolare, perchè precipitato in oro di Caſſio ſenza il concorſo dello ſtagno; ma per verità non mi è riuſcito di fondatamente aſſicurarmene, ancorchè abbia ottenuto per mezzo di una diſſoluzione di ſtagno nell' acqua regia combinata con queſto liquore una tintura turchina leggermente violacea (*bb*).

67. La ſcompoſizione poi col liſcivio cauſtico ſviluppa, come diſſi, dai primi iſtanti e ſenza fuoco quantità di gaz, diventando ſpumante la materia, la quale prende una tinta gialla, e feltrandoſi i vapori pel liquore, toſto ſi vede piena di fumi bianchi la parte vuota del recipiente, cominciando a manifeſtarſi prima dell' applicazione del fuoco gonfia poi moltiſſimo la materia riſcaldandoſi col fuoco applicato, e rapido diventa lo ſviluppamento del gaz: ciò che ne rende aſſai faſtidioſa l' amminiſtrazione. Il liquore del recipiente *HH* è carico di vapori alcalini, mentre non oſtante l' eſiſtenza dello ſpirito di ſale probabilmente neutralizzato da una parte di queſti vapori, ne uſciva tuttavia fortiſſima eſalazione, ed avendo voluto ſaturare d' acqua forte

---

(*bb*) Più manifeſta compariſce col tempo la diſſoluzione dell' oro nell' acido del recipiente.

ſorte queſto liquore, fu grande la quantità, che ſe ne richieſe. Non ebbi indizio alcuno di diſſoluzione dell' oro; non ſo però ſe doveſſe ciò attribuirſi alla debolezza grande dell' acido marino contenuto nel recipiente *HH*.

68. La ſcompoſizione ottenuta dal liquore ſiliceo manifeſtò un po' di ſchiuma alle pareti del vetro prima dell' applicazione del fuoco; ma appena ſeguita la medeſima, fu aſſai impetuoſo lo ſviluppamento del gaz, e ſi diſciolſe gran parte dell' oro nel tempo dell' operazione; quindi avvenuto il ſolito aſſorbimento, per cui ho dovuto accreſcere il fuoco, i vapori che paſſavano nel recipiente vi cagionavano una notabile effervеſcenza; ciò che ſervirebbe di forte indizio, che coi primi vi foſſe l' acido marino, e ſolo alcalini foſſero quelli ſucceduti all' aſſorbimento; coſa che concorderebbe aſſai bene colle notizie correnti della ſomma elaſticità de' vapori acido marini, e che mi parrebbe dimoſtrata dalla poca forza del liquore ſuddetto, tramandando appena qualche ſentore di vapori alcali-volatili.

69. Sempre più manifeſta parendomi l' azione dell' acido marino, ho creduto giovevole di aſſicurarmene direttamente per mezzo della ſcompoſizione del ſale marino ſteſſo alla maniera di *Glaubero*, ed ho perciò eſeguita la ſcompoſizione di 2. onc. di queſto ſale ben puro, e decrepitato con 5. onc. e $\frac{1}{2}$ circa d' olio di vitriolo nell' apparecchio poc' anzi deſcritto, e colla ſola avvertenza di far cadere il ſale marino ben peſto poco per volta nell' olio di vitriolo per mezzo d'un turacciolo bucato obbliquamente, nel quale ho incaſtrato un fiaſchetto di vetro col ſale, il di cui orifizio era alquanto riſtretto, e per tal modo rimaneva eſattamente chiuſo ogni adito tra il mattraccio e l' aria eſterna

(*cc*). Veemente fu la produzione de' vapori ogni volta che percuotendo il fiaſco cadeva del ſale nell' acido: e non oſtante ogni diligenza uſata per l' aſſicurazione delle lutature, con tutto ciò or qua or là uſcivano fumi bianchi, i quali venivano però prontamente ritenuti applicandovi della cera carica di trementina; ceſſato finalmente il tumulto de' vapori, e la rapida produzione gazoſa, fu continuata l' operazione col ſoccorſo del fuoco, e condotta ſintanto che fu piena carica di fumi bianchi la parte vuota del recipiente, nel quale vi era l' oro coll' acido marino deboliſſimo.

70. In queſta operazione ſegnatamente hanno luogo rapidiſſimi e ripetuti aſſorbimenti, perchè ſi replica il vuoto ſempre che cade del ſale nell' acido, ed è queſto vuoto tanto più eſatto, quanto più lo ſcoppio de' vapori è forte e rapido; laonde non vi ſi può rimediare fuorchè traforando con un ago il buco, che ſi ſarà laſciato nel turacciolo a queſto fine, o aprendo la comunicazione, che per mezzo del medeſimo ſi ſarà ſtabilita da principio col tubo a chiave applicato alla parte ſuperiore d' una campana immerſa nell' acqua.

71. Preſe l' acido del recipiente una tinta gialla vie più carica fino a pareggiare quella d' un belliſſimo colore d' oro; e ſcemò notabilmente la quantità dell' oro; ma non fu già così precipitoſa nè compiuta la diſſolu-

---

(*cc*) E' opportuno il far oſſervare, che per le ſperienze di queſta natura l' imbuto roveſcio, che ſta anneſſo al capitello, dee eſſere di grande altezza, e coll' orifizio eſterno coſiderabile, affinchè ſi poſſa dare una conveniente obbliquità al fiaſco, nel quale ſi mette una delle materie, ſpecialmente ſe è in forma concreta; il mio ſiſtema di tubi è per queſto effetto alto 2. in 3. oncie, e circa di un' oncia e mezza d' orifizio eſterno: ancorchè ſembri più comodo di mettere il ſale nella boccia del matraccio, e l' olio di vitriolo nel fiaſco, preferiſco ciò non oſtante di fare il contrario per non eſpormi alla quaſi infallibile rottura della boccia, facendo cadere queſto acido particolarmente concentrato ſopra una materia concreta; accidente però che non m' è mai avvenuto cogli altri acidi.

zione, come mi è avvenuto nella ſcompoſizione del ſale ammoniaco colla calce, e col vetro ſiliceo nella maniera, e colle avvertenze indicate; dalla qual differenza parmi di poter conchiudere, che quanto la calce ed il vetro cauſtico ſono materie totalmente aride e più ſemplici, ſono altrettanto avide del principio acquoſo flogiſticato, e più radicalmente ne impoveriſcono l' acido marino, di cui s' accreſce l' efficacia. Per lo contrario l' acido vitriolico ha maggior affinità colla parte infiammabile quando è più concentrata che non è nelle ſoſtanze ſuddette; dunque non tanto dalla flogiſticazione, quanto dal rapimento ſimultaneo del principio acquoſo deeſi ripetere queſta proprietà.

72. Un fenomeno coſtante, il quale ſerve a dichiarare l' eſiſtenza dell' acido marino, e perciò degno d' attenzione, ſi è l' effloreſcenza fumoſa di cui ſono principalmente ricoperte le pareti eſterne delle bocce che racchiudono un qualche liquore, nel quale egli ſi trovi o ſotto forma gazoſa, o ritenuto ſoltanto dalla ſemplice forza d' aggregazione; ſi vede pur anche la medeſima efflореſcenza intorno alle pareti interne della parte vota de' recipienti; ed è tanto più bianca, e tanto più aderente, quanto è più ſcarſa l' umidità; ella è acida e ſalſa al guſto. Ma ciò che vi è di più ſingolare ſi è, che non ſolo ſono manifeſtamente diſtinte queſte due ſenſazioni al palato, ma diſtinto è l' ardore ch' ella eccita ſulle parti nervoſe della lingua, e ſingolarmente dello ſtomaco: ſegno caratteriſtico della forte ſua cauſticità; e ſiccome ſi ſente il guſto acido e cauſtico prima del ſalino, convien dire, che ſia queſta efflореſcenza il riſultato d' una ſoſtanza ſalina con eſuberanza d' acido; e ſono tanto più diſpoſto a perſuadermene, che nelle bocce in cui ſi conſerva la ſpirito di ſale, ſe qualche poco di queſti fumi può trapelare, ſi forma al margine eſterno del collo una efflореſcenza concreta, diſtintamente ſali-forme, comechè opaca, la quale è gen-

tiliſſimamente figurata a forma di piccoli ceſpugli fraſcati regolarmente.

73. Ho facilmente riconoſciuta la diſſolubilità dell' oro dalla ſola combinazione dello ſpirito volatile cauſtico coll' acido marino, purchè s' impieghino l' uno e l' altro, e principalmente il primo, in iſtato di maſſima concentrazione, benchè però ognuno di queſti liquori ſeparatamente non manifeſti la menoma azione ſopra queſto metallo; ciò che darebbe a divedere, che l' accennata proprietà è il riſultato d' una combinazione dell' acido marino con altri principj, i quali devono incontrarſi nello ſpirito volatile cauſtico.

74. Conſiderando però la natura di queſto fluido, nel quale ſi trovano oltre ai principj alcalini volatili quelli ancora dell' acido marino ſpogliato notabilmente di umidità, e inzeppato per contrario di parti flogiſtiche; avuto riguardo al coſtante fenomeno della riferita efflorefcenza, ſempre che vi abbia evaporazione, ed allo ſviluppamento de' fumi bianchi ogni qualvolta ſi promove la ſeparazione delle parti più volatili dell' acido marino da quelle che ſono più fiſſe; parmi ragionevole l' attribuire queſta proprietà di diſciogliere l' oro alle alterazioni provenienti dal difetto di principio acquoſo nell' acido marino, dal quale, oltre all' accreſcimento di concentrazione, viene indotta probabilmente una maggiore attenuazione, ed una differente diſtribuzione delle parti infiammabili, piuttoſto che di riconoſcerla unicamente dall' impoverimento delle ſteſſe parti infiammabili, come ſi vorrebbe dai riſpettabili Accademici di *Upſal*.

75. Queſta effloreſcenza ſembrami identica co' fumi bianchi, che ſpande l' acido marino al ſuo contatto coll' aria libera, e ſe male non m' appongo riſulta la medeſima dalla ſvaporazione che ſi promove in queſta circoſtanza d' una parte del flogiſto, non altrimenti che nel gaz nitroſo, e come ſuccede all' acido ſulfureo; laon-

de ſono queſti vapori per riſpetto all'acido marino quello che ſono i vapori roſſi dell'acido nitroſo conoſciuti ſotto il nome di gaz nitroſo per riſpetto a queſto acido, colla differenza che baſta l'umidità, contenuta nell'aria atmosferica, al gaz nitroſo per condenſarſi e preſentarſi ſotto forma d'acido, ed all'incontro richiedeſi maggior quantità d'umido per la condenſazione del gaz marino; il che ſembrerebbe dimoſtrare, che queſto è in uno ſtato di maggior concentrazione, ch'egli è meno aderente al principio acquoſo, e che in virtù di queſta minore affinità egli ne può contrarre un'aſſai maggiore in queſte circoſtanze col principio infiammabile; di modo che ſembrami molto meno da attribuirſi alla sflogiſticazione, che alla maggior concentrazione dell'acido marino, la proprietà ch'egli acquiſta in queſte operazioni di diſciogliere l'oro (*cc*).

76. Queſte ſperienze dimoſtrano finalmente colla più deſiderabile evidenza, che lo ſtato di fluidità, nel quale ſi ottiene l'alcali volatile cauſtico per mezzo della calce, non dipende unicamente dalla quantità dell'acqua impiegata nel proceſſo; mentre ſe queſta foſſe di ciò la

---

(*cc*) Dalla aderenza del principio acquoſo dell'acido del nitro, maggiore che non è nel marino, nel vitriolico, e nel vegetale medeſimo, parmi che ſi poſſa ripetere quella che ſi manifeſta nel colore de' fumi, che eſalano, ſembrandomi la tinta roſſa de' vapori nitroſi un ſegno manifeſto dello ſtato di concentrazione della materia infiammabile, la quale tende a dileguarſi colla volatilizzazione, afferrando con avidità l'umido ſparſo nell'atmosfera. Le calci metalliche altresì non acquiſtano il colore roſſo, ſe non dopo una grandiſſima diſſipazione del principio acquoſo, dalla quale dipende quella d'una proporzionata quantità di flogiſto; vale a dire di quella che non ha avuto tempo di combinarſi colle parti metalliche fiſſe, e di traſformarſi col carattere di cauſticità. Per altro il gaz marino prodotto dalla combinazione di queſt'acido col vitriolico, il quale è sommamente elaſtico, non conferiſce almeno ſenſibilmente la proprietà diſſolvente dell'oro all'acido marino, entro il quale ſi fa feltrare per mezzo de' ſopradeſcritti apparecchi; laonde ſempre meno probabile diventa l'opinione che aſcrive la diſſolubilità alla ſola sflogiſticazione.

cagione eſcluſiva, non avrei dovuto ottenere che pochiſſima quantità d'alcali volatile concreto dalle teſtè riferite ſcompoſizioni del ſale ammoniaco coll' olio di tartaro, col liſcivio cauſtico, e col liquore ſiliceo; mentre il rapporto dell' umidità, che ſi trovava in queſti proceſſi, colle parti concrete era di gran lunga ſuperiore all' acqua, che ſoglio impiegare nella combinazione di queſto ſale colla calce viva; onde parmi attribuibile in gran parte alla differenza dell' azione del principio cauſtico contenuto nella calce da quella, che ha luogo nell' alcali fiſſo ſul flogiſto diſſeminato nel ſale; di modo che la calce viva alterando con maggior energia queſto principio, e ritenendone una più notabile quantità l' avanzo che paſſa aſſociato coi vapori dell' acido, ripiglia lo ſtato, e il carattere di materia infiammabile, cioè ſi carica di nuovo delle parti acquoſe ſtate eſpulſe, e col mezzo delle acide paſſando ad uno ſtato ſaponaceo, reſta agevolata la loro diſſoluzione nell' acqua.

77. Queſta teoria concilia ottimamente l' effetto, che ſi ottiene dalle ſoſtanze metalliche, o dalle loro calci combinate collo ſteſſo ſale ammoniaco, ſenza che s' incontri la ripugnante contraddizione, che preſenta quella del Sig. *Black*, nella quale ſi vedrebbe la privazione, e l' abbondanza d' uno ſteſſo principio (cioè del gaz mefitico) produrre un medeſimo effetto; poichè le parti metalliche, e ſpecialmente le calci nell' impadronirſi d'una grandiſſima parte della materia infiammabile contenuta nel ſale ammoniaco favoriſcono le eſpulſioni dell'acqua di criſtallizzazione del ſale medeſimo, non avendo alcuna diſpoſizione a ſeco combinarſi; e mentre proccurano la diſſoluzione dell'alcali volatile ſi fa altresì l'unione delle parti acide ſommamente concentrate colle parti metalliche; di fatto ſi ottiene il piombo corneo, ſe ſiaſi impiegata la calce di piombo; un zafferano marziale, ſe ſia ſtata uſata la limatura di ferro, della quale ſi volatilizza però una parte; e ſi oſſerva che la ſcom-

poſizione rieſce ſempre molto imperfetta colle ſoſtanze ſotto forma metallica, e per contrario molto più compiuta colle calci; e che per ultimo lo ſpirito volatile cauſtico che ſi raccoglie è ſommamente penetrante, ed effervеſcente ad un tempo con quello che ſi ottiene colla calce viva nel modo da me diviſato.

78. Non debbo abbandonare queſto ſoggetto ſenza riferire ciò, che ho oſſervato intorno ad un metodo, che trovaſi deſcritto alla p. 282. del tom. 1.° delle Lezioni di Chimica del Sig. *Fourcroy* ſotto l' autorità del dotto Accademico Sig. *Bucquet*. Con la ſcorta di numeroſe ſperienze s' era egli aſſicurato, che la miglior proporzione da ſeguire per il proceſſo dello ſpirito volatile cauſtico era quella di una parte e mezza di calce contro una di ſale ammoniaco; ſoggiugnendo, che la calce eſtinta all' aria ſcompone queſto ſale non altrimenti che la calce viva *(dd)*: aſſerzioni affatto contrarie al ſentimento unanime de' Fiſici, e ſegnatamente contraddittorie alle ſperienze ingegnoſiſſime del Sig. *Duhamel*, e ſe m' è permeſſo farne menzione, anche alle mie ſtampate nel tom. 2.° degli Atti dell' Accademia di Torino. Tuttavia non dovendoſi rigettare fatti poſitivi ſenza ſicuro fondamento, ho creduto di doverne fare ſperimento.

79. Ho pertanto meſchiato accuratamente 18. onc. di calce ben viva e groſſamente peſta con 12. onc. di ſale ammoniaco peſtato minutamente, e fu queſta miſtura introdotta con preſtezza nella ſtorta *A* di vetro (*fig. I. II. tav. I. II.*), il cui orifizio introdotto nel tubo di comunicazione *CC* è ſtato diligentemente lutato. Pochiſſime furono le bolle, che attraverſarono l' acqua del

---

(*dd*) Il Sig. *Bucquet* ſi è inoltre aſſicurato con molte eſperienze, che non vi vuole ordinariamente, che una parte e mezza di calce, invece di tre che ſolevano impiegarſi, per iſcomporre una parte di ſal ammoniaco. La calce eſtinta all' aria ſcompone queſto ſale ugualmente che la calce viva.

recipiente, che comunicava col pallone *X*, ed erano lontane le une dalle altre. Non vedendo comparire addenſamento di vapori fu meſſo il fuoco ſotto il bagno di ſabbia, il quale eſſendo aſſai riſcaldato diede luogo alla diſtillazione deboliſſima di qualche goccia di liquore, che di tanto in tanto ſi vedeva cadere dall'orifizio del tubo *CC* nel pallone *X*. Quando ad un tratto, creſciuta l' intenſità del calore, ho veduto ſuccederſi ſempre più proſſimamente le gocce di liquore; e ſiccome era il pallone tubulato inferiormente per comunicare con una boccia di vetro *E*, nella quale precipitava queſto liquore, cominciò a formarſi al margine del tubulamento una concrezione ſaliforme, la quale andò creſcendo perpendicolarmente in groſſezza di circa 2. linee di diametro in forma di ſtalattite, e ſi vedeva il fondo del recipiente pieno di minuti pezzi di queſta ſoſtanza concreta.

80. Fu l' operazione molto più lunga delle conoſciute ſinora, e non ebbi gran difficoltà a riconoſcere, che eraſi fuſa la ſtorta, come aveva ſoſpettato dall' oſſervata accelerazione dello ſviluppamento de' vapori; indotto a formare queſto ſoſpetto dall' eſſermi accaduto altra volta di ottenere del ſale ammoniaco fluido invece di fiori, diſtillando queſto ſale entro a cucurbite di creta guernite di capitello di vetro, o anche in cucurbite di vetro, nelle quali eraſi fatta qualche accidentale feſſura nel tempo dell' operazione; eſſendomi occorſo altresì di veder fuſe le ſtorte prima dell' intiera operazione, allorchè per moltiplicare la ſuperficie della materia, ed impedirne l' eccesſivo addenſamento ho meſcolato dell' arena colla calce, ed il ſale ammoniaco. Laonde ceſſa ogni ſingolarità ne' fenomeni di queſto proceſſo, da che ſi riſcontra ſtabilita la comunicazione tra la calce, il ſale, l' arena del bagno, e conſeguentemente coll' aria eſterna.

81. Il ſeguente ſperimento ſomminiſtra finalmente una prova convincente dell' eſcluſione del principio generalmente

mente adottato per iſpiegare i fenomeni di queſta ſcompoſizione; quantunque ella ſia aſſai uniforme a quella del Sig. *Bucquet*, credo tuttavia di dover dare la preferenza a ciò, che fu da me fatto, perchè forma in 1.° luogo un anello nella catena delle mie prove, ed in 2.° luogo perchè ho uſata ogni più ſcrupoloſa diligenza per eſcludere l' influenza dell' acqua nell' apparecchio, acciò che non rimaneſſe equivoca l' azione che riſulterebbe del gaz ſopra la calce viva. Ho dunque meſſo della calce viva polverizzata ſopra un ſetaccio, e l' ho ſoſpeſo in mezzo ad una gran campana di criſtallo agglutinata con cera molle ad un piattellino, che ſi adattava per mezzo d' un tubo a chiave alla macchina pneumatica, ond' eſtraervi l' aria, e quindi riempierla d' aria fiſſa prodotta dalla combinazione del ſale di tartaro coll' acido vitriolico, e feltrata entro ad un tubo pieno di ſale di tartaro ben ſecco prima di paſſare nelle veſciche, in cui veniva raccolta pel fine ſuddetto.

82. Un tubo ricurvo con entro argento vivo ſerviva d' indice a queſto apparecchio, ed ogni volta che ſcorgevaſi diminuita l' elaſticità del gaz mefitico, ſe ne ſomminiſtrava una nuova quantità. Benchè non poſſa eſattamente dire quanto tempo ſia rimaſta eſpoſta queſta calce all' atmosfera gazoſa, poſſo però aſſicurare, che vi fu dimenticata lungo tempo al di là di quello che ne ritenne in circoſtanze ſomiglianti il Sig. *Bucquet*. Non ho però trovato gran variazione di peſo nella medeſima; ma la ſuperficie mi parve meno arida, ed il gaz avea fatta una notabile impreſſione ſul piattellino a ſegno che ſtimerei prudente, dovendo ripetere sì fatte ſperienze, di riveſtire il medeſimo di qualche inverniciatura, quale è quella che ſi uſa dagl' Inciſori in rame.

83. Queſta calce combinata con un terzo del ſuo peſo di ſale ammoniaco, e di acqua in quantità ſufficiente ſomminiſtrò gli ſteſſi prodotti, che ho ottenuto da

altrettanta calce peſta della ſteſſa qualità, che aveva cuſtodito in un recipiente chiuſo, perchè non aveſſe comunicazione coll' aria; erano perciò ineffervescenti i liquori, e non mi fu poſſibile di riconoſcere il più piccolo ſegnale, che queſta calce aveſſe operata la ſcompoſizione del ſale ammoniaco in qualche maniera analoga a quella delle terre calcaree. Il Sig. *Bucquet* ha altresì oſſervato queſta perfetta uniformità, non altrimenti che colla croſta ſaliforme dell' acqua di calce, e colla calce eſtinta da circa ſei anni, e finalmente colla calce lavata: di modo che ſembrami fuori d' ogni ſoſpetto la prova, che ne deduco, della niuna influenza del gaz meſitico in queſte ſcompoſizioni.

84. I riſultati della coobazione dello ſpirito volatile cauſtico ſopra la calce viva riferiti al §. 21., ed avvalorati da quelli dello ſteſſo liquore ſulla pietra cauſtica, ſopra il vetro ſiliceo, ſembrerebbero dimoſtrare, che le effervescenze non altrimenti che le alterazioni recate dalla calce al ſale ammoniaco, delle quali s' è fatta menzione al §. 34., foſſero dovute al ſolo impoverimento del principio acquoſo di queſte ſoſtanze; ma eſſendomi aſſicurato, che dall' aggiunta che ſi fa dell' acqua diſtillata a queſte materie non riſulta il menomo movimento, il quale poſſa veramente indicare un principio di vera effervescenza, parmi di eſſere ſempre più fondato nel conchiudere, che non debbono attribuirſi al ſolo difetto di queſto principio i mentovati fenomeni, ma che dipendono veramente dall' azione, e reazione de' principj conſtituenti le ſoſtanze, le quali ſcompoſte reciprocamente ſomminiſtrano nuovi prodotti; e quanto maggiore ſarà la forza originale di contatto tra i principj, che compongono ciaſcheduna ſoſtanza, tanto più coſpicui riſulteranno gli effetti nello sforzo energico, che mutuamente ſi farà per una diſtribuzione equilibrata entro la maſſa totale; dove che ſminuita notabilmente l' aderenza de' principj più volatili, ſe ne fa-

rà una diſſipazione proporzionata all'antagoniſmo delle forze ſuddette. Le diviſate ſoſtanze cauſtiche ancorchè peſtate non producono finalmente il menomo moto di effervescenza collo ſpirito di vino nè coll' olio di tartaro. Siccome però il principio acquoſo è il veicolo, che favoriſce la diſtribuzione, e l'equilibrio tra i principj conſtituenti; così più evidente appariſce non ſolo la neceſſità della reſtituzione del medeſimo; ma dalla eſpulſione ſi può eziandio fondatamente ripetere l'origine de' ſin qui riferiti effetti.

85. Ravvicinando pertanto le già fatte oſſervazioni, ſembrami di avere tutto il fondamento di conchiudere, che il gaz ammoniacale non è altro che un inzeppamento dell' aria comune eſpulſa dalle parti acide flogiſtiche alcali volatili, e di qualche piccola porzione della terra calcarea più tenue, diſſeminate tra le parti acquoſe ridotte in vapori dal calore; ciò che ſempre più convince dell' inſuſſiſtenza della teoria dipendente dalla privazione d' un principio pneumatico per dedurre l' ineffervescenza delle materie cauſtiche cogli acidi, e della coſtante fluidità, e cauſticità dello ſpirito volatile cauſtico.

86. Non ſarà forſe eſtraneo al mio oggetto di notare alcune differenze importanti, che ſi trovano tra l' alcali volatile concreto, e l' alcali volatile cauſtico, o per meglio dire ſpirito volatile prodotto dalla calce: nè ſarà inutile l' oſſervare prima d' ogni coſa, che l'alcali fiſſo e la creta non eſſendo materie così ſemplici e ridotte ad uno ſtato di eſtrema aridità, quanto lo è la calce, da queſto difetto appunto totale di principj di diverſa natura ſi dee ripetere la perfetta inazione di queſta ſopra le ſoſtanze compoſte, quando non ſia prima caricata d' altro principio ſemplice, fra' quali domina ſempre l' acquoſo. In queſte circoſtanze diventa poi l' azione ſua d' una energia ſuperiore a quella d'altre ſoſtanze meno ſemplici; e quanto ſi dimoſtra iner-

te, ed incapace alla ſcompoſizione del ſale ammoniaco, allor quando è nello ſtato di maſſima parità, altrettanto efficacemente diſcioglie e ſcompone queſto ſale, ogni volta che carico di principio acquoſo dà anſa alla calce, ond' eſercitare la ſua cauſticità ſopra la materia infiammabile nel medeſimo contenuta; e da queſta originale operazione ſuccedendo il rapido indebolimento della forza di contatto tra l' acido, e l' alcali volatile, ſi riduce in gran parte l' acido ſimultaneamente ſotto forma gazoſa per la ſua combinazione eſtemporanea colle parti flogiſtiche, alle quali imprime un carattere ſaponaceo, ed eſtricandoſi in vapori coll' alcali volatile ſi ſcioglie entro una parte notabile dell' acqua impiegata, e la invola e rapiſce con sè.

87. Laonde non è ſtrano, che ſia in queſta ſcompoſizione neceſſaria l' acqua, ſenza che ſe ne richieda per quella che ſi fa coll' alcali fiſſo, e colla creta; e parmi altresì di poter dedurre in 1.° luogo, che la reciprocità dell' azione di varie ſoſtanze ſarà in ragione della moltitudine de' principj conſtituenti, di natura tra di loro differente; e però in 2.° luogo quanto più s' accoſteranno allo ſtato di perfetta omogeneità, altrettanto maggiore ſarà la difficoltà che ſi avrà a ſuperare per alterarle, e verrà riſtretta a principj, e parimenti ſemplici, la facoltà di agire ſopra le medeſime; e potrà perciò in 3.° luogo riguardarſi queſta reſiſtenza alla ſcompoſizione come una miſura del grado di ſemplicità di ciaſcuna ſoſtanza, e ſervirà a rilevare la forza di contatto tra le ſue parti conſtituenti.

88. L' alcali volatile concreto acquiſta un accreſcimento di peſo maggiore di quello che fa lo ſpirito volatile, ed è altrettanto diſpoſto, anzi debbo dire aſſai più, a caricarſi del ſuo intermezzo, di quello che ſia lo ſpirito volatile; di fatto ripetendo la coobazione d' una data quantità d' alcali volatile ſopra nuovo alcali

ſiſſo, creſce di peſo il prodotto (*ee*); ed al contrario va ſempre ſcemando quello dello ſpirito volatile ſopra nuova calce ben viva.

89. Non è così penetrante nè cauſtico l' alcali volatile concreto, come lo è lo ſpirito volatile tratto dalla calce, e continua ad eſſere effervescente cogli acidi quantunque ſciolto nell' acqua; e per contrario molto più ſtimolante è lo ſpirito volatile, e diventa ineffervescente quando ſi trova diffuſo in conveniente quantità d' acqua.

90. L' alcali volatile concreto non è infiammabile quantunque ridotto in vapori anche coll' azione del fuoco, ed infiammabile ſi riſcontra lo ſpirito volatile cauſtico, come già è ſtato riferito dal celebre Sig. *Cigna* mio Amico, e Collega nell' eccellente ſuo Opuſcolo: *de cauſa extinctionis flammæ, & animalium in aere intercluſorum*, ſtampato nel 2.° vol. degli *Atti dell' Accademia di Torino* per gli anni 1760. 1761. p. 194. §. 40. ſuccedendo però in queſto una ſingolare anomalia, mentre dipende l' infiammabilità da un certo rapporto tra i principj dello ſpirito volatile, e la quantità dell' acqua, nella quale ſi trovano diſtribuiti; avendo più volte oſſervato, che lo ſpirito volatile ſommamente concentrato non è ſuſcettibile d' infiammazione, almeno in quelle ſteſſe capacità chiuſe, nelle quali diventa infiammabile, diluendolo ſolamente con una data quantità di

---

(*ee*) Ho ripetuta quattro volte queſta coobazione, e ſempre l' alcali volatile ricavato ſi è accreſciuto di peſo: ſe aveſſi avuto ozio avrei proccurato di aſſicurarmi del limite, cui può eſtenderſi queſt' aumento; ma intanto mi ſia permeſſo di oſſervare che ſuccede lo ſteſſo come del ſublimato corroſivo col mercurio, il quale va caricandoſi di queſta ſoſtanza metallica, com' è a tutti noto; e però ſembra dovuto alla preſenza dell' acido marino contenuto in queſte materie il ſucceſſivo rapimento di queſte ſoſtanze.

acqua diſtillata (*ff*). Egli è però altresì vero che lo ſteſſo ſpirito volatile riconoſciuto infiammabile entro grandi capacità o non s' infiamma, o a ſtento può infiammarſi entro capacità meno alte e meno ſpazioſe; non dovendo neppure ommettere di riferire che in una campana, nella quale i vapori d' uno ſpirito volatile cauſtico concentrato non poſſono eſſere infiammati dall' introduzione d' un cerino acceſo pel buco praticato nel piattellino, ſul quale ella s' appoggia, ſe ſi apre la comunicazione ſuperiore della medeſima, e vi ſi preſenti un altro cerino parimenti acceſo, s' infiamma la corrente de' vapori; e finalmente ſuccede non di rado, che i rimanenti nella campana ſteſſa prendano fuoco dalla fiamma inferiore. Dal che parmi poterſi raccogliere, che il troppo ravvicinamento delle parti infiammabili ſia nocevole alla ſteſſa infiammabilità, e perciò dipenda la proprietà dell' infiammazione piuttoſto dalla maniera d' eſſere, che dalla quantità della materia infiammabile, come già ho oſſervato. Siccome però in queſte circoſtanze ſpegneſi la fiamma del cerino nell' atto della ſua introduzione, anche dopo alcuni momenti della libera comunicazione de' vapori alcali volatili coll' aria comune, ſembra dimoſtrare queſto effetto, che l' eccesſiva condenſazione del flogiſto riduca queſti vapori allo ſtato mofetico.

91. Queſta oſſervazione accoſtata a quelle che ſono riportate dal Sig. *Prieſtley* nella copioſa ſua raccolta di ſperimenti ſulle diverſe ſpecie d' aria, e ſegnatamente nella terza Sezione della prima Parte, e nella quinta della ſeconda Parte del primo Volume, eccita un ſon-

---

(*ff*) Coſtante oſſervazione (della quale mi verrà forſe in acconcio di far uſo in progreſſo) ſi è, che tra il grado d' infiammabilità e quelli delle oppoſte metificità, ſingolarmente in quella parte, ove ha luogo una ſomma concentrazione, la fiamma riceve uno ſtraordinario allungamento, e s' ingroſſa notabilmente nell' altra.

dato ſoſpetto, che il gaz infiammabile poſſa riſolverſi unicamente in gaz mefitico tanto per un eceſſo di concentrazione delle parti flogiſtiche, quanto per una ſoverchia loro aſſociazione col principio acquoſo; onde ſembrerebbe poſſibile che un gaz mefitico per difetto d' umidità poteſſe paſſare all' infiammabilità, e quindi di nuovo al mefitiſmo mediante una proccurata combinazione di parti acquoſe, e viceverſa.

92. Dall' aſſeveranza poi di queſto inſtancabile Scrittore, che il gaz infiammabile prima di paſſare allo ſtato mefitico ſi riduca al caſo di ſervire alla conſervazione della fiamma, ſembra naturale il dedurre la confermazione di quanto ho eſpoſto intorno alla natura di queſti fluidi aeriformi; di modo che il rapporto di quantità che trovaſi tra' principj volatili, de' quali s' imbevono le parti dell' aria contemporaneamente eſpulſe, coſtituiſce le varietà d' una medeſima ſpecie; e l' eſcluſione o la ſoſtituzione di alcuni principj di diverſa natura ed indole coſtituiſce la differenza ne' generi di queſti fluidi aeriformi; così dall' aſſociazione del flogiſto ſtrappato alle materie infiammabili ſi raccoglie un gaz infiammabile, perchè appunto nelle ſoſtanze metalliche ſono le parti infiammabili in uno ſtato di maſſima concentrazione, e di vero flogiſto, il quale, come ho oſſervato, è alterabile da due cauſe affatto oppoſte; e forſe per ragione appunto della eceſſiva concentrazione e volatilità, e della poca aderenza non ſi può ottenere infiammabile il gaz prodotto dall' acido nitroſo; mefitico per contrario ſi ottiene il gaz dalle terre, e dalle ſoſtanze ſaline, probabilmente in virtù della ſeconda circoſtanza rilevata, cioè perchè la materia infiammabile involta ne' ſali e nelle terre trovaſi ſempre più carica di principj acquoſi, e non mai in iſtato di flogiſto; laonde nel caſo de' metalli i vapori acquoſi che s' inalzano dalla ſcompoſizione degli acidi proccurano l' infiammabilità alle parti del flogiſto, che in queſto ſtato non ſarebbero capaci d' infiammazio-

ne; e nel caſo delle ſoſtanze ſaline, o terree i vapori che ſi elevano ſono in una proporzione troppo grande, perchè poſſa aver luogo queſta proprietà nelle parti infiammabili già ſaziate di principio acquoſo.

93. Nè è fuori di probabilità il conghietturare, che in queſti gaz non ſegua ſcompoſizione degli acidi, o non ſia almeno così intima, come avviene colle ſoſtanze metalliche, e ad ogni modo affatto contrarj ſono gli effetti di queſte combinazioni. Di fatto ſe nel tempo che ſi fa del gaz infiammabile coll' acido vitriolico ſul ferro, ſi proccuri l' aſſociamento d' un alcali fiſſo, come dell' olio di tartaro, non ſolo ceſſa la produzione del gaz infiammabile, ma ſi fa un repentino, e coſpicuo aſſorbimento, e molto più ſenſibilmente ſi manifeſta la parte che ha il principio acquoſo in queſte produzioni gazoſe; laonde il difetto e l' eceſſo del principio acquoſo toglieranno l' infiammabilità, e ſarà affatto oppoſto il mezzo da tentarſi, onde rendere infiammabili i gaz mefitici, dovendo proccurarſi la concentrazione di quelli che abbondano di principio acquoſo, e per contrario diluirſi quelli ne' quali vi è ecceſſo di concentrazione delle parti infiammabili. Uno de' ſegni caratteriſtici di queſti è l' inſtantanea, e totale eſtinzione della fiamma al ſolo accoſtarla al gaz; mentre è meno pronta, e men compiuta ne' gaz mefitici vaporoſi.

94. Quantunque ſia vero, che ſeguono alterazioni negli acidi dietro alla loro combinazione con altre materie, ſulle quali eſercitano le loro proprietà, non potrei però concedere che generalmente ne riſultaſſe un acido aſſolutamente identico; ancorchè ſu le prime anch' io aveſſi formato lo ſteſſo concetto. Il ſentimento del celebre Sig. *Bergman*, e l' ingegnoſo lavoro del dottiſſimo Sig. Cav. *Landriani* ſono per verità di troppo gran peſo, perchè poſſa diſſimularmi il merito de' loro ingegnoſi argomenti; ma appunto perchè l' apparenza e certi caratteri generali ſembrano ſavorire queſta opinione, ho

ho creduto di doverne fare l'oggetto d'una ſcrupoloſa ricerca, e mi è riſultato che ciaſcuno di queſti fluidi non ſolo conſerva veſtigj deciſivi, e caratteriſtici dell' acido, che ha ſervito al loro ſviluppamento, ma dimoſtrano alterazioni diverſe e dipendenti dalle ſoſtanze paſſive che vi hanno dato luogo.

95. Troppo vaſta ſarebbe la materia, e troppo forſe mi ſono già fatto lecito di dilungarmi, sì che non mi ſtenderò più oltre per ora ſu queſto punto, baſtandomi d'indicare il mezzo, che mi è riuſcito più acconciamente per queſte eſplorazioni, il quale conſiſte nell'acidulare quanto più ſi può dell'acqua diſtillata colla filtrazione de' gaz, e quindi valerſene ſpezialmente ſopra de' ſali metallici *(gg)*.

96. Mi reſta per ultimo da oſſervare che molte ineſattezze, nelle quali poſſono aver inciampato alcuni Fiſici, dipendono dalla inſufficienza de' mezzi creduti coercenti, e che generalmente s'impiegano per ritenere queſti fluidi elaſtici: avviſo da me dato, riguardo all'acqua ſpecialmente, per determinare l'aſſorbimento ſino dall' anno 1759. ſulle premure fattemene dal medeſimo celebre Sig. *Hales*, e che trovaſi nel 2.° vol. degli Atti dell' Accademia di Torino per gli anni 1760. e 1761. alla p. 133, e ſeguenti, e che ho creduto di dover confidenzialmente rinnovare a qualche valente Fiſico, col quale ebbi a trattare di queſti fluidi; ragion dunque vuole che ſi cominci dall'oſſervare, che non può farſi operazione alcuna in vaſi chiuſi ſenza che ſegua una dilatazione più o meno riguardevole dell'aria contenuta nelle capacità, e conſeguentemente un traſporto del-

---

(gg) Tra' ſali metallici credo di dover annoverare le calci metalliche fatte cogli acidi, e queſte principalmente ſono atte a dimoſtrare le accennate differenze.

la medeſima nelle parti più diſtanti dalla cauſa di queſte rarefazioni, di modo che non proccurandoſi una circolazione d' aria per reſtituire liberamente la quantità che ne' è eſpulſa, e che non può retrocedere per cauſa de' mezzi coercenti, che ſi ſono impiegati, non può a meno di ſuccedere che rieſca minore la quantità d'aria di quello che era nelle capacità principali, nelle quali ſi fanno le operazioni: ora l'aria eſpulſa può giugnere ſino ad un certo grado di condenſazione, e farſi luogo per mezzo della compreſſione dell'acqua; ma ogni qualvolta ſegua queſta compoſizione di forze, cioè del peſo dell'aria con quello d'una quantità d' acqua, per iſtabilire l'equilibrio tra l'aria eſterna, e l'atmosfera contenuta dalle capacità, ſempre ſuccede un'eſpulſione progreſſiva dell'aria o del fluido elaſtico alla ſuperficie dell' acqua che ſupera il livello in ragione della ſuperficie medeſima, e probabilmente del maggiore inalzamento dell'acqua, ſintanto che ripigli la medeſima il ſuo livello; così anderà ſcarcerandoſi l' aria contenuta nell' acqua entro la campana, mentre dalla ſuperficie eſterna ne ſucchierà dall'atmosfera ſe l'acqua entro la campana ſi trovi inalzata ſopra il livello; e per contrario ſi ſvilupperà dalla ſuperficie eſterna per paſſare nell'atmosferà libera, allorchè per la condenſazione del fluido contenuto ſarà nella campana l' acqua ſotto il livello, e anderà aſſorbendo queſt' acqua altrettanto fluido, quanta è la diſſipazione che ſi fa dall'eſterna ſuperficie.

97. Non ho ſin qui conſiderato che la rarefazione dell' aria in una parte dell'apparecchio, ed il ſuo addenſamento nell' altra; ma ſe ſi rifletta alla complicazione di cauſe che debbono rendere difettoſi queſti apparecchj, ſi vedrà colla maggior evidenza l'impoſſibilità di rimediarvi per la moltitudine delle incognite, ond' è intrecciato il problema; ed un abbozzo alla sfuggita baſterà, come ſpero, a convincere di queſta verità. Riſulta egli dall' eſame de' medeſimi, e dalle operazioni

che vi ſi fanno per lo ſviluppamento de' diverſi gaz, i quali ſono ſempre prodotti o dalle effervefcenze ſenza ſuſſidio di fuoco, o dalle ſcompoſizioni riſultanti dall' azione del medeſimo, o finalmente dal concorſo di entrambi queſti mezzi. Oltre il di già oſſervato sbilanciamento di equilibrio nelle parti dell' aria contenuta nelle capacità, dee per neceſſità riſultare dalle accennate operazioni uno ſviluppamento o di eſalazioni in iſtato di ſiccità, o di vapori più o meno pregni d'umido. Se ſaranno in uno ſtato di perfetta privazione di principio acquoſo, è naturale che involeranno l'umidità, che accompagna la parte dell' aria contenuta nelle ſteſſe capacità, ed a quel punto l'aria ſteſſa ſpogliata dell' umidità ſua eſſenziale per eſſere reſpirabile, dee di neceſſità ſoffrire alterazioni più o meno eſſenziali nelle ſue proprietà; e perciò ſi può fondatamente far quiſtione, ſe non ſieno alterate le leggi ordinarie e cognite, e per lo meno, ſe non ſia notabilmente variata la ſua elaſticità; e ſe continui ad eſſere atta alla conſervazione della fiamma.

98. Se al contrario ſono le eſalazioni accompagnate da vapori umidi, quale ſarà la quantità di cui potranno caricarſi le parti dell' aria in queſto ſtato di dilatazione? quali modificazioni riceveranno da queſto accoppiamento tanto nell' eſſenza loro, quanto nelle loro proprietà? Saranno le une e le altre della ſteſſa natura ed indole, tanto le umide quanto le aride? In ſomma chi potrà luſingarſi di giugnere a determinare individuatamente il rapporto, che vi può eſſere tra la forza di tanti principj differenti più ſoſpettati che noti, onde fiſſare con qualche eſattezza il grado di forza del riſpettivo loro contatto?

99. Se poi ſi rifletta alle differenze, ed alle indiſpenſabili alterazioni, che debbono eſſere prodotte dal ſolo combaciamento di queſti fluidi colla ſuperficie dell' acqua, o dalla feltrazione loro più o meno coſpicua en-

tro la medeſima, diffondendoviſi per mezzo d' una più o meno violenta agitazione, neſſuno potrà diſſimularſi le molte dubbietà, in cui dovrà involgerſi, non potendo aſſicurarſi nè della qualità, nè della quantità de' principj che ſaranno ſtati ritenuti per mezzo della diſſoluzione, o di nuove combinazioni; e niente meno ſoſpette potranno riuſcire le induzioni, che ſi ſarebbero coll' uſo dell' argento vivo medeſimo, poichè in molte circoſtanze può dimoſtrarſi inſufficiente al propoſto oggetto di ſervire di mezzo veramente coercitivo, venendo viſibilmente alterato non ſolo nella ſuperficie comunicante colle capacità, ma eziandio lungo le colonne rinchiuſe ne' tubi barometrici; ed in alcune altre eſſendo evidente l' alterazione prodotta eſcluſivamente ſulla parte comunicante coll' atmosfera.

100. La natura di queſte diſcuſſioni richiederebbe una ſerie di rigoroſi ſperimenti per ricevere quel grado di evidenza, che merita l' importanza del ſoggetto, e che volentieri avrei preſentato come un giuſto tributo alla nuova *Società Italiana*, ſe un giuſto ſentimento di riverente ſtima per tanti riſpettabili Accademici non mi tratteneſſe dall' eccedere i confini di un Opuſcolo, come già ho detto, forſe anche troppo diffuſo.

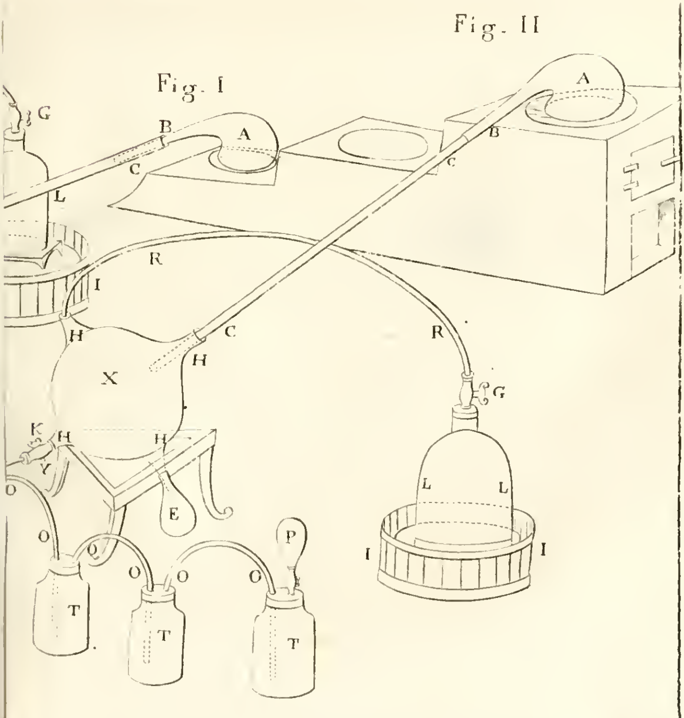


Fig. II
A
B
c
Fig. I
G
B
A
C
L
R
I
H
C
X
H
R
G
K
H
H
Y
O
E
L
L
O
Q
P
I
I
O
O
O
T
T
T

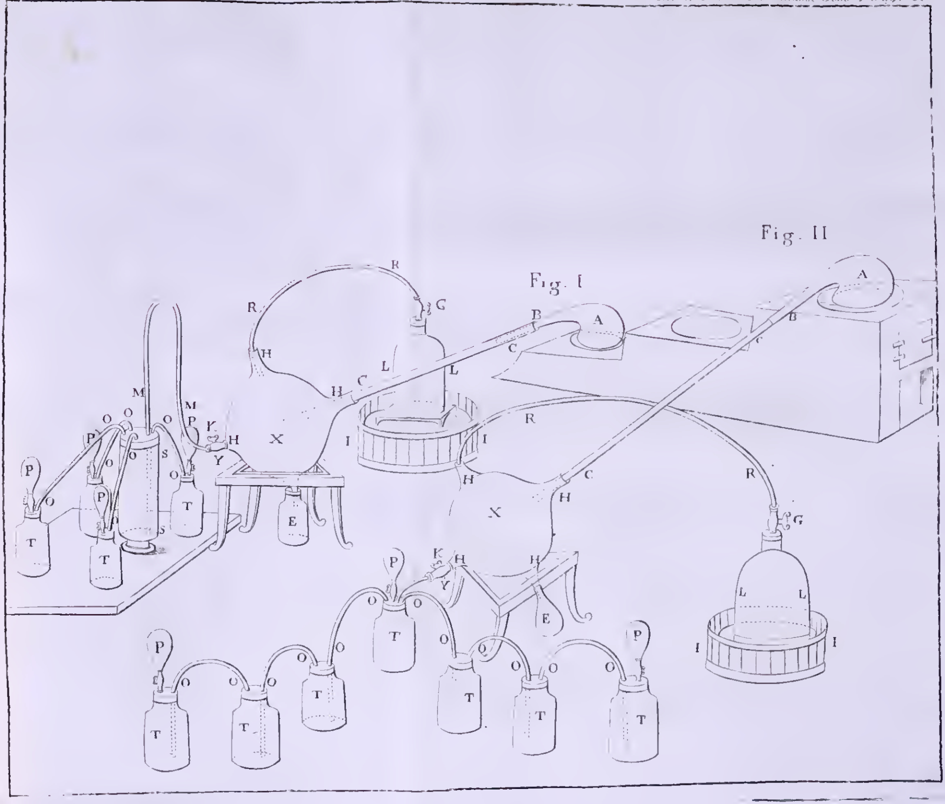


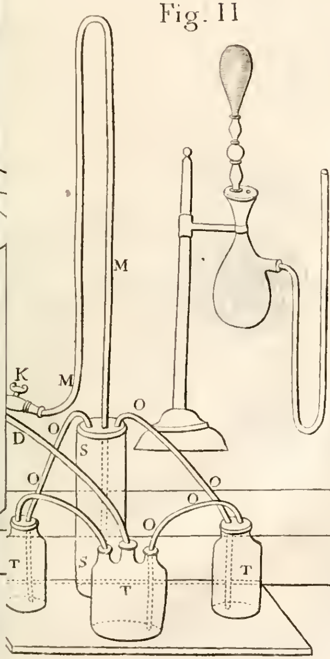
Fig. I

Fig. II

A
B
C
G
R
R
H
H
L
L
I
X
K
Y
E
M
M
O
P
S
T
I
I

Mem. della Società Italiana Tomo I Pag. 580

Fig. II


M
K
M
O
O
D
S
O
O
O
O
T
S
T
T

T I

E

nache

Regio
ſità di

he.

iranda
rà gio-
rigene-
la vec-
prima
izione
e ter-
lo che
a uno

Tavo-
e per
eſimo

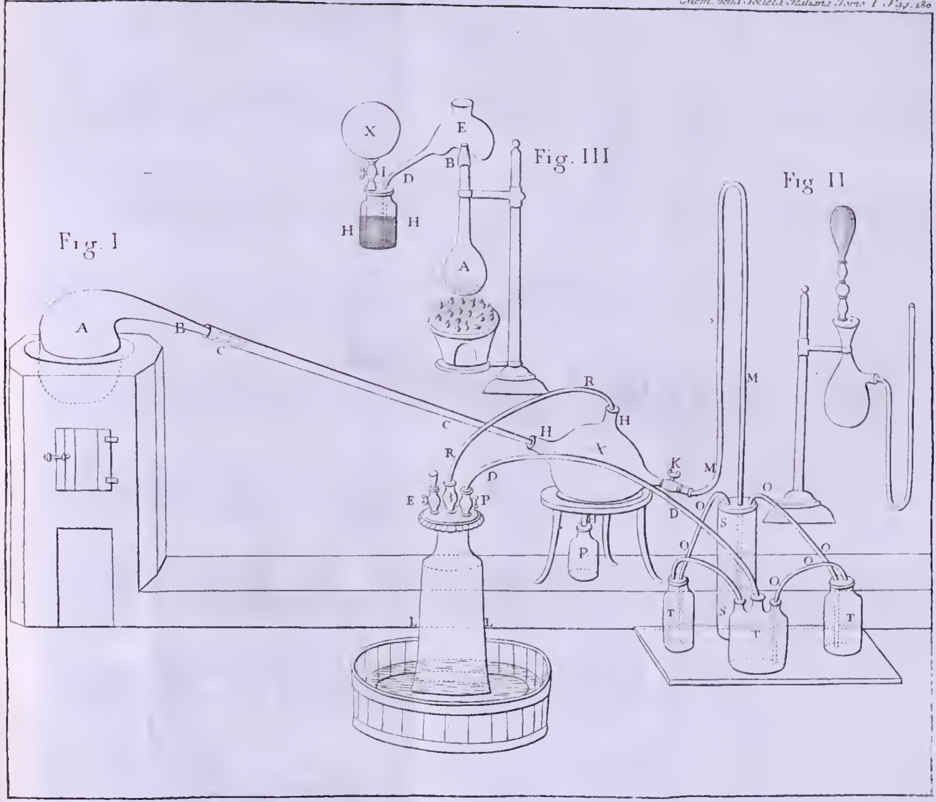


Fig. I
Fig. II
Fig. III
X
E
B
I
D
H
H
A
A
B
C
C
R
R
H
H
X
K
M
M
D
D
E
P
P
O
O
O
O
O
O
S
S
T
T
T
L
L

RISULTATI

DI ESPERIENZE

Sopra la Riproduzione della Teſta nelle Lumache terreſtri (*a*)

Del Sig. Ab. Lazaro Spallanzani Regio Profeſſore di Storia naturale nell' Univerſità di Pavia.

Articolo I.

Deſcrizione anatomica della teſta delle Lumache.

A Perſuadere più facilmente di queſta ammiranda riproduzione il dotto e curioſo Lettore ſarà giovevoliſſimo il far vedere che la novella teſta rigenerata non differiſce punto ne' ſuoi componenti dalla vecchia reciſa. Ma ciò conſeguir non poſſiamo ſe prima col lume dell' anatomia non venghiamo in cognizione delle parti onde è formata la teſta delle lumache terreſtri, la quale trovaſi aſſai più compoſta di quello che a prima giunta ſi ſarebbe creduto. Ogni qualvolta uno

---

(*a*) La preſente Memoria è tratta dal mio Libro ſopra le *Riproduzioni Animali*, che a queſt' ora ſarebbe già pubblicato, ſe non restaſſero da ultimarſi alcune Tavole di Figure troppo neceſſarie per la piena intelligenza del medeſimo.

di queſti rettili (*b*) è quanto lo può eſſere fuori del guſcio nativo, mette in viſta tutta la lunghezza del collo, e del capo, dal quale ultimo ſpuntano nella parte d' avanti le quattro corna, cioè a dire le due maggiori per di ſopra, e le due minori per di ſotto; le quali quattro corna, allungate pienamente che ſieno, finiſcono in un globettino portante nelle due maggiori un punto nero che comunemente ſi crede eſſer l' occhio. Al di ſotto immediatamente delle due corna minori appariſcono i labbri, che quando ſi aprono, e che mangia l' animale, manifeſtano i piccioli denti. Coteſte parti, compreſo anche il collo, ſono tutte quante ſeminate di picciole glandoloſe granella ſomiglianti in certo modo a quelle d' una fragola, o fatte, come diremmo noi, a *ſagrino*. Solamente queſto ſagrino alle corna, e alle labbra è più fino che ſu la teſta, e ſul collo. Per l' oppoſito la parte inferiore della lumaca non è niente granelloſa, ma affatto liſcia, e sfuggevole, quella cioè che da alcuni Naturaliſti non impropriamente chiamaſi *piede*, per appoggiarſi ad eſſa l' animale quando ſi ſtraſcica. E queſto è ciò che può eſpiare la viſta ſenza il ſoccorſo del coltello anatomico, al quale però ſiamo aſtretti di ricorrere, volendo noi penetrare l' interno della teſta, che è l' oggetto delle noſtre ricerche. Ma noi non poſſiamo notomizzare la lumaca viva. Al ſolo lievemente toccarla, di allungata che era, ſi contrae tutta, ſi ritira precipitoſamente nella ſua caſetta, e vi ſi naſconde. Che ſe rompaſi eſſa caſetta per eſaminarla, il capo, e le corna trovanſi allo-

---

(*b*) Chieggo perdono ai Signori Linneani ſe non mi ſento diſpoſto di annoverar le lumache tra i *Vermi*, ſiccome vuole il loro venerato Maeſtro. Non è di queſto luoil moſtrare quanto ſiffatto penſamento poco ſi accorda con la Natura. Piuttoſto cadrà il deſtro di farlo in un mio ſcritto omai compiuto, nel quale tra l' altre coſe ſi ventilerà ſe alla Storia Naturale ſieno ſtati più ſvantaggioſi che utili i moderni Siſtematici, e Nomenclatori.

ra rannicchiate dentro del corpo in maniera, che rieſce difficiliſſimo l' eſplorarle come conviene. Il mezzo più acconcio a conſeguire l' intento ſi è quello che ſuggerito viene dal grande *Swammerdamio* nell' eccellente ſuo Trattatello ſu le lumache, voglio dire di farle morire lentamente dentro dell' acqua. Allora dunque ſi trovano quaſi ſempre col collo, e col capo fuori interamente del guſcio, e ſpuntano altresì più o meno le corna. Tagliata longitudinalmente per di ſopra in tal vantaggioſa ſituazione con ſottili affilate forficette la pelle del capo, ſi preſenta ſubito all' occhio il cervello della lumaca diviſo in due lobi, i quali nella parte inferiore danno origine alla midolla allungata, e nella ſuperiore a dieci nervi, quattro de' quali s' impiantano dentro alle quattro corna, ed eſtendonſi fino alla loro ſommità, e gli altri ſei vanno a mettere, e a diramarſi in varie parti del capo, come ai muſcoli della pelle, alla bocca, alla gola, al palato.

Lo *Swammerdamio* è ſtato il primo, per quanto io mi ſappia, ad oſſervare che il cervello della lumaca è mobile; e la ſua mobilità naſce in grazia di alcuni muſcoli, cui reſta attaccato, mercè i quali ora ſi accoſta alle parti anteriori della teſta, ora da eſſe allontanaſi, ſecondo i diverſi movimenti del corpo. Quando poi la lumaca è ſporta aſſai bene del nicchio, poggia il cervello ordinariamente ſopra l' eſofago.

Dicea più ſopra che quel punto nero, che trapela alla cima delle corna maggiori, viene comunemente creduto eſſer l' occhio della lumaca; e tal credenza a me ſembra ragionevoliſſima. Di fatto l' inarrivabile ſagacità del più volte nominato Naturaliſta Ollandeſe, ſecondata dal vantaggioſo mezzo di buone lenti, ha ſaputo trovare in queſto punto le parti più principali che lo caratterizzano per l' organo della viſione, cioè a dire l' uvea, i tre umori, e l' aracnoide involgente il criſtallino. A me pure è riuſcito di ſcoprire con ſufficiente chiarezza queſte parti, a riſerva dell' umore acqueo, e del vitreo, che non potetti ſcernere nettamente; quantunque poi la non apparenza di queſti due umori io la riſonda più preſto nella mia poca perizia nel diſcoprire tai minutezze, che nella non eſiſtenza delle medeſime. Dei quattro nervi, che dal cervello vanno a piantarſi dentro alle corna, due, che chiameremo gli *ottici*, ſi attaccano agli occhi, allargandoſi ſotto di eſſi in una ſpecie di bulbo fatto a zucchetta oſſia a pera. Ma queſti quattro nervi ſono accompagnati dai loro muſcoli, dall' azione de' quali a beneplacito dell' animale ſi arroveſciano le corna sì grandi, che picciole, e ſi occultano dentro del corpo: ed in grazia di queſto arroveſciamento e ſucceſſivo occultamento vengono gli occhi a guarentirſi, e a metterſi in ſalvo dalle eſtrinſeche ingiurie.

Levato il cervello, appariſce l' eſofago membranoſo, lavorato a ſottili creſpe longitudinali, di un livido cenerino, e di pareti graciliſſime, il quale ſi va reſtrignendo a proporzione che ſi accoſta alla bocca. Queſt' apertura, con cui la lumaca prende l' alimento, è corredata del ſuo palato nella parte ſuperiore, e di una calloſa maſcella, a cui è tenacemente attacato un dente di ſoſtanza quaſi cornea, di colore caſtagno, ſoggiato a mezza luna, e terminato da più punte taglienti, ed acute, formanti in certa guiſa altrettanti piccioliſſimi denti, quantunque propriamente non ne ſia che uno; e queſto è anzi quel ſolo dente che ha la lumaca. Nel piano inferiore della bocca è ſituata la lingua fornita alla ſua eſtremità di un corpiccino come corneo, e radicata con la baſe in una incavata cartilagine ſemicircolare. E queſte ſono le parti più precipue del capo, preſcindendo da una quantità di muſcoli movitori di eſſe, la deſcrizione de' quali non ſembrandomi neceſſaria, ho creduto, ſenza commettere un peccato d' ommiſſione, di poterla laſciare.

ARTICOLO

Articolo II.

Riproduzione delle Corna o Antenne.

Quando io ſcoperſi il primo che le lumache rigenerano le corna, e la teſta reciſa, più d' un Curioſo mi ricercò da quai motivi o ragioni io era ſtato indotto a penſare che queſte parti poteſſero per ventura riprodurſi, ogni qualvolta venivano eſſe a mancare. E non è difficile che ad alcuno de' miei dotti Lettori venga in mente la medeſima inchieſta, ai quali farò io brevemente quella riſpoſta, che fu da me fatta altra volta. Prima di dar opera alla riproduzione delle lumache eſſendo io occupato in quella de' lombrichi terreſtri, di cui ritrovaſi un Capo nel mio *Prodromo ſopra le Riproduzioni Animali*, più fiate ebbi occaſion di oſſervare quanto alla riproduzione di queſti vermi contribuiſca l' eſſere i medeſimi difeſi dagli urti dell' aria sfogata, e libera, col reſtare appiattati dentro alla morbida terra, oppure al concime. Queſta facile oſſervazione mi richiamò alla memoria lo ſtato delle lumache mutilate in qualche parte del corpo, le quali io aveva veduto rinſerrarſi per molti giorni nella propria portatile caſetta, e chiuderne la porta con quel loro coperchio formato dal viſchioſo ſugo che geme dal corpo, in grazia del qual coperchio difficilmente concedeſi l' ingreſſo all' aria. Rifletei allora che una lumaca mutilata nelle corna o nel capo, e chiuſa col coperchio dentro al ſuo nicchio, ſi trovava in circoſtanze ſimili a quelle d' un lombrico ripoſto dentro alla terra bagnata, o al concime, al quale ſia ſtata tagliata la teſta. A quel modo adunque che un lombrico ripara queſta parte perduta, volli vedere ſe ſuccedeva lo ſteſſo nelle lumache, cominciando le mie ſperienze dalla reciſion delle corna, eſſendo eſſe, come ognun ſa, un' appartenenza del capo.

Affinchè rieſca bene il taglio delle corna, egli è d'uopo che ſieno interamente uſcite del capo, il che ſuccede ogni qualvolta la lumaca è conſiderabilmente fuori del guſcio. Allora tutte quattro eſſendo pienamente ſviluppate, ſi poſſono ſino alle radici comodamente recidere. Tagliatene due, per eſempio le maggiori, la lumaca ritira di preſente dentro al capo le minori, ed anche ſi naſconde in parte nel guſcio, ma d'ordinario poco appreſſo ritorna fuori, facendo ricomparire eſſe corna minori; quindi è che l'une dopo l'altre ſi poſſono bene ſpeſſo recider tutte quattro, ſe così aggrada all'Eſperimentatore. E ciò non oſtante la lumaca così mutilata non laſcia ſovente di ritornare col collo, e con la teſta fuori del guſcio, come facea quando era intatta.

In quel che la forbice tronca le corna, eſce dalle parti troncate una gocciolina, e talvolta ſchizza un zampilletto di liquor traſparente che tira al ceruleo, che non è che quello che albergava ne' corpi glandoloſi delle corna, rotti allora dal tagliente metallo. Facendo oſſervazione alle teſte private allora delle corna, ſi veggono i quattro tronconi all' eſtremità ſuperiore appuntati, e la punta ci accorgiam che deriva dalla corrugazione, e dal riſtringimento della radice delle corna, ſeguíto nel luogo dove ſi è fatto il taglio. Se poſcia rivolgeremo lo ſguardo alle corna ſeparate dal capo, e che tante volte rimangono aderenti al piano delle forbici, ſi oſſervano le ſeguenti coſe. Eſſe corna immediatamente dopo l'eſſere ſtate ſtaccate dalla lumaca, s'ingroſſano, a motivo di farſi conſiderabilmente più corte; la pelle nel ſito, ove è ſeguita la reciſione, o ſi corruga a ſegno che quaſi non appariſce più il piano del taglio, oppure ſi allarga in maniera che ne laſcia uſcir fuora il nervo ottico, e i muſcoli movitori del corno. Se il corno reciſo è dei maggiori, ſeguita a manifeſtare alla ſua ſommità l'occhio nereggiante; qualche volta però queſt'occhio ſi perde, non già perchè ſi abbia a temere che reſtato non ſia nel corno reciſo, ma per eſſerſi internato, e ſepolto nel medeſimo, ſiccome lo fa vedere il coltello anatomico.

Sappiamo che alcune parti di diverſi animali ſeguitano a vivere, e a muoverſi per un dato tempo dopo l'eſſere ſtate ſeparate dal loro tutto. Così fanno le ſcolopendre, e i lombrichi terreſtri, ed acquatici reciſi a brani, ma ſopra tutto le code delle lucertole, e dei ramarri, le quali, malgrado l'eſſer rotte in più pezzi, ſeguono per qualche tempo a muoverſi, a divincolarſi, e a ſaltellare. Ma ci è noto altresì che in un numero immenſo di altri animali ſuccede tutto il contrario, talmente che le loro membra, ſeparate che ſieno dal corpo, perdono quaſi ſubito ogni apparenza di vita, e di moto. Le noſtre lumache partecipano di queſti ultimi viventi. Appena che le corna ſono ſtaccate dal capo; ſi rendono immobili, o tutt'alpiù leggeriſſimamente ſi contorcono per alcuni ſecondi, indi non danno più verun ſegno di vita o di moto, eziandio con punta irritate.

Se le lumache così mutilate ſi viſitino dopo 20. oppur 25. giorni, non è rado il trovare un principio di riproduzion nelle corna. Ma tal riproduzione è aſſai diverſa da quella che ſi oſſerva in altri animali; e queſto ſi è uno di que' molti utiliſſimi caſi che c'inſegnano a diffidare degli argomenti analogici. L' illuſtre *Reaumur* è ſtato il primo a far vedere, che comincia a manifeſtarſi il principio della riproduzione delle gambe nei granchi d'acqua dolce, coll'apparire al centro del troncone un picciol cono, la cui baſe è ſenza paragone più picciola di quella del troncone, e che ſolo in proceder di tempo ſi fa grande al pari di lui. Un ſomigliante fenomeno è ſtato oſſervato dal celebre *Bonnet* ne'lombrichi terreſtri, e ne' ſuoi vermi d'acqua dolce. Le medeſime apparenze ſono ſtate a me pure manifeſtate dai girini delle rane, e dalle ſalamandre acquajuole nel rifabbricare la coda, e le gambe (*a*). I raggi delle ſtelle di mare, ſe o caſualmente o dal morſo di qualche animale, oppure dagli uomini vengano in parte tronchi, e ſeparati dal corpo, mettono eſſi pure ſul mezzo del troncone un tenue cono o linguetta, che non è che il germe ſviluppanteſi della mancante porzione: ed io nel mio Viaggio ſul Mediterraneo nella State del 1781. ho veduto più ſtelle, da' cui raggi reciſi pullularono coteſti coni più o meno creſciuti, in quella ſpecie ſegnatamente detta dal Linneo *aſterias rubens*; alcune delle quali conſervo in queſto grandioſo Muſeo d'Iſtoria Naturale della Regia Univerſità di Pavia. Ma ſu le corna troncate delle lumache la faccenda non va così. Il troncone ſteſſo rotondaſi in un bottoncino di colore alquanto sbiadato. Il bottoncino in ſeguito ſi fa più grande, il colore più carico, e in cima al bottoncino, ſe ſi parli delle corna maggiori, ſalta fuori un punto nero, che non è che l'occhio della lumaca. Intanto la parte riprodotta ſi allunga, e dopo un tempo diſcreto il corno novello pareggia l'altro compagno non mutilato. La riproduzione accade in ſimil guiſa nelle corna minori.

Che ſe invece di levar via le interne corna, ſiccome fin qui è ſtato per me ſuppoſto, ſe ne levi una metà, un terzo, un quarto ecc. ſe ne ottiene per egual modo la riproduzione con l'accompagnamento ſteſſo di circoſtanze di ſopra indicato. E queſto è l'andamento che il più tiene la natura nella riproduzion delle corna. Talvolta però interviene che in vece di ritondarſi il troncone, ſi appunta, e ſi allunga. La punta però in progreſſo di tempo ſi allarga, e ſi conforma in globetto, e il reſtante ſi eſeguiſce poſcia nella maniera teſtè accennata.

La lumaca fa quell'uſo ſteſſo delle corna nuove, che

(*a*) Prodr. cit.

facea delle vecchie, o ſi riguardi lo ſpingerle fuori del capo, e l'allungarle, o il ritirarle dentro di eſſo, e il naſconderle, o il manifeſtare in loro quel ſenſo vividiſſimo e pronto, per cui ad ogni picciol tocco le arroveſcia ſubitamente, e le mette in ſalvo.

Tutti queſti fatti ſembravano aſſicurarmi che il numero dei componenti la porzione tagliata ſi trovaſſe nè più nè meno nella porzione riprodotta. Volli tuttavia accertarmene maggiormente co' più minuti anatomici eſami. Si ſono adunque da me aperte per lo lungo con ſottile ferruzzo tagliente più corna riprodotteſi, ma non ho ſaputo trovare in che il nuovo rigenerato poteſſe differire dal vecchio reciſo. La medeſima pelle fatta eſteriormente a ſagrino, e internamente ripiena di ghiandoline, i medeſimi muſcoli moventi le corna, i medeſimi nervi andanti alle loro eſtremità, e quivi allargantiſi in un bulbo ovale, le medeſime parti in fine onde riſulta l' occhio ſteſſo; talmente che ſarebbe ſtato impoſſibile il diſtinguere le corna nuove dalle vecchie, ſe quelle vedute non ſi foſſero naſcere e creſcere, e ſe dove avevano cominciato a pullulare reſtato non foſſe talvolta ſu la pelle un leggiere affoſſamento, e tal' altra un picciolo ſporto o rilevato, per cui ſi conoſceva il ſito preciſo, dove aveva avuto principio il corno novello.

Ad ottenere queſta riproduzione vi ſi richiede un ſufficiente calore. Il temperato non baſta, ma vi vuol per lo meno il grado decimo terzo nel Termometro del *Reaumur*. Quindi è che nella Lombardia, e in diverſe altre parti dell' Italia ſi devono cominciar le eſperienze a primavera ſpiegata, e quel ch' io dico del calore in riguardo al rifacimento delle corna, lo dico in riguardo a quello della teſta, di cui or ora a ragionare intraprendo. Venendo poi la ſtate, le corna ſi rifanno più prontamente. E ſe mi foſſe chieſto il tempo preſſo a poco neceſſario per queſta completa riproduzione, direi ch' eſſa d' ordinario addimanda quaſi due meſi, poca o molta che ſia la parte delle corna, che dee ripararſi. Dirò in oltre che quantunque tal riparazione frequentemente non manchi, pure evvi ſtata qualche rara volta che non mi è riuſcito di ottenerla, malgrado lo aver conſervate per anni intieri le lumache così mutilate.

ARTICOLO III.

Riproduzione della teſta dimezzata.

Una pelle fatta a ſagrino, due labbra, e due mandibole con un dente lunare attaccato alla ſuperiore, la lingua impiantata in una cartilagine ſemilunare, una porzione di eſofago, il cervello diviſo in due lobi, e pullulante in dieci nervetti, oltre a quattro corna di grandezza diverſa, veduto abbiamo eſſere queſti i componenti precipui della teſta delle lumache. Queſte pratiche notizie però non baſtano per andar ſicuri che le noſtre eſperienze intorno alla decapitazione di queſti rettili ſieno ſtate rettamente inſtituite. Se coteſte parti veniſſero a formare una teſta ſimile a quella dei più degl' inſetti, voglio dire fatta a globo, o conformata in un corpo facilmente diſtinguibile dall' altre parti dell' animale; ſi vedrebbe ſubito dov' ella comincia, e dove finiſce, e conſeguentemente ſapremmo ſenza equivoco dove preciſamente la forbice, o il coltello, per la reciſione di eſſa paſſar doveſſe. Ma la teſta nelle lumache non è foggiata così: allorchè queſte ſono fuori del guſcio, il loro corpo (ſe ſi preſcinda dalle corna) imita rozzamente un cono, che è di minor diametro nella parte anteriore, e di maggiore nella deretana, che confina con l' apertura del guſcio. E' coſa certa che la teſta riſiede nell' anterior parte del cono, ma la difficoltà conſiſte nel ſapere quanto eſſa preciſamente ne occupa, per ſapere quanto ſe ne poſſa con ſicurezza tagliare. A dir vero non ſi può dar regola certa per lo continuo allungarſi e reſtrignerſi, ingroſſarſi e impicciolirſi dello ſteſſo cono quando la lumaca è in moto. Pure allorchè la medeſima è quanto lo può eſſere fuori del guſcio, ho trovato che ordinariamente ſi eſtende dalla punta ottuſa del cono fino al di là della radice delle corna maggiori per il breve intervallo di una linea all' incirca; e fin lì è conceduto il taglio, con ſicurezza di avere per lo più reciſa ſoltanto la teſta. Ma ſe ſi oltrepaſſano queſti limiti, ſiccome allora in un con la teſta vengono a reciderſi altre parti del corpo, così ſiamo preſſochè certi della morte dell' animale. Le lumache da me con felice ſucceſſo ſperimentate ſono ſtate di tre ſpecie, l' *helix pomatia*, *nemoralis*, *lucorum*, per valermi de' vocaboli del Nomenclatore Linneo. Più individui di una di queſte ſpecie ſono al naturale eſpreſſi nella Tavola anneſſa.

La figura I. rappreſenta queſta lumaca chiuſa ancora nel guſcio, diſponenteſi però ad uſcirne.

La II. quando comincia a mettere in viſta il capo, e le corna.

La III. allorchè ha allungate le corna di più, ma poſta in ſituazione contraria.

La IV. quando è quaſi fuori del guſcio quanto lo può eſſere.

La V. fa vedere la porzione di cono comprendente unicamente la teſta, la qual porzione, per dare ad intendere meglio la coſa, ſi rappreſenta già ſpiccata dal collo.

La figura VI. moſtra la lumaca, cui è ſtata levata queſta porzione, apparendo ſul tronco ne' quattro punti che denotano il luogo delle quattro corna.

Dopo l' aver ottenuto nelle lumache la riproduzion delle corna, mi nacque in penſiero di vedere coſa foſſe per accadere recidendo loro la teſta. Ma dubitando che dal levarla tutta, anzi che rifarla, periſſero, cominciai i miei tentativi col troncarne una porzione ſoltanto, quella cioè che ſi eſtende eſcluſivamente fino alle corna maggiori, e che comprende le labbra, le mandibole col dente, la lingua, e le due corna minori oltre gl' invogli muſculoſi, o integumenti, che vogliam nominarli, la qual porzione per ſervire alla brevità chiamerò quindinnanzi *teſta dimezzata*. Viene eſſa rappreſentata nella figura IV. per le lettere *a*, *c*. Per reciderla a dovere facea che la lumaca l' aveſſe ſpinta in fuori quanto più può, e allora procurava di levarla di netto con la ſorbice, facendo la ſezione perpendicolare all' aſſe del cono. Ma l'operazione non veniva ſempre a bene, ſiccome avrei deſiderato. La teſta della lumaca, ſiccome abbiam detto, è mobiliſſima, e appena che ſe la ſente toccare l' accorcia di ſubito, e la ritira: di più allorchè l' allunga, la piega ſovente in diverſi ſenſi, a deſtra, a ſiniſtra, in alto, al baſſo. Quindi è che il taglio riuſcendo male talvolta, cioè a dire fatto obliquamente, la teſta dimezzata non recidevaſi preciſamente. Ma perchè io riputava dell' ultima importanza per l'eſattezza dell'eſperienze il ſapere quali parti unicamente venivan reciſe, per vedere ſe in ſeguito ſi riproducevano tutte (in evento che tal riproduzione aveſſe avuto luogo in natura); però in queſti tentativi io dovetti pigliarmi una fatica, che pigliata non m'era nelle riproduzioni di più altri animali, e queſta fu di anatomicamente eſaminare ogni teſta dimezzata, ſubito che era ſtata reciſa, e di riporre in altrettanti piccioli vaſi le lumache decapitate, facendone toccar una a ciaſcheduno col ſuo numero affiſſo, che trovandoſi il medeſimo nel mio Giornale, veniva quivi accompagnato da una breve anatomica deſcrizione dei componenti ciaſcuna teſta levata. Così tolto reſtava qualunque ſoſpetto di prendere equivoci nelle mie eſperienze; e d' altronde io poteva venire in cognizione, ſe le parti rifabbricate

fabbricate corriſpondevano preciſamente nel numero, nella forma, e nella grandezza alle parti reciſe. Dietro a queſte notizie che ho creduto bene il far conte, perchè nota ſia la maniera da me praticata nelle ſperienze, paſſo alla narrazione dei riſultati.

Seguíta l'amputazione, la lumaca immediatamente appreſſo ſi ritira con ſomma rapidità, e naſcondeſi dentro del guſcio, e ſoventemente nell'atto del ritirarſi mette un ſottil fiſchio, proveniente dalla difficoltà che trova l'aria nel venir fuora del canale della reſpirazione per eſſerle allora in parte conteſo il varco dalla ſubita contrazione del corpo. Malgrado queſto enorme taglio egli accade talvolta che la lumaca ritorna poco dopo fuora del guſcio, e comincia a ſtraſcinarſi da luogo a luogo, ſiccome facea quando era intatta. La figura VII. ci fa vedere una lumaca, alla quale è ſtata tagliata la teſta a metà, e che dopo il taglio è uſcita volontariamente del guſcio. I due punti *R*, *S* denotano il ſito dov'erano le corna minori. Le maggiori ſono più picciole del ſolito, per non averle queſto rettile ſpinte fuori abbaſtanza. Ma il più delle volte ſuccede il contrario. Vi è però un mezzo aſſai facile per obbligar la lumaca ad uſcire, ad oggetto di poter vedere, ed eſaminare il taglio prodotto, e queſto mezzo conſiſte nel rompere a leggeriſſimi colpi d'una chiave, o della coſtola d'un coltello una picciola parte del guſcio di dietro; giacchè allora la lumaca da quella viva impreſſione irritata ſi determina a ſpuntar per d'avanti, poca o molta che ſia ſtata la reciſione del capo. E qui noterò in paſſando per evitar le inutili ripetizioni, che di un tal eſpediente mi ſono valuto ogni qualvolta le lumache ricuſavano di comparire, e che a me premeva di oſſervare o la reciſione fatta di freſco, ovvero i principj, e i progreſſi della teſta riproducenteſi. Eſaminato adunque il troncone, dopo l'aver reciſa la teſta dimezzata, ſi ſcorge uſcire da eſſo una porzione di quel liquore, che nella lumaca tien luogo di ſangue; il qual liquore però ceſſa ben preſto, a motivo del troncone che non indugia a corrugarſi, e ad impicciolirſi, anzi qualche volta ſino in apparenza a perderſi, entrando in ſuo luogo un picciolo incavo o affoſſamento, dove non appariſce indizio del taglio. Intanto le lumache così decapitate ſi attaccano per lo più ai vaſi dentro cui ſono ripoſte, ſi naſcondono nella loro caſetta, otturandone la bocca con quel ſottile e bianco coperchio prodotto dal tegnente umore che ſtilla dal corpo, e quivi entro immobilmente quetano per più ſettimane e talvolta per meſi intieri.

Facendole uſcire dopo 30 ovvero 40 giorni, alcune moſtrano il nudo troncone ſenza apparenza di riproducimento; ma altre, ſe la ſtagione ſia piuttoſto calda, cominciano a far vedere verſo il mezzo del troncone un globettino in apparenza carnoſo, aſſai tenero, e di un bianco cenerognolo, che eſaminato però sì eſternamente, che al di dentro, non laſcia ſcorgere all'occhio niente di organizzato. L'organizzazione però dopo altri 8 oppur 10 giorni principia a manifeſtarſi in eſſo globettino già di molto accreſciuto, apparendo i rudimenti delle labbra, delle corna minori, della bocca, e della lingua, con di più un corpicello membranoſo di colore oſcuro, che per eſſere attaccato alla mandibola ſuperiore, e fraſtagliato ai lombi, induce l'Oſſervatore nella facile credenza che ſia il dente rigeneranteſi della lumaca. Trattanto ne' giorni conſecutivi queſte parti ſi vanno ſvolgendo, e manifeſtando di più, occupando ſucceſſivamente ſpazio maggiore nel troncone; e dopo due o tre meſi al più la teſta dimezzata ſi è riſatta in guiſa, che a riſerva del colore alquanto più tenero non ſi diſtingue punto dalla vecchia. Oltre l'iſpezione eſterna, ce lo perſuade, e fa chiaro la notomia. Concioſſiachè aperta, ed eſplorata per di dentro la teſta novella, ſi ravviſano in lei quelle parti, corriſpondenti appuntino nel numero, nella forma, nella grandezza, che preeſiſtevano nella vecchia teſta, e che erano ſtate da me ſcrupoloſamente ſu' miei Giornali notate in ciaſcuna decollazione. Io non ſaprei porgere a' miei Lettori un' idea più ſenſibile di queſta riproduzione, che con l'eſempio d'un fiore per ancor non aperto. Conſiderato ne' ſuoi principj egli è un bocciuolo, o picciol globo riſultante da membrane sì avviluppate fra loro, e sì aggrovigliate, che non arriviamo punto a diſtinguere la forma delle foglie o come diciamo dei petali. Queſti petali ſoltanto in progreſſo ſi diſaſcondono, dapprima con qualche oſcurità, e confuſione, poi diſtintamente, e con tale chiarezza, che chicheſſia lo riconoſce per un bottone d'un fiore: in quella guiſa perappunto che il compleſſo delle parti ſviluppantiſi nelle lumache arriviamo finalmente a ravviſarlo per una verace teſta rigenerata.

Queſta rigenerazione però così compiuta e tutta d'un pezzo è ben lungi dall'ottenerſi in tutte le lumache; ma in diverſe ſpuntano dal troncone due picciolisſimi globi, che in taluna ſono i principj delle due corna minori, in tal altra l'uno di eſſi abbraccia di più i rudimenti delle labbra, della bocca, del dente, della lingua, i quali due picciolisſimi globi in progreſſo di tempo però ſi uniſcono inſieme, e ſi conformano in un ſolo, che ſvoltoſi in ſeguito di vantaggio viene compiutamente a formare la teſta dimezzata. Non è raro che l'uno delle due corna riprodotte non aggiunga alla naturale lunghezza, o che ſia biſtorto, ovveramente che un labbro ſia dell'altro più picciolo, od anco che la teſta riſabbricata pieghi tutta da un lato, o che abbia tra il nuovo e il vecchio un incavo o foſſetta, od in fine che la teſta non ſiaſi punto riſatta, e ciò dopo ſei meſi, ed anche un anno, apparendo tuttavia il troncone nudo, allorchè la lumaca eſce del guſcio. Ho oſſervato quaſi coſtantemente, che quando il taglio è ſtato fatto perpendicolarmente all'aſſe del cono, la riproduzion della teſta ſuccede perfettamente: e che quelle moſtruoſità, e quelle anomalie hanno frequentemente luogo, allorchè la reciſione è accaduta obliquamente, ovver che le forbici, per non eſſer talora troppo taglienti, non hanno reciſa in un colpo la teſta dimezzata.

Le lumache in più tempi decapitate a metà ſono aſceſe al numero di 322. La teſta ſi è ottimamente rifatta in 126. Si è fatta vedere più o meno moſtruoſa o deforme in 31 lumache; 14 non hanno punto riprodotto, e il reſtante è perito (*a*). E però mi ſono accorto che la reciſione della teſta, benchè dimezzata, a più lumache è fatale. Tutte quelle che hanno riprodotto ſi ſono ſervite della teſta novella come facean della vecchia, tanto nei moltiplici, e bizzarri movimenti, che proprj ſono di queſta parte, quanto nel prendere quegli alimenti che loro ſomminiſtrava, come pane, inſalata, e ſimili, mercè cui di magriſſime che eran venute pria del rifacimento del capo, acquiſtata avevano la primiera carnoſa pienezza.

ARTICOLO IV.

Riproduzione della Teſta intiera.

Nel terzo Articolo ſi è veduto che i componenti l'intiera teſta delle lumache giungono fino al di là della radice delle corna maggiori pel tenue ſpazio di una linea all'incirca. Il perchè determinato avendo io in queſto corſo novel di eſperienze di ſradicar per intiero la teſta, nel mentovato ſito preciſamente ſi è cercato di fare il taglio, e ſi è procurato ſempre che foſſe perpendicolare all'aſſe del cono carnoſo formato dalla teſta, e dal collo. Ma le difficoltà incontrate nell'amputazione

---

(*a*) La ſcoperta della riproduzione delle corna, e della teſta così dimezzata, che intiera nelle lumache è ſtata da me fatta nella primavera, e nella ſtate del 1766.

della teſta dimezzata trovate ſi ſono le ſteſſe nell' amputazione della teſta intiera; e quindi il taglio per l'agitarſi delle lumache non ſi è ſempre potuto fare nel ſito prefiſſo, ma talvolta ha mancato o per difetto, col levar meno dell' intiera teſta, o per eccesſo, col levarne di più. Quindi ad oſſervare la dovuta eſattezza nelle eſperienze, e ad eſſer ſicuro delle conſeguenze delle medeſime, mi è convenuto ad ogni decapitazione l' intraprendere quegli eſami anatomici, che intrapreſo avea nelle teſte dimezzate, cuſtodendo medeſimamente in vaſi appartati ſingole le lumache, e tenendo un eſatto conto di ciò che elleno nell' amputazione perduto aveano. Le mutilate a teſta intiera ſono ſtate 423, ed eccone i riſultati.

Quelle lumache, a cui oltre la teſta era ſtata reciſa una porzione di collo, tutte quante ſono perite. Nè è punto a ſtupirſene, mentre che allora venivano in parte tagliati gli organi della generazione, che appunto ſappiamo avere la loro origine interiormente in un lato del collo, di dove per un forame eſcon fuora, allorchè queſti rettili vogliano dar opera alla propagazion della ſpecie. Le mutilate poi per l' intiera teſta preciſamente, o che lo erano ſtate alcun poco di meno, morivano bensì in qualche numero, ma le più ſopravvivevano a quel taglio enorme, anzi aſſai di queſte rifacevano compiutamente la teſta. Tal riſacimento per venire in molti individui accompagnato da circoſtanze diverſe, e tutte degniſſime da ſaperſi, merita d' eſſere alcun poco particolarizzato. Se ad una ſalamandra acquajuola ſi recida una gamba, o ad un lombrico terreſtre la teſta, e la coda, la riproduzione che ne naſce è un *tutto organico* intero, o vogliam dire una gamba in miniatura, una teſta, una coda, ſimiliſſima alla reciſa, a cui null' altro manca che uno ſviluppamento ulteriore. Pel contrario ſul troncone delle lumache nel modo eſpoſto decapitate non ſalta già fuori un tutto organico intero, comprendente quelle parti tutte, che componevano la teſta tagliata; ma queſte parti a principio ſono ſpeſſe fiate fra lor ſeparate, anzi talvolta pullulano le une qualche tempo appreſſo che hanno pullulato le altre, e ſolamente dopo uno ſpazio più o men lungo ſi attaccano tutte inſieme, ſi conſolidano, e vengono a formare un tutto organico, poco o niente diſſimile dall' antica teſta. Da alcuni eſempii che recherò in mezzo s' intenderà più agevolmente la coſa.

Talora dunque la naſcente riproduzione è una carnoſa pallottolina aderente in pochi punti al mezzo del troncone, e come ſpiccata da eſſo, la qual contiene i rudimenti delle due labbra e delle corna minori unitamente alla bocca, alla lingua, e al dente già rifattoſi della lumaca. Le altre parti, come le corna maggiori, e il reſtante del capo mancano interamente. Il troncone d' altra lumaca moſtra un corno maggiore già fornito del ſuo occhio, e al di ſotto in rimota parte e iſolata ſpuntano i primi lineamenti delle labbra. La riproduzione in altre è un gruppo di tre corna, due già arrivate alla naturale lunghezza, e groſſezza, il terzo giacente ancora a fior di pelle. Chi non riproduce da principio che un bottoncino, che attentamente ſpiato, ſi ſcorge eſſer le labbra in ſeſteſſe ravviluppate e riſtrette. Chi è già fornita dell' intiera teſta, a riſerva d' uno o più corna mancanti. Chi finalmente laſcia apparir ſul troncone le due ſole corna maggiori, oppur le minori, ovveramente un maggiore, e un minore.

Tutti queſti parziali riproducimenti però, congiunti ad altri che appariſcono in ſeguito, coll' andar del tempo concorrono inſieme, ſiccome io diceva, ed uniſconſi, e formano una ſola riproduzione, cioè a dire una teſta novella, in molte lumache in nulla diſſomigliante dalla vecchia, a riſerva del colore men carico, in grazia del qual colore anche i meno veggenti ſanno riconoſcere la porzion riprodotta, ſiccome più d' una volta ho praticamente veduto. La figura VIII moſtra una di queſte lumache, che hanno rifatta compiutamente la teſta, non però ancora adombrata del naturale colore. E lo ſteſſo ſi è della figura IX, ſuor ſolamente il non aver rifatte queſta lumaca le due corna maggiori, ſiccome qualche volta ſuccede. Per altro a tempo più inoltrato anche la teſta novella prende la tinta medeſima della vecchia, e la prima ſoltanto ſeguita a diſtinguerſi dalla ſeconda per una linea cenerognola perpendicolare all' aſſe del collo, la quale fedelmente indica il ſito dove paſsò la forbice nel mutilar le lumache. Sebbene l' indizio di un tal ſito non è coſtantemente una ſemplice linea. Egli è talora un incavo profondo, di colore però ſempre bianchiccio, perpendicolare all' aſſe del collo, ſe perpendicolare ne ſia ſtato il taglio, ed obliquo, ſe con obliquità ſiaſi reciſa la teſta. Anzi in queſt' ultimo caſo qualche volta accade che dalla parte dove è ſtata tagliata più teſta, l' incavo ſia maggiore: ed in qualche lumaca vedeſi un enorme ſquarcio da un lato, niente non apparendo nell' altro, o ſolamente l' accennato indizio della linea di color cenericcio. E quantunque la diuturnità del tempo cancelli gl' incavi, pure il ſegno del taglio, cioè la nominata linea, ſi appaleſa ſul collo di alcune lumache eziandio dopo due anni. Dirò di più. Dopo sì lungo intervallo la riproduzione della teſta in qualche lumaca non è completiſſima, o perchè mancante di uno o più corna, o perchè le corna giunte non ſono, almen tutte, al neceſſario ingrandimento, ovveramente perchè ſono bernoccolute, e moſtruoſe. E di queſte apparenti moſtroſità ne ho riſcontrato non rade volte, le quali ſoſpetterei volentieri che traeſſer l' origine dalla condizione del taglio più o meno obliquo, più o meno avanzato.

Il cibarſi che facevano le teſte riprodotte ſembrava un argomento ſicuro della rigenerazione veriſſima delle parti, onde è compoſta la teſta; pure ho voluto vie maggiormente accertarmene con l'infallibile ſcorta dell' anatomia, la quale mi ha inſegnato che le teſte nuove (almen quelle che all' eſterno ſembravano riprodotte interiſſimamente) erano corredate di tutti que' componenti che trovati avea nelle teſte vecchie, e che in ciaſcheduna decapitazione erano ſtati da me marcati, per non ſoggiacere ad equivoci, o errori in queſti fiſici eſami. Aggiugnerò che ciaſcuna parte nuova ſi univa, e ſi combaciava sì eſattamente ne' più ſottili ſuoi ſtami colla vecchia, che le lumache che avean riprodotto non avremmo mai giudicato che foſſero ſtate mutilate, ſe indicato non lo aveſſe la linea ceneficcia, che loro correva attraverſo del collo.

Qui non debbo però laſciar di avvertire, che a quel modo che alcune lumache, cui levato avea la teſta dimezzata, non hanno riprodotto mai nulla, eziandio dopo un tempo lunghiſſimo, lo ſteſſo è avvenuto a diverſe di quelle, cui era ſtata reciſa l'intiera teſta. Di fatto delle 423 mutilate a teſta intera, ne ho contato 32, che dopo un anno non manifeſtavano il più picciol principio di riproduzione; 93 non potevano aver riprodotto meglio. La teſta di 145 ſi era rigenerata con moſtroſità, e le reſtanti lumache erano morte. La teſta intiera per riprodurſi eſige preſſo a poco quel tempo che la teſta dimezzata.

Che ſe chieſto mi foſſe, donde ſia che in diverſe lumache la riproduzione è nulla, tanto del capo, che delle corna; confeſſerei ingenuamente di non avere intorno a ciò che ſemplici conghietture. Eſſendo così le riproducenti lumache, come le non riproducenti della medeſima ſpecie, dir non poſſiamo che altre abbiano il dono di riprodurre, ed altre no. Opinerei piuttoſto che la virtù riproduttrice non poteſſe ſortire in alcune il ſuo effetto per lo ſtato ſoverchiamente morboſo di que-

ſte

ſte lumache, avendo quaſi ſempre oſſervato, che oltre al notabiliſſimo dimagramento di eſſe, l'eſteriore del corpo prende una sfumatura giallognola, che ſembra inſeparabil compagna delle lumache affette da malattia, e bene ſpeſſo ſoggette a perire.

Avutaſi la riproduzione della teſta, era troppo naturale il penſare che le lumache riprodurrebbono altre parti meno di quella eſſenziali. Tali ſono quell' eminente collare che cinge e adorna la ſchiena delle lumache, quando ſono fuora del guſcio, e quel piano, e largo piede, ſu cui appoggiaſi il lor corpo, quando ſi muovono. Queſte due parti reciſe ſi reſtaurano ottimamente, rifabbricando la natura molto o quel poco, che dalla ſorbice era ſtato levato.

Riunendo in un ſol punto di viſta quanto ſinora abbiam detto intorno alla riproduzione delle lumache, chiaro appariſce che eſſe ſanno primamente riparare le corna, o queſte in parte ſoltanto, o per intiero vengan reciſe. Secondo che riſanno la teſta quando è ſtata loro reciſa a metà. Terzo che la riſanno egualmente, ove tutta quanta ſtata ſia loro troncata. Quarto che riproducono il collare, ed il piede, poco o molto che lor venga tolto. Dal che ſi fa chiaro che queſti rettili ricuperano quelle parti preciſamente, che avean perdute, la qual coſa non è però sì propria di eſſi, che non s'eſtenda eziandio ad altri animali riproducenti. Se ad una ſalamandra venga a mancare un terzo, oppure un quarto di coda, non ne rifa che un terzo, od un quarto. E lo ſteſſo vuol dirſi della metà, anzi di tutta quanta la coda. Un fenomeno ſomigliantiſſimo ha pur luogo così nelle gambe anteriori, che nelle poſteriori di queſto amfibio. (*a*). E cotal tenore di rigenerare le parti ſol-

---

(*a*) Prodr. cit.

tanto mancanti ſi eſtende invariabilmente ai lombrichi terreſtri, ed aquatici, come altresì alle rane aventi ancora la maſchera di verme o girino (*b*). Anzi conſultando gli Autori che parlato hanno della riproduzion delle membra in altri animali, trovo aver luogo la medeſima inalterabil legge: di maniera che ſtabilir poſſiamo qual canone generaliſſimo (ſe preſcinder vogliaſi da alcune accidentali anomalie) che negli animali forniti della prerogativa di riprodurre la natura non rimette mai ſe non ſe quelle parti, o quegli organi, che per qualunque cagione o accidente erano ſtati lor tolti.

ARTICOLO V.

Coſe relative alla riproduzione della teſta nelle Lumache.

Diam compimento alla preſente Memoria col riferire alcune nuove eſperienze, accompagnate da varie rifleſſioncelle, le quali per riſguardar davvicino, e per mettere in maggior luce queſto intereſſante ſoggetto, non riuſciranno forſe diſcare, ſiccome ſpero, ai lettori.

Si è veduto tre eſſere ſtate le ſpecie di lumache da me cimentate, *pomatia*, *nemoralis*, *lucorum*. Ma ſono elleno queſte tre ſpecie ſole, che godono della riproduttrice virtù? Per le ſperienze fatte da alcuni Naturaliſti d'oltremonti veggo eſſervene altre partecipi di tal privilegio. Dirò io però con amica ingenuità di averne ſperimentate altre ſpecie, ma preſſochè con inutilità di ſucceſſo, concioſſiachè o non hanno punto rifatto la teſta, nè le corna, o hanno ſoltanto manifeſtato un primo principio di riproduzione, che in ſeguito è andato a finire con la morte dell'animale.

(*b*) L. c.

Ma donde è mai che alcune qualità di lumache hanno il potere di riprodurre, ed altre no? Se fatto mi foſſe ſimil queſito, candidamente confeſſerei di non aver tanto in mano, onde ſciorlo. Se le riproducenti aveſſero ſtruttura organica aſſai diverſa dalle non riproducenti, aſſegnar potrebbeſi qualche ragione, o a parlare più filoſoficamente qualche diſparità tra le une e le altre; ma tale diverſità, nelle parti almeno conſtitutive del capo, non ho certamente ſaputo trovarla nelle varie ſpecie di lumache con eſito così buono, che cattivo da me cimentate.

Queſta quaſi medeſimezza di organiſmo in lumache ſpecificamente diverſe, la quale ciò non pertanto ci guida a riſultati affatto contrarj, quali ſono il riprodurre, e il non riprodurre, ci ammoniſce utilmente che qui non poſſiamo punto valerci dell'analogia, coll'argomentare da ſpecie a ſpecie, ma che per aver dati ſicuri ſiamo aſtretti d'intraprendere tanti eſperimenti, quanti ſono gli animali ſpecificamente diverſi. E la forza di queſta per noi umiliante verità ſi rende anche più paleſe, e più chiara, volendo noi gittare una fuggitiva occhiata ſopra diverſi di quegli animali, che in varj tempi ſi è ſcoperto da' Naturaliſti eſſer dotati di riproduttrice virtù. Quando per la prima volta ſvelati furono al filoſofico mondo dall' immortale *Trembley* i prodigj del polipo, ſi pensò che la ſempliciſſima ſtruttura ſua concorſa foſſe maſſimamente a crearli. Di fatto l'eſſere cotal verme privo di cuore, di vene, di arterie, e per conſeguenza di vera circolazione di umori, il non trovarſi in lui nè cervello, nè ſpinale midollo, nè nervi, nè verun altro accompagnamento di quelle parti, che ſi riſcontrano in una infinità d'altri animali, ma l'apparir tutto formato d'una ſoſtanza gelatinoſa, e omogenea, ſeminata per ogni dove non d'altro che d'una quantità di granellini, tutto ciò dava a penſare, che la ſemplicità della ſtruttura concorreſſe a far sì che ogni particella tagliata dal polipo ſi conformaſſe in un polipo intiero; a quel modo che prima della ſcoperta del citato Ginevrino Filoſofo ſi era penſato, che ſtante la ſempliciſſima loro ſtruttura ſuccedeſſero nelle piante que' maraviglioſi ſenomeni, che ſi ſono in ſeguito oſſervati ne' polipi. E il riparamento delle parti perdute in altri eſſeri animati di ſtruttura aſſai ſemplici, quali ſono le ortiche, e le ſtelle di mare, e diciam anche i gamberi di fiume, avvalorava cotal penſamento. Ma l'eſſerſi trovato dappoi che certi vermi d'acqua dolce malgrado l'eſſere di molto più compoſti dei polipi, tagliandoli a pezzi, rigermogliano in altrettanti vermi completi *(a)*, ha dato a vedere, che la ſemplicità dell'organizzazione non è una condizion neceſſaria al riparamento delle parti perdute. E ciò ſi è anche verificato in modo più luminoſo ne' lombrichi terreſtri, dappoichè il *Reaumaur* ha trovato che reciſi a brani moltiplicano come le piante, verità fiſiologica negata da alcuni Naturaliſti, e che verrà da me poſta fuor d'ogni dubbio, e conſiderabilmente ampliata nelle mie *Riproduzioni Animali*. E quando io nomino il lombrico terreſtre intendo parlar di un vivente a mille doppj più compoſto del polipo nell'organiſmo, per trovarſi in lui circolazione di ſangue, e in conſeguenza vaſi arterioſi, e venoſi, e canale degli alimenti, e ſpinal midolla, e nervi, e unione dei due ſeſſi, per eſſere ermafrodito *(a)*. Della qual complicata ſtruttura va pur fornito il mio lombrico d'acqua dolce *a batello*, non oſtante che non ceda punto al lombrico terreſtre, e ai vermi d'acqua dolce per la facoltà del riprodurre *(b)*.

Sebbene dei ſurriferiti vermi quanto ſono ſituati più alto nella ſcala dell'animalità per l'organica loro ſtrut-

---

(a) Bonnet *Traitè d'Inſectologie*.
(a) Prodr. cit.
(b) L. c.

tura e la lumaca terreſtre, e la ſalamandra acquajuola? Laſciando a parte la prima, per averne già parlato abbaſtanza, fermiamci per un momento a contemplar la ſeconda. Quantunque la ſalamandra acquajuola meritamente ſi annoveri dai Naturaliſti tra gli amfibj, per queſto però non laſcia d'eſſere un vero quadrupede, avendo in piccolo moltiſſime di quelle parti che hanno i quadrupedi in grande. Aſſaiſſimi di queſti ſi trovano avere corredata la coda di vertebre oſſee, incaſtrate le une dentro alle altre, e ſucceſſivamente più picciole in ragione dell'aſſottigliarſi della coda. E di vertebre medeſimamente oſſee, e in ſimil guiſa conformate va provveduta la coda delle ſalamandre, oltre le parti ſolide molli, cioè a dire il midollo allungato che fora ciaſcuna vertebra, e arriva fino alla più ſottile, i nervi, i muſcoli, le vene, le arterie, il cuore, e una numeroſa famiglia di glandole, da cui ſcappa quel liquore lattato, ed acre, che ſi ſparge ſu la pelle, quando la ſalamandra viene irritata. Similmente le gambe così anteriori, che poſteriori hanno preſſo a poco quella ricchezza di parti ſolide molli, e di parti ſolide dure, oſſia di oſſa, che ſi oſſerva ne' grandi quadrupedi, e preſſo a poco anche in noi. Finalmente come queſti le mandibole del noſtro amfibio vanno armate d'un oſſo rozzamente circolare, che le circonda, e le termina, da cui riſalta una ſelvetta regolare di acutiſſimi denti. Trovato queſto apparato di tante parti, e tanto fra loro diverſe, chi creduto avrebbe che tal quadrupede abbia il dono di ripararle tutte, ogni qualvolta tutte vengan reciſe? Eppure non evvi niente più vero di queſto, ſiccome ho ſcoperto io il primo aſſaiſſime volte. Il perder le quattro gambe ad un colpo è per la ſalamandra quaſi un nulla, giacchè ſa ripararle tutte quattro, e ripararle perfettamente. Sonomi preſo la pena di numerar tutte le oſſa, che entrano in eſſe quattro gambe; ed ho veduto che aſcendono a *99*: e *99* ſi ſono pure da me trovate nelle quattro gambe riprodotte, allora quando tutte quattro erano ſtate diſarticolate dal tronco. Che più? Levate per intiero le quattro gambe, e inſiememente tutta la coda, e le due mandibole, la ſalamandra oltre al reſtauramento delle gambe, rifa nel tempo ſteſſo e mandibole, e coda. Queſta verità, che ha tutta l' aria di paradoſſo, e che anzi a prima giunta ci ſembra più favoloſa della famoſa idra di Lerna, l' ho io replicatamente veduta, e fatta vedere a più miei Amici, non ſenza ſorprendimento di tutti. E tanto più la ſalamandra acquajuola è oggetto di maraviglia, quantochè non defrauda mai delle moltiplici ſue riproduzioni l' avido Sperimentatore, la qual coſa ſi è veduto non ſucceder ſempre nelle lumache, alcune delle quali ricuſano di riprodurre.

Ecco adunque come cominciando dal polipo, indi paſſando a più vermi, poi alle lumache, e da ultimo alle ſalamandre, che è quanto dire progredendo da animali ſempliciſſimi ad altri men ſemplici, e da queſti ad altri eziandio più compoſti, chiaro appariſce aver luogo la riproduzione, ſenza che l' organiſmo più o meno ſemplice, e più o meno compoſto produca verun divario eſſenziale.

Queſti fatti provan del pari che la tenerezza della fibra, o delicatezza che vogliam nominarla, non è altrimenti una condizion neceſſaria per le riproduzioni animali. Qual divario nella mollezza tra il corpo d' un polipo, e la coda, o le gambe d' una Salamandra? Eppure sì l' uno che l' altra non riproducon del pari? Senza che quanti animaletti teneriſſimi quanto il polipo, ed anche di più, ed eſſi pure acquatici come lui, invece di riprodurre, ſe vengan tagliati, vanno a perire, ſiccome ho io ſteſſo potuto accertarmene per replicati tentativi ſopra loro intrapreſi?

Conviemmi però l' avvertire che quegli animali, che atti eſſendo per lor natura al riprodurre, dotati ſono nel tempo ſteſſo di fibra più tenera, hanno ſopra gli altri più d'una notabile prerogativa. Primieramente le loro mancanti membra cominciano a ripararſi più prontamente. Un polipo tagliato per lo traverſo in molte parti, principia a moltiplicarſi in altrettanti polipi in poche ore. Un verme, ſia di terra, ſia d'acqua, eſige più giorni per la ſua iniziale riparazione. Una lumaca all' oppoſito, e una ſalamandra addimandano più ſettimane. Secondamente il completo riproducimento nei primi ſi ottiene in un tempo conſiderabilmente men lungo, che nei ſecondi. Pochi giorni pel conſeguimento di queſto ſi richieggon dal polipo: i ſuddetti vermi eſigono il corſo d' intiere ſettimane; più meſi vuole la lumaca per rifare la teſta, e un anno intero non baſta alle ſalamandre perchè le gambe novelle acquiſtino la naturale grandezza delle vecchie. In terzo luogo lo ſteſſo animale dotato della qualità riproduttiva, quanto più è giovane, e in conſeguenza di fibra più cedente, più tenera, tanto più preſto rimette perfettamente le parti perdute. Oltre l' averlo io toccato con mano nelle ſalamandre, ho avuto l' agio di vederlo nelle lumache, le quali decollate rimettono il capo in meno d'un meſe e mezzo, e lo rimettono molto prima, ſe mutilate ſieno più giovani ancora. Da ultimo la fibra in qualche animale ſe venga a ſminuire la nativa mollezza, la riproduzione vien meno. Ne abbiamo un parlante eſempio ne' ranocchj. Quando ſono ancora girini, ma che cominciano però a metter le gambe, ſe loro vengan reciſe coteſte gambe, certa coſa è per le oſſervazioni mie ſteſſe, che le rifanno interiſſimamente. Ma la coſa non va così ogni qualvolta le medeſime vengano tronche, acquiſtato che abbia il girino le ſembianze di rana. Allora dunque non è mai o quaſi mai che il troncone rimetta una gamba novella. Ma donde un fatto tanto diverſo nelle medeſime membra di queſto amſibio? Diremo noi che quella virtù, quella potenza di riprodurre, che avea l' animale eſſendo girino, l' abbia egli perduta, facendoſi rana? Siccome ad onta di tal metamorfoſi ſeguita egli ad eſſere lo ſteſſo animale (*a*), queſta idea ſembrami poco filoſofica. Trovo più confacente al vero il penſare, che nella rana continui ad averſi la potenza riproduttrice; ma che laddove tal potenza nel girino veniva all' atto, a motivo della tenerezza grande della fibra, le ſia in ſeguito ciò conteſo per l' induramento di queſta. Tentiamo di ſchiarire di più tal penſiero. La rana ſotto forma di girino non eſce mai fuori dell' acqua: che anzi uſcendone perirebbe. Solamente a quando a quando dal fondo ſi lancia alla ſuperficie, e per un momento mette fuora il muſo per eſpellere dai polmoni l' aria vecchia, e per aſſorbirne della nuova. Il troncone adunque delle gambe reciſe rimane in quel tempo in uno ſtato di ſomma mollezza, per trovarſi ſempre immerſo nell' acqua, e da eſſa in ogni punto bagnato. La gambina adunque ſotto forma di germe potrà forare, diciam così, il troncone, ed uſcirne, e ſvolgerſi liberamente. Non così le accaderà, ove la rana acquiſtato abbia le proprie, e permanenti fattezze; giacchè allora reſtando il più fuori dell' acqua, e per poco d' ora attuffandoviſi ſolamente alle preſenza di qualche inſidia, o pericolo, il troncone dovrà ſoggiacere alle vive impreſſioni dell' aria, e quindi ſi cicatrizzerà, e in grazia della cicatrice contratta non permetterà al germe riproduttore di rompere, e ſvilupparſi.

La mutilazione delle lumache, di cui ho fin qui ragionato, è ſtata per lo più da me fatta a primavera alquanto inoltrata, veduto avendo che per ottenerſi in eſſe la riproduzione non vi vuol meno del grado decimo

---

(*a*) Diſſertaz. di Fiſic. Animal. e vegetab. T. II.

mo terzo del termometro del Reaumur, il qual grado nelle contrade di Lombardia non ſuole averſi prima di detta ſtagione. E fatta allora la decapitazione ſi è ſicuro che prima del verno le lumache, almen molte, riſanno perfettamente la teſta. Ma che accaderà egli adunque fatto il taglio verſo la metà di Settembre o in quel torno, quando cioè il mentovato grado di calore non ſuole eſtenderſi preſſo di noi al di là d'un meſe, per le ſopravvegnenti pioggie autunnali? Ho inſtituito più eſperimenti per lo ſvolgimento di queſta curioſa queſtione, e ne ho ottenuto i ſeguenti riſultati. Se le lumache già mutilate io le faceva ſtare nel tepor d'una ſtufa, eguale o ſuperiore al grado ſuddetto, era ſicuro di una perfetta riproduzione aſſai prima del finir dell' inverno. Se le cuſtodiva in una ſtanza, il cui freddo per alcuni giorni giunto foſſe al grado della congelazione, la più parte andava a perire. Se poi il freddo era minore, riſtavano per tutta quanta l' avverſa ſtagione di riprodurre, e ricomparita la primavera, il capo o le corna, già cominciate ſopra inverno a ſvilupparſi, ſeguitavano a farlo fino all' intiero loro compimento. Che ſe da ultimo la decollazione ſeguiva nel principio del verno, e d' altronde ſi aveva l'avvertenza che non periſſer di freddo, ſenza però tenerle dentro a una ſtufa, in tal circoſtanza ſul piano del troncone non appariva mai durante l'inverno verun principio riproduttore, e ſolamente queſto cominciava a farſi paleſe in Maggio, e proſeguía poi a ſvilupparſi, e ad ingrandirſi ne' meſi eſtivi.

E queſto tenor di procedere, che pratica la natura nelle riproduzioni delle lumache, lo pratica in quelle del pari delle ſalamandre, e de' lombrichi terreſtri, ed acquatici, con tal differenza però che queſto genere di vermi riproduce anche, ſebben lentamente, nel grado del temperato: queſto poi derivi o per la mollezza grande della fibra, onde ſono compoſti, o a cagione della ſingolare loro natura.

Quando era occupato ſu la riproduzione dei lombrichi, mi preſe voglia di ſapere, ſe la forza riproduttrice veniva ad eſaurirſi nella prima riproduzione: e trovai il contrario. Anzi alla ſeconda riproduzione tagliata ne ſuccedeva una terza, levata queſta ne ſottentrava una quarta, indi una quinta ecc. Nè ſolamente ſi ottenevano tali ſucceſſive riproduzioni levata via unicamente la porzione di mano in mano riprodotta, ma fatto il taglio la ſeconda volta entro la riproduzione prima, la terza entro la riproduzione ſeconda, la quarta entro la riproduzione terza, ecc. Quindi io veniva ad avere come una ſcala di riproduzioni unite al vecchio troncone, ſempre più giovani, più ſottili, e di colore a mano a mano più aperto.

Queſte riproduzioni di riproduzioni ſi ottenevano egualmente nella coda de' girini, e ciò che è più ſorprendente in quella delle ſalamandre, e nelle loro gambe, malgrado l'andar fornite queſte due qualità di membra di parti tanto fra loro diſſomiglianti. Se adunque la coda, e le quattro gambe riprodotte ſi ritagliavano ad una ſalamandra, rigermogliavano per la ſeconda volta altre quattro gambe, ed un' altra coda, e un tal giuoco ſi poteva tirare avanti per molto tempo. Di fatto nelle ſalamandre giovani, in cui la riproduzione è prontiſſima, nei meſi di Giugno, Luglio, ed Agoſto furono da me ottenute ſei ſucceſſive riproduzioni delle quattro gambe, oltre ſei riproduzioni della coda. E in una di queſte ſalamandre tra le oſſa della coda riprodotte, e quelle delle gambe, nei tre meſi accennati giunſi a contare 687 oſſa rifatte.

In virtù adunque di queſte riproduzioni di riproduzioni ne' lombrichi terreſtri, ne' girini, e nelle ſalamandre, fui voglioſo di ſapere, ſe altrettanto ſi otteneva dalle lumache. Il perchè avendone io mutilate diverſe, parte con la reciſion delle corna, parte con quella del capo, quando levato a metà, quando tolto per intiero, ſubito che queſte parti ſi erano rinnovate, io le recideva in quel ſito preciſamente, dove erano ſtate troncate le vecchie. Queſta ſeconda riproduzione non laſciò di averſi, e nella maniera ſteſſa con cui ſi era avuta la prima, e lo ſteſſo fu di una terza riproduzione, ma la morte ſopraggiunta alle lumache mi vietò ſpinger più oltre queſto curioſo genere di tentativi.

Per altro lo ſcioglimento di queſta queſtione me ne fece naſcere un' altra, e queſta fu, ſe l' eſaurimento nelle riproduzioni veniva in fine ad averſi, oppure ſe eſſo non ſuccedeva giammai, di modo che gli animali ſeguiſſero a riprodurre finchè ſeguivano a vivere. E queſto ſaggio di eſperienze poteva inſtituirſi per preferenza nelle ſalamandre, ſceltene delle più giovani, per eſſere queſto genere di amfibj e più facile a mutilarſi delle lumache, e di vita più dura, e di più agevole riproduzione. Ma mi è mancato l' ozio per queſti ultimi tentativi, i quali, ſe veniſſero da qualche ſperto Naturaliſta intrapreſi, non ſarebbero ſicuramente vuoti di utili conſeguenze, e potrebbero forſe valere un novel Capitolo di Fiſiologia.

In tutto il decorſo di queſta Memoria ho riferito i riſultati delle mie ſperienze, ſopprimendone quaſi ſempre i dettagli. Se aveſſi voluto eſporli partitamente, e come ſi trovano ſu' miei Giornali, nato ſarebbe un volume, non che una Memoria. Ma premeva a me troppo di cercar d' iſtruire il lettore, ſenza punto annojarlo per lunghi dettagliati racconti. Spero tuttavia di eſſermi procacciato tanta confidenza preſſo del Pubblico, per eſſer creduto. D' altronde preſſochè tutti queſti riſultati ho la compiacenza di vederli confermati da diverſi inſigni Naturaliſti, come apparirà da una ſeconda Memoria ſu la Riproduzione della teſta delle lumache, nella quale ſi darà un compendio degli ſcritti pubblicati a favore della mia ſcoperta , e nel tempo ſteſſo un altro di tutti quelli, per cui ſi è cercato d' impugnarla . I confermatori, a mia notizia , ſono i Signori *Turgot* , *Lavoiſier* , *Tenon* , *Heriſſant* , *Bonnet*, *Senebier*, *Schaeffer*, *Roos*, *Muller*, *Scarella*, *Troilo*, oltre a tre altri Italiani pubblici rinnomati Profeſſori di Notomia , i quali recentemente ripetute hanno queſte mie ſperienze, e trovate avendole veraciſſime, ſi affrettano di comunicarmene grazioſamente le loro Memorie. Gl' Impugnatori ſono i Signori *Murray* , *Wartel*, *Cotte*, *Bomare* , *Adanſon* , *Schroeter*, *Argenville*, *Preſciani*. In queſto ſecondo mio Scritto eſaminerò con filoſofica imparzialità quale ſia il valore di queſte impugnazioni, ſenza laſciar di peſare quale ſia il merito degl' Impugnatori. Io ſono ben lungi dal penſare che queſto mio ſcoprimento ſia per far epoca nella naturale Filoſofia. Piuttoſto potrebbe far epoca nella Storia dello ſpirito umano il vedere come in una eſperienza sì comoda , sì facile, quale ſi è quella di conſeguire la riproduzione del capo nelle lumache , fallita l' abbiano tanti Fiſici , e ciò che più ſorprende in un Secolo sì illuminato , sì cauto , e che ſembra eſſer quello delle Oſſervazioni, e delle Eſperienze, ſe d' altra parte non foſſe notiſſimo, che lo ſperimentare comunque è meſtiere di tutti , lo ſperimentare a dovere è ſempre ſtato, e ſarà ſempre di pochi.

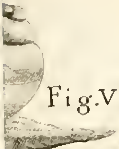


Fig.VIII

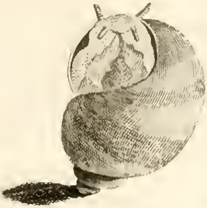


Fig.II

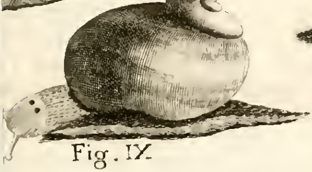


Fig. IX

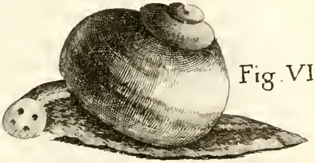


Fig.VI

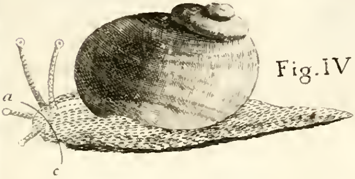


Fig.IV

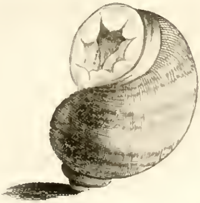


Fig.I

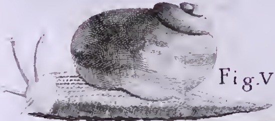


Fig. VIII

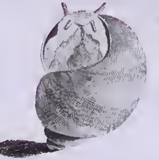


Fig. II

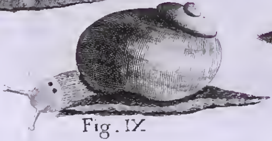


Fig. IX

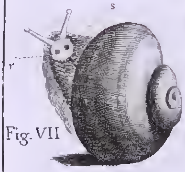


Fig. VII

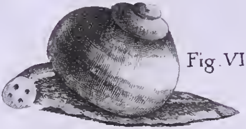


Fig. VI

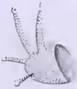


Fig. V

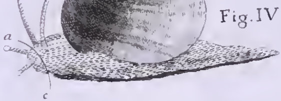


Fig. IV

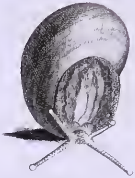


Fig. III

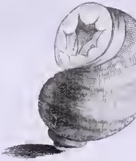


Fig. I

MEMORIA

INTORNO ALLA MAGGIOR PERFEZIONE

DELL' ARGANO

Del Sig. Ab. LEONARDO XIMENES Matematico
di S. A. R. il Granduca di Toſcana.

NOn vi è macchina più comune, e più ovvia dell' argano, del quale ſi fa uſo quotidiano nell' Architettura civile, nella Militare, e nella Nautica. Qualunque peſo conſiderabile, che debba elevarſi per decorare con ornato pietrame le fabbriche civili, qualunque reſiſtenza, che debba ſuperarſi per traſportare le macchine militari ancora per l' erto delle montagne, qualunque peſantiſſima áncora, che un vaſcello da guerra debba ritirare dal fondo del mare, in una parola qualunque operazione ſi faccia, che ſia di qualche rilievo, per tutto chiamaſi in ajuto l'energia dell' argano. L' importanza però di tale ordigno non corriſponde alla ſua perfezione. Pareva ben naturale, che già da gran tempo ſi foſſe ſtudiato da' Meccanici per condurlo alla ultima ſua perfezione. Ma egli è accaduto tutto al contrario, che le perſone di talento rivolte tutte alle più ſublimi teorie, hanno abbandonata sì importante macchina alle più baſſe maeſtranze, le quali col natural talento l' hanno condotta a quello ſtato, in cui eſſa ſi trova, non eſſendo eſſe capaci di conoſcere, ſe ſiano grandi, o piccole le ſue reſiſtenze, ſe vi ſia argomento di ſcemarle, e quali ſieno le maniere per un oggetto così rilevante.

Quando l'anno 1739. la *Reale Accademia delle Scienze di Parigi*, per lo zelo che eſſa fomenta non ſolo per le Scienze più ſublimi, ma ancora per le arti le più comunali, propoſe il premio in favore di chi *ritrovaſſe un Argano, il quale aveſſe il vantaggio dell' antico ſenza averne i difetti*. Ma non avendo trovato nelle Memorie, che le furono inviate, quelle condizioni, che eſſa eſiggeva, ſoſpeſe per allora il ſuo giudizio, e ripropoſe il premio doppio per l' anno 1741 per il medeſimo Problema. Fra le nuove Memorie, che in detto anno furono all' Accademia traſmeſſe, niuna in realtà potè ſoddisfare alle dotte mire della medeſima. Ma ritrovandoſi in eſſe delle nuove teorie, ed inſieme de' notabili miglioramenti nella macchina propoſta, fu ripartito il premio a quattro Memorie, e le altre tre furono pubblicate ſotto il titolo di *acceſſit*. Tanto è vero, che ancora negli ordigni più ſemplici, e più dozzinali s' incontrano graviſſime difficoltà per emendarli, e migliorarli, e che non ſervono gli ſtudj più indefeſſi di Meccanici accreditati.

La ragione, per cui queſta macchina ha ricevuto un aſſai mediocre miglioramento, conſiſte ſecondo il mio parere nel piccol progreſſo, che ha fatto dalla fine del paſſato ſecolo ſino agli anni correnti l'altra non meno importante ricerca intorno alle reſiſtenze degli attriti, alle quali ſono ſoggetti tutti i noſtri ſolidi. In qualunque modo ſi modifichi un argano, ſempre però dee con eſſo ſuperarſi non ſolo la reſiſtenza del grave peſo, che dee ſalire contro la direzione de' gravi, ma ancora quella degli attriti, che l' argano dee riſentire nell' elevare il detto peſo. Queſta eſtranea reſiſtenza ſi è ſempre valutata di $\frac{1}{3}$ del peſo da elevarſi. E qualche volta le circoſtanze ſon tali, che eſſa giugne ancora alla metà. Sicchè la forza motrice era deſtinata a ſuperare la metà di più della reſiſtenza della pura gravità. Anzi quando ancora la reſiſtenza ſemplice ſi ſupponeſſe di $\frac{1}{3}$ ſecondo il ſentimento del Sig. d' *Amontons* (*a*), reſterà però da aumentare la potenza non ſolo del terzo, ma di una ſerie di frazioni, che ſi eſporranno a ſuo luogo, per le quali poi alla fine la vera miſura della potenza eſſer doveva la metà di più, che non eſigeſſe il peſo del grave ſenza le reſiſtenze. Poichè per ſuperare quell' $\frac{1}{3}$ vi voleva una nuova forza, che è di $\frac{1}{9}$, e per ſuperare queſto $\frac{1}{9}$ ve ne voleva un' altra, che è di $\frac{1}{27}$, e così diſcorrendo all' infinito; indi è, che i cambiamenti immaginati in favore dell' argano, incontrando tutti così ſenſibili reſiſtenze, ſempre reſtava la potenza motrice ſoggetta ad eſſer troppo aggravata. Che ſe poi ſi voleſſe diminuire la detta reſiſtenza con aumentare aſſai la proporzione tra 'l vette dell' argano, ed il raggio del ſuo cilindro, allora potrebbe certamente alleggerirſi indefinitamente la potenza motrice; ma tale alleggerimento cagiona un nuovo inconveniente, che conſiſte nel gran conſumo del tempo, che allora ſarebbe neceſſario, giacchè ſempre tra' tempi e le potenze vi deve eſſere una determinata proporzione, dimoſtrandoſi nella Meccanica, che il viaggio del peſo reſiſtente al viaggio della potenza motrice ſtia come il valore di queſta al valore del peſo, cioè che ſtia il tempo al tempo, come il viaggio al viaggio, cioè come il valore al valore. Per il diſpendio delle operazioni meccaniche è la ſteſſa coſa, che un lavorante impieghi due ore di tempo per alzare un dato peſo, o per vincere una qualunque reſiſtenza, ovvero che due lavoranti ve ne conſumino un' ora ſola. E perciò l' aumentare la ragione del vette al ſemidiametro del cilindro non porta quel vantaggio, che alle prime apparenze ſi crederebbe.

Conveniva adunque alla ricerca dell' argano perfetto premetterne un' altra ſulle *minime reſiſtenze degli attriti*,

---

(*a*) *Memorie dell' Accademia Reale di Parigi* anno 1699.

ſenza di cui poco vantaggioſi ſempre ſaranno i concetti, e compenſi de' più valenti Meccanici.

Eſſendomi io applicato da tre anni in qua a fare gran numero di eſperienze appunto ſulla reſiſtenza degli attriti, ed avendo già ritrovato, che in alcune combinazioni di ſolido con ſolido, di ſuperficie con ſuperficie, di peſo con peſo, tali reſiſtenze potevano aſſaiſſimo diminuirſi, ſino a ridurle dalle centeſime 33 per cento alle ſole 3 centeſime, ed ancora aſſai meno (come ſi trova dimoſtrato in un mio Trattato ſu queſta materia); indi è che mi ſi è aperto così un campo per poter perfezionare aſſai più, che non è ſtato fatto fin' ora, la macchina dell' argano. Queſto è ciò, che io dimoſtrerò nella preſente Memoria. E per venirne a capo la dividerò in quattro parti.

La prima racchiuderà la deſcrizione dell' argano ordinario, ed il ſuo ſolito maneggio, cogl' inconvenienti che eſſo racchiude.

La ſeconda eſporrà la teoria di detto argano tanto ſenza la reſiſtenza degli attriti, quanto con la conſiderazione de' medeſimi.

Nella terza deſcriverò, come, ed in qual modo poſſa perfezionarſi l' argano in ciaſcuna ſua parte.

E nell' ultima dimoſtrerò, in qual modo nell' argano ridotto ſi tolgano gl' inconvenienti dell' ordinario, e quanto in eſſo ſi diminuiſcano le reſiſtenze degli attriti.

PARTE I.

Deſcrizione dell' argano ordinario, ſuo maneggio, ed inconvenienti che s' incontrano.

L' argano ordinario, ſe voglia riferirſi alle macchine ſemplici della Meccanica, può ridurſi alla macchina *del Vette*, ovvero all' altra chiamata *Axis in Peritrochio*. Eſſo conſiſte

conſiſte in tre parti, delle quali è compoſto, cioè della ſua caſſa, o caſtello *M*, *M*, *M*, (*fig. I*) il quale è fatto per reggere, e ſoſtenere le altre parti del ſuo *fuſo*, detto altrimenti *Albero AB*, e finalmente delle ſue *Manivelle GE*, *HF*.

Il fuſo ſi fa girare ſul ſuo pernio inferiore *Pp*, che ricavaſi dal medeſimo fuſo, aſſottigliandolo alquanto. Tal pernio è ricevuto da un concavo ſimile ricavato dalla panchetta inferiore *Hb*, e ſopra di eſſa ripoſa quel riſalto, che laſcia il pernio. La parte intermedia col fuſo racchiuſa tra le due panchette ſi fa di figura cilindrica *Bb*; alla medeſima ſi avvolge per due, o tre volte il canapo, che colla ſua eſtremità *D* va ad elevare il peſo propoſto, e nell'altra eſtremità *C* è ritenuto a ſtretta col fuſo, per mezzo di uno, o due lavoranti *Ll*. Eſſi devono fare una tal forza, che il canapo reſti ſempre obbligato al fuſo dell' argano colla vicendevole ſcabroſità del legno, e del canapo, giacchè ſe detto canapo giraſſe da sè attorno al fuſo, non ſarebbe poſſibile l'elevazione del dato peſo. Il collo dell'argano *Nn* ancor eſſo è cilindrico, ma di minor diametro del ſubbio, o del fuſo, giacchè deve eſſo girare ſul concavo formato nella panchetta ſuperiore *Oo*, colla quale eſercita i ſuoi attriti inſieme col pernio inferiore. Indi è, che tra 'l pernio ed il collo dell'argano formaſi la reſiſtenza relativa a' ſopraddetti attriti. Vi è finalmente la teſta dell'argano *Aa*, la quale ſi fa di forma quadrata, ed in eſſa ſi ſcavano due trafori pure quadrati per inſerirvi le manivelle *GB*, *HF* della ſteſſa figura, ma ſcantonata nelle quattro eſtremità per meglio adattarſi alle mani de' lavoranti.

La detta teſtata dee ſoſtener la forza di quattro, e più lavoranti, che operano col potente momento del lungo vette. Indi è, che eſſa va faſciata tanto nell'eſtremità ſuperiore, che inferiore di due cerchj di ferro di proporzionata groſſezza, affinchè eſſi ſoſtengano le forze de' lavoranti, i quali ſenza un tal ſoccorſo ſquarcerebbero ben preſto la teſtata dell'argano, che è indebolita per mezzo de' due nominati trafori.

Il legname tanto del caſtello, quanto del fuſo, e manivelle ſi adopera del più forte, che ſi trovi, come di noce, di quercia, di leccio, o altro ſomigliante.

Il maneggio dell'argano conſiſte nelle rivoluzioni delle manivelle, e del fuſo, giacchè rivolgendoſi le prime *G*, *H*, *E*, *F* obbligano il ſubbio a girare attorno al ſuo aſſe, ed eſſendo a queſto ſubbio riſtretto il canapo, eſſo pure dee rivolgerſi attorno al fuſo, e perciò accoſtandoſi ſempre il punto *D* all' argano quando ſia preponderante la forza motrice, dee tirare il peſo, o la reſiſtenza che dee ſuperarſi.

Un tal ſemplice maneggio ci preſenta gl' inconvenienti, che ſi ſoffrono in tal macchina. Poichè primieramente il canapo nell' atto, che gira, ſarà obbligato o a ſcendere verſo la panchetta inferiore, o a ſalire verſo la ſuperiore, ed in tal diſceſa, o ſalita, eſſo ben preſto ſi troverà a ſtretta con dette panchine, e così l'operazione reſterà tutta ſoſpeſa. Per continuarla adunque convien legare, o allacciare il canapo con funicelle addoſſo alle taglie o ſemplici, o doppie, e tale operazione diceſi in termine d'arte *ammagliare*. Così l'argano reſterà libero, e ſgravato, e perciò il canapo ſi fa o ſalire, o ſcendere ſecondo il biſogno, per ricominciare da capo l'operazione interrotta. Un tale interrompimento accaderà più, e più volte nelle lunghe operazioni, e perciò eſſe ſaranno ſempre aſſai ritardate non ſenza ſcapito dell'Erario o pubblico, o privato; giacchè mentre il pontajo va ad ammagliare, e ſoſpendere la forza dell'argano, gli altri operanti, che ſpeſſo ſono in buon numero, ſtanno aſpettando inutilmente.

Un tale inconveniente rendeſi ancora più ſenſibile nella Nautica, e ſpecialmente nell'operazione importantiſſima di ſalpar le ancore in un vaſcello da guerra. Poichè a tal ſine principalmente ſopra il primo ponte ſi coſtruiſce un argano ſortiſſimo, che ſi tiene nel ſecondo ponte per le operazioni meno rilevanti. Deveſi perciò ſoſpendere nell' argano doppio l' operazione di ſalpare un' ancora per elevare, o abbaſſare il canapo ſulla ſuperſicie cilindrica del ſubbio, per poi ricominciare l'operazione.

Ma eſſendo le gomene de' vaſcelli così groſſe, così rigide, e poco maneggevoli, che non è poſſibile il piegarle ſul fuſo dell' argano, ſi uſa il compenſo di un canapo ſecondario (*a*) che ſia pieghevole per avvolgerlo al ſubbio. Un tal canapo ſi lega alla gomena fuor del vaſcello, e le ſue cime ſi portano all' argano per avvolgerle al medeſimo. Così rivolgendoſi l' argano, la gomena per mezzo del canapo ſi trae verſo il vaſcello. Quando eſſa però è già pervenuta colla ſua legatura al bordo del medeſimo, allora è neceſſario ſciogliere il canapo, e volgere l' argano all' indietro, ed andare a far la ſeconda legatura in un punto inſeriore per continuare l' operazione. Indi è, che dopo più e più interrompimenti tanto per regolare il canapo ſul ſubbio, quanto per iſciogliere, e rilegare il canapo a' punti inferiori della gomena, ſi perde un tempo prezioſo, che qualche volta mette in pericolo il baſtimento.

Al primo inconveniente ſi aggiunge il ſecondo già accennato, che è quello delle eſtranee reſiſtenze degli attriti, le quali per le particolari circoſtanze ſono aſſai conſiderabili. Si mettono a contraſto le fibre longitudinali del legno colle traſverſali, come appunto ſuccede tanto ſul pernio, che nel collo dell' argano, e tal circoſtanza molto accreſce le reſiſtenze. Inoltre il cilindro dell' argano nella ſua baſe ſi ſa ſtriſciare attorno alla

---

(*a*) Il qual diceſi nella marina Franceſe *Tournevire*.

panchetta inferiore *Ff*, ſulla quale ripoſa, e queſti contatti ſono ſparſi per una notabil ſuperficie, che conſiſte in una faſcia circolare ben larga tra la panchetta ed il piede del ſubbio.

Il collo dell'argano *Ss* ancora eſſo ha una notabil ſuperficie, che viene a contatto contraſtando col concavo cilindrico eſcavato nel tavolone ſuperiore *Ss*

Ordinariamente i lavoranti collocati all'eſtremità delle leve *G*, *H*, *E*, *F* talmente ſi aggravano ſulle medeſime nell'atto, che girano, che producono una nuova reſiſtenza ſul pernio inferiore dell'argano, e ſu quella faſcia circolare.

Conſiderando tutte inſieme le eſtranee reſiſtenze degli attriti, eſſe ordinariamente oltrepaſſano la metà del peſo reſiſtente, ed aſſai ſpeſſo giungono a $\frac{3}{4}$ del medeſimo. Indi è, che eſſendo propoſto ad elevare coll'argano comune un peſo di libbre 4 mila, in realtà per le imperfezioni di eſſo, e del ſuo maneggio vi vuole una forza motrice equivalente a 6, ed a 7 mila libbre. Indi è, che la ſpeſa dell'operazione viene a ricreſcere nella ſteſſa proporzione del 4 al 7, e non di rado del 4 all'8.

Quantunque ſi poſſano dire eſtranei all'argano i bozzelli, e le taglie ſemplici, o doppie, pur nondimeno eſſe ſempre accompagnano il maneggio del medeſimo. Poichè la direzione del canapo dalla direzione orizzontale *DD* deve rivolgerſi alla ruſticale πP, deve poi paſſare per le taglie, dalle quali va a legarſi al dato peſo per elevarlo. Ora i bozzelli, e le taglie regolate ſecondo il ſolito, riſentono ancor eſſe una notabile reſiſtenza per i loro particolari attriti. E tal reſiſtenza unita a quella dell'argano comune aſſai ſpeſſo eſigge una potenza motrice più che doppia di quella, che occorrerebbe ſenza la giunta delle reſiſtenze. Sicchè in queſta parte la meccanica dell'Architettura rieſce aſſai difettoſa.

PARTE II.

Teoria dell' argano ordinario, tanto ſenza le reſiſtenze, che con includervi le medeſime.

Quanto è ſtato fin' ora eſpoſto generalmente, convien dimoſtrarlo colla teoria. Or queſta ſenza l' ipoteſi delle reſiſtenze è aſſai ſemplice. Poichè facciaſi, come il braccio della leva al ſemidiametro del ſubbio, così il peſo da elevarſi al quarto termine: queſto, come ſi ſa, ci rappreſenterà il valore della potenza per metterſi in equilibrio col peſo reſiſtente. Onde aggiungendo alla potenza qualche valore di più, eſſa ſarà in grado di elevare il peſo contro la direzione de' gravi. (*a*)

Per paſſare alla ſteſſa teoria nell' ipoteſi delle reſiſtenze degli attriti, ſi contentano alcuni di aggiungere alla potenza una ſua terza parte, ſupponendo col Sig. *Amontons*, che tal parte ſia quella, che compete a queſto genere di reſiſtenza.

Così ſe il dato peſo da elevarſi foſſe di libbre 4000, ed il braccio del vette al ſemidiametro del cilindro foſſe come il 20 : 1, facendo, come il 20 : 1 = 4000 al quarto termine, queſto ſarebbe di libbre 200, e tale eſſer dovrebbe la potenza motrice ſenza l' uſo delle reſiſtenze. Se adunque queſte equivalgono alla terza parte del peſo, vi vorrà per eſſe la terza parte di più della potenza motrice, cioè altre libbre *66. 66* centeſime. Onde la potenza accreſciuta per ſupplire alle reſiſtenze degli attriti eſſer dovrebbe di libbre 266. *66* centeſime.

Una tal teoria è erronea per due maniere. Primiera-

(*a*) Avvertaſi, che al ſemidiametro del ſubbio intendeſi aggiunto quello del canapo.

mente, perchè accreſciuta che ſia la reſiſtenza di quel terzo, eſſo genera la ſua particolar reſiſtenza, e queſta ne genera una terza, e poi la quarta, la quinta, all'infinito, come già è ſtato accennato.

Tutte queſte reſiſtenze formano una ſerie, la quale biſogna ſommare, e tal ſomma è quella, che dee aggiugnerſi alla potenza motrice. Sia il peſo da elevarſi $= P$, ſia la reſiſtenza $= a$. Onde ſarà $\frac{P}{a}$ il primo termine della reſiſtenza. A queſto devono aggiungerſi tutti gli altri $\frac{P}{a^2}$, $\frac{P}{a^3}$, $\frac{P}{a^4}$ ecc. Intorno a tal ſerie nel mio Trattato ſulle reſiſtenze degli attriti dimoſtraſi, che $\frac{P}{a-1}$ è uguale alla ſomma di tutti i termini decreſcenti all'infinito. Indi è, che facendo $a = 3$, ſarà $a - 1 = 2$. Onde la reſiſtenza degli attriti ſarà $= \frac{P}{2}$ cioè ſarà uguale alla metà del peſo da elevarſi.

Onde nell'ideato eſempio il valore della potenza ſarà non già di $266\,\frac{2}{3}$, ma bensì di 300 parti, o libbre.

Il ſecondo equivoco di quella teoria conſiſte in ciò, che la proporzione del vette al raggio del cilindro non è la ſteſſa, che quella del medeſimo vette al ſemidiametro del pernio, giacchè queſto ſi fa ſempre minore di quello del fuſo, o del cilindro. E dall'altra parte la reſiſtenza degli attriti ſi valuta ſul pernio, e ſul collo dell' argano, e non già ſul cilindro. Indi è, che dovendo diminuirſi la reſiſtenza, eſſa dee ſcemare nella ragione del vette al raggio del pernio, e non già a quella del cilindro. Sia adunque queſta ſeconda ragione come il 25:1 e facciaſi come il 25 : 1 = libbre 1333 al quarto termine, queſto ſarà di libbre 55, che aggiunte alla potenza fanno libbre 255, e non 266. E' ſtato adoperato il terzo termine dell' analogia di libbre 1333 ſupponendo la terza parte di libbre 4000.

Ma per correggere il primo errore deve adoprarſi $\frac{1}{2}$ P, cioè libbre 2000. Onde l' analogia ſomminiſtrerà per parte degli attriti l' aumento della potenza
di libbre 80. 80
e per il momento del peſo reſtano libbre 200
Onde la potenza colle reſiſtenze ſarà equivalente
a libbre . . . . 280.

Non è ſtata però ancora incluſa in queſto calcolo la particolar circoſtanza delle fibre del legno, che contraſtano ſcambievolmente. Non è ſtata conſiderata la ſuperficie di tanti contatti tanto nel piede, che nel collo dell' argano, per cui io credo che la reſiſtenza debba valutarſi non già di $\frac{1}{3}$ ma di $\frac{1}{2}$, e qualche coſa di più. Ora in tale ipoteſi la ſerie $\frac{P}{a-1}$ ſarà uguale a $\frac{P}{2-1}$ $= \frac{P}{1}$, cioè la reſiſtenza riferita al pernio dell' argano ſarà uguale al peſo da elevarſi, cioè alle libbre 4000. E diminuendole nella ragione del 25 : 1, ſi dedurrà la reſiſtenza riportata alla potenza di libbre 150, che unite al valore della potenza ſemplice di libbre 200, forma la potenza totale colle reſiſtenze di libbre 350.

L' operazione dell' argano è affatto indiviſibile da quella di più pulegge, le quali per mezzo di un canapo rivolgono le direzioni del peſo traente. E quantunque le reſiſtenze di tali pulegge ſieno eſtranee a quelle dell' argano, pure eſſe ne ſono inſeparabili. Nella fig. I. oſſerviſi, che il canapo dal ſubbio dell' argano dee portarſi alla puleggia π, e per mezzo di eſſa dee ſalire alla ſeconda puleggia P, per la quale paſſando, dee diſcendere per attaccarſi al dato peſo PP'. Indi è, che la potenza motrice per ſuperare il peſo PP', elevandolo al punto deſtinato di una fabbrica, dee traſmettere la ſua azione prima per l' argano, e poi per le due pulegge π,P. Ma nell' operazione delle due pulegge incontraſi la ſua reſiſtenza, che ſarà bene rintracciarla per complemento della preſente materia.

Convien dunque oſſervare, che non ſolamente il peſo PP' è aggravato ſul pernio della puleggia P, ma la forza, colla quale il canapo opera dalla parte oppoſta, eguaglia almeno lo ſteſſo peſo. Indi è, che ſe il peſo PP' facciaſi di libbre 4000, il pernio almeno ſoſterrà il doppio di detto peſo. Ho detto *almeno*, perchè detto canapo non ſolo deve equilibrare il peſo PP', ma dee ancora ſuperare la reſiſtenza. Ma ſia per ora il carico del pernio di libbre 8000; e ſia ſecondo il conſueto la reſiſtenza di $\frac{1}{3}$ del peſo. Ma per le ragioni dianzi addotte invece di $\frac{P}{3}$ deve adoperarſi l'altra frazione $\frac{P}{2}$. Onde ſarà $\frac{8000}{2} = 4000$.

Dovendo adunque riportare una tal reſiſtenza dal pernio della puleggia alla ſua circonferenza, eſſa va diminuita, come ognun ſa, nella proporzione del di lei diametro al diametro del ſuo pernio. Secondo le comuni pulegge una tal proporzione rilevaſi, come il 5 : 1. Ma per favorire piuttoſto il caſo delle reſiſtenze, ci gioverà di adoperare la proporzione del 6 : 1. Ed in tale ipoteſi eſſa ſul giro della puleggia ſi troverà ridotta a libbre 666 $\frac{2}{3}$. Indi è, che il canapo $P\pi$, non ſolamente ſarà aggravato, e forzato colle date libbre 4000,
ma eziandio dalle altre libbre . . . . . . 666 $\frac{2}{3}$

Sicchè il totale ſarà equivalente a libbre 4666.66 cent. E con tal forza eſſo va a paſſare nella ſeconda puleggia π, avvolgendoſi in eſſa, non già per la ſua ſemiperiferia, come nella prima, ma bensì per un arco di quadrante.

Pertanto

Pertanto dovremo prima raddoppiare la predetta preſſione, e poi diminuirla nella ragione del diametro del cerchio alla corda del quadrante.

Raddoppiandola pertanto, eſſa ſarà di libbre 9333.33

Eſſendo proſſimamente la proporzione del diametro alla corda del quadrante come il 1000 : 707 proſſimamente, avremo la ſeguente analogia:

Come 1000 : 707 = 9333 . 33 al quarto termine. Queſto tornerà di libbre . . . . 6598 . 66 che proſſimamente può farſi ſenza error ſenſibile di libbre . . . . 6598 . 00

La cui metà ſarà di libbre . . . . 3299 . 00

Or ſupponendo di bel nuovo, che la proporzione della ſeconda puleggia a quella del pernio ſia come il 6 : 1, dividendo il ſopraddetto numero per il 6, avremo per la reſiſtenza della ſeconda puleggia libbre 549 . 5

Sicchè ſommando le reſiſtenze degli attriti col dato peſo da elevarſi ſarà

Reſiſtenza per la prima puleggia *P* lib.	666 . 66 cent.
Reſiſtenza per la ſeconda puleggia .	549 . 50
Valore del peſo da elevarſi	4000 . 00
Totale per la forza del canapo, che portaſi all' argano libbre	5216 . 16 cent.

Dal che deduceſi, che la potenza motrice applicata all' argano deve ſuperare libbre 1216 di più, che non ſarebbe per ſuperare il peſo PP', che ſi propone ad elevarſi.

Reſta ora a calcolare il valore della potenza motrice per ſuperare le due reſiſtenze del peſo, e degli attriti.

Ritornerà la ſerie già deſcritta $\frac{P}{a-1}$, la quale nel caſo preſente è uguale a $\frac{P}{2}$

Onde pigliando la metà della deſcritta ſomma, ed aggiungendola al totale, ſi formerà il valore del peſo, e degli attriti, che debbono vincerſi dalla potenza motrice.

Sarà dunque l' antecedente preſſione di libbre 5216, come più proſſima togliendo la frazione.

Sua metà 2608

Somma delle due partite 7824

Avvertaſi però, che non eſſendo uguale il pernio dell' argano al diametro del cilindro, per riportare le due reſiſtenze all'eſtremità della leva, converrà adoperare due diverſe proporzioni. La prima delle quali eſſer dee quella dianzi adoperata come il 20 : 1. Onde facciaſi

Come il 20 : 1 = 5216 al quarto termine, il quale ci tornerà di libbre . . . . 260 . 80

Per la ſeconda proporzione dee valere l' altra analogia come il 25 : 1 = 2608 al quarto termine . . . . , ... 104 . 32

Onde il vero valore della potenza ſarà di libbre . . . . 365 . 12 cent.

Quando ſenza le calcolate reſiſtenze eſſa era di libbre . . . . 200 . 00

Sicchè per le reſiſtenze ſi aumentano libbre . . . . 165 . 12

Per accoſtarci meglio alla ſolita proporzione degli argani, invece della parte venteſima, più ſi adatterebbe la parte decima, ed invece della parte venticinqueſima, la ſua metà cioè il $12\frac{1}{2}$ ſarebbe molto più al caſo. In tal nuova ipoteſi baſterà raddoppiar le partite.

E perciò il valore della potenza ſenza alcuna reſiſtenza eſſer dovrebbe di libbre . . . . . 400 . 00

Ed includendovi le due reſiſtenze delle pulegge, e quella dell' argano, la predetta potenza deve aſcendere al valore di libbre . . . . 730 . 24 cent.

Dal che comprendeſi, quanto di più la potenza deve aggravarſi per ſuperare le tre reſiſtenze degli attriti, cioè di due ſemplici pulegge, e del fuſo dell' argano, le quali importano libbre . . . . . 330 . 24 cent.

Troppo di più importerebbono, ſe invece delle ſemplici pulegge ſi adoperaſſero le taglie doppie, come aſſai ſpeſſo ſuccede.

Calcolo delle reſiſtenze dell' argano ſenza l' anneſſo delle pulegge.

Quantunque ſia inſeparabile l' uſo dell' argano da quello delle pulegge, pure per qualche rariſſimo caſo gioverà il calcolo delle reſiſtenze del ſolo argano. Il che ſi farà nelle ſteſſe ipoteſi già maneggiate.

Eſſendo adunque il peſo P di libbre 4000, ed eſſendo nel caſo preſente $\frac{P}{a-1} = \frac{1}{2}P$, è manifeſto, che la prima proporzione ſarà

Come 10 : 1 = 4000 al quarto termine, che importerà libbre . . . . 400. Ed
eſſendo la ſeconda proporzione, come 12 ½ :
1 = 200 al quarto, queſto ci tornerà di
libbre . . . . 160. Onde il valore della potenza eſſer dovrebbe lib. 560.

Nelle altre ipoteſi maneggiate ſul principio di queſto articolo la potenza è ſtata calcolata di lib. 266 $\frac{2}{3}$
Di libbre 255
E finalmente di lib. . . . . . 280, come potrà vederſi. Ma eſſendo doppie le proporzioni del vette al ſemidiametro del fuſo, ed a quelle del pernio, ſe in eſſe ſi ſoſtituiſce la prima come 10:1, e la ſeconda come 12 ½ : 1, allora il valore della potenza ne' tre caſi eſaminati ſarebbe doppio, e così

Nella prima ipoteſi ſarebbe di libbre . . 533 $\frac{1}{5}$
Nella ſeconda 510
E nella terza di libbre . . . . 560, che coincide coll' ultimo calcolo. Queſto è il più giuſto, correggendo la teorica. Onde ſempre ſarà notabiliſſima la reſiſtenza, che ſoffre l' argano, benchè ſi tralaſcino le reſiſtenze delle pulegge, che ſempre, o quaſi ſempre accompagnano le operazioni meccaniche.

Parte III.

In qual modo poſſa ridurſi, e perfezionarſi l' argano in ciaſcuna ſua parte per diminuirne le reſiſtenze.

Supponendo le reſiſtenze valutate di $\frac{1}{3}$ de' peſi aggravati ſecondo la regola comune, la Meccanica non ha compenſi per diminuire le reſiſtenze, ſe non che cambiando le proporzioni, che corrono tra 'l braccio della leva ed il ſemidiametro del cilindro, tra la ſteſſa leva ed il ſemidiametro del pernio, tra 'l diametro delle pulegge e quello de' loro pernj. La prima proporzione, come è ſtato avvertito, non può aumentarſi per il conſumo del tempo maggiore. Lo ſteſſo diceſi della ſeconda a motivo, che facendoſi il pernio dello ſteſſo legname del cilindro, con un minor diametro, ſe queſto ſi diminuiſca non reſiſterà alla violenza dell' argano, al quale aſſai ſpeſſo ſi applicano otto lavoranti. Suppongaſi il braccio della leva di pollici 60, cioè piedi 5 parigini; la ſua parte venticinqueſima non ſarà più di pollici 2 $\frac{2}{5}$. Onde il diametro ſarà di pollici 4 $\frac{4}{5}$, che certamente non può farſi minore ſenza il pericolo di ſtroncarſi nel più forte maneggio degli argani.

Per aumentare una tal proporzione, altro non reſterebbe, ſe non che formare il detto pernio di ferro, e farlo girare al di ſotto nel ſuo rallino di metallo, che così potrebbe farſi il diametro di pollici 2, ed il ſemidiametro di 1. Indi è che la reſiſtenza ſarebbe diminuita aſſai più di prima, cioè nella ragione del 60 : 1, e non già del 60: $2\frac{3}{5}$. Convien però riflettere, che non così può farſi al collo dell'argano, il quale dee reſtare nello ſteſſo fuſo di legname, e non può diminuirſi più del conſueto. E ſiccome in detto collo ſi appoggia ora la metà, ed ora quaſi tutto il peſo, come ſuccede quando il canapo è ſalito alla ſua eſtremità; indi è, che il vantaggio ſarebbe tenue, e la reſiſtenza ſarebbe varia nel ſalire, che fa il canapo dall' infimo al ſupremo punto del fuſto cilindrico. Quando tal canapo ſi trovaſſe nell'infima ſua rivoluzione, la reſiſtenza ſarebbe la minima, perchè il tutto quaſi ſi aggraverebbe al pernio di ferro; ma quando la rivoluzione ſaliſſe all' altezza maggiore, la reſiſtenza ſarebbe la maſſima, perchè ivi tutta la forza ſi appoggia al collo dell' argano, che reſterebbe come prima.

Potrebbono ancora aumentarſi le proporzioni delle pulegge, le quali potrebbono farſi come il 10 : 1 invece del 5 : 1. Ma convien conſiderare, che le pulegge devono eſſer maneggevoli, e di peſo mediocre, affinchè i pontaj poſſano traſportarle da un luogo all' altro, e maneggiarle con facilità. Se adunque una puleggia invece del diametro di pollici 5 lo aveſſe di 10, molto ſi accreſcerebbe il ſuo peſo unito a quello della ſua caſſa, che ancor eſſa deve aumentarſi.

Indi è che conſiderato il tutto, e conſideratolo ſecondo la pratica, poco profitto può ſperarſi dal modificare le accennate proporzioni, e troppo vi vuole per diminuire notabilmente il valore delle reſiſtenze calcolato nelle libbre 263.

Sul rifleſſo di tali ragioni io ho conchiuſo, che tutta l'induſtria meccanica debba impiegarſi nella diminuzione delle aſſolute reſiſtenze, le quali invece di eſſere del 33 per cento, ſi riducano al 10, all' 8, al 5 per cento. Per tale oggetto io ho intrapreſa una fatica di anni tre, ne' quali ho tanto variate le combinazioni de' noſtri ſolidi, che finalmente con qualche combinazione più felice mi è riuſcito di ridurre le reſiſtenze alle ſole tre centeſime, ed ancora meno, come ho accennato nell' introduzione.

Il riſultato delle mie lunghe eſperienze ſarà pubblicato in un Opuſcolo a parte ſu queſta materia. La più felice combinazione de' noſtri ſolidi ſi è quella, nella quale ſi metta a contraſto la ſuperficie del ferro pulito colla ſuperficie dell' olivo ſalvatico perfettamente ſtagionato, ma coll' untuoſità del ſego, o di ſimil altra materia. Indi è che la reſiſtenza, che io adopererò, non ſarà di $33\frac{1}{3}$ centeſime del peſo aggravato che ſia di libbre 100, ma bensì di ſole libbre 3

Da tal nuova proporzione naſce, che dato un qualunque peſo da elevarſi, o qualunque reſiſtenza da ſuperarſi, la reſiſtenza aſſoluta ſarà $= \frac{P}{33\frac{1}{3}}$. E ſiccome nella formola per ſupplire alla ſerie delle reſiſtenze deve toglierſi l' unità per eſſer la ſomma $= \frac{P}{a-1}$, indi è che facendoſi $a = 33\frac{1}{3}$ ſarà $\frac{P}{a-1} = \frac{P}{32\frac{1}{3}}$, e per abbondare in cautela ſi farà la ſerie $= \frac{P}{32}$. Da queſto primo aſpetto argomentaſi il vantaggio rilevante delle ſperimentate reſiſtenze, giacchè invece della formola $\frac{P}{2}$ ſi adopera ora l' altra formola $\frac{P}{32}$, cioè le reſiſtenze ſi riducono alla parte ſediceſima delle antiche, e comuni, in parità di circoſtanze.

Serve di aver premeſſo queſti nuovi Elementi delle reſiſtenze per poter comprendere le ragioni delle variazioni da me introdotte nell'argano. Gli effetti di tali mutazioni ſaranno poi dimoſtrati nell' ultima Parte.

Incominciando adunque a deſcrivere qual ſia la miglior forma dell' argano, quali i compenſi meccanici per renderlo più perfetto, eſſo vien rappreſentato dalla fig. II, nella quale potrà oſſervarſi in primo luogo, che il telajo inferiore *M*, *M*, *M*, *M*, il qual forma la pianta, e la baſe di queſta macchina, è ſtato da me tenuto di groſſezza, e ſtabilità maggiore del conſueto. In ſecondo luogo, che ho raddoppiato le coſce dell' argano *Ee*, *Ee*, *Ee*, *Ee*, le quali non ſolamente ſoſtengono l' argano dalla parte deſtra, ma eziandio dalla ſiniſtra, ricevendo nel centro, e non già da una parte, come è conſueto, il fuſo dell'argano *AB*. Tal cambiamento ho introdotto, per avere oſſervato, che nell' argano ordinario, quando il canapo ſi trova ne' punti ſuperiori del cilindro, come nel punto *K* (*fig. I*), allora la reſiſtenza del peſo da elevarſi, e degli attriti da ſuperarſi viene a roveſciar l' argano, il quale, come ſi ſa, verſo la parte oppoſta al peſo dee raccomandarſi, e fiſſarſi a certi paletti piantati in terra, affinchè reſti perfettamente immobile nell' operazione architettonica. Or tal' accidente non può mai ſuccedere nel nuovo argano della fig. II, giacchè eſſendo eſſo fiancheggiato tanto dalla parte anteriore *MM*, quanto dalla parte poſteriore *M'M'*, ne viene in conſeguenza, che eſſo non può reſtar mai ribaltato, e roveſciato da qualunque forza de' peſi da elevarſi. Vi è ancora l' altro comodo, che eſſo può rivoltarſi, come ſi vuole, mettendolo in azione o dall' una, o dall' altra parte.

La panchetta ſuperiore *CD* va formata di tutta ſtabilità, e di noce duriſſima, per tener fermi gl' incaſtri delle coſce *EE*.

Dovendo fare il fuſo dell' argano o di noce, o di quercia, o di altro legname forte, ho creduto neceſſario di diminuire la gran reſiſtenza, che fa il legname, quando contraſta con altro legname, faſciando con un liſcio cerchio di ferro la concavità della panchetta *CD*, ſulla quale deve aggirarſi il collo dell' argano in *aa*, avendo dalle mie nuove ſperienze rilevato, che il ferro liſcio combinato con legname forte, e con unto di materie graſſe, ſpecialmente di ſego, ſoffre piccoliſſima reſiſtenza. La minima di tutte ſi è quella del legname di ulivo ſalvatico, del quale potrebbe formarſi il fuſo dell' argano.

La medeſima cautela e diligenza va oſſervata nel pernio inferiore dell'argano *Uu*, il quale deve farſi poſare al di ſotto ſu di una lamiera di ferro, correggendo in queſto gli argani comuni, ne' quali vien traforata totalmente la panchetta inferiore *Oo*, facendo contraſtare ſulla ſuperficie della medeſima il labbro inferiore dell'argano *bb*. Oltre al pernio inferiore deve neceſſariamente la ſua ſuperficie laterale venire a contatto colla concavità cilindrica della panchetta; e perciò una tal concavità dee ſimilmente faſciarſi con cerchio ben limato di ferro, la cui altezza non oltrepaſſi la miſura di un pollice. Con tal coſtruzione l'orlo inferiore del fuſo contraſſegnato *bb* non può mai venire a contatto colla ſuperficie ſuperiore della panchetta *Oo*, ma il pernio *Uu* o deve poſare ſul piano inferiore della lamiera, o deve appoggiarſi ſul deſcritto cerchietto di ferro.

Allo ſteſſo modo la teſtata dell'argano per la parte ſua inferiore *mm* dee reſtar ſollevata ſopra il piano *CD* della panchetta ſuperiore; e così il collo dell' argano *aa* non dovrà riſentire altro ſoffregamento fuori di quello, che proviene dalla ſuperficie del cilindro appoggiata alla ſuperficie del cerchietto di ferro.

Per ovviare al graviſſimo inconveniente degli argani ordinarj, ne' quali, come è ſtato avvertito, il canapo deve ora ſcendere, ora ſalire ſul fuſo del medeſimo, obbligando così a ſoſpendere il lavoro per rimettere il canapo

napo ne' punti opportuni, mi è ſovvenuto il compenſo meccanico di faſciare il detto cilindro con una faſcia curvilinea di legname *Ff*, ſulla quale avvolgendoſi il detto canapo, eſſo ſcende, o ſale per una piccola altezza; ſulla quale poi non potendoſi ſoſtenere a motivo della curvità, che lo porta ſui pianetti molto inclinati, eſſo da sè medeſimo o ſale, o ſcende per rimetterſi ne' punti intermedj delle curve, e perciò ſenza mai ſoſpendere l' operazione meccanica, il canapo rimetteſi da sè medeſimo ne' medeſimi punti. Qualche volta, ſecondo le circoſtanze, gioverà d' ajutare lo ſteſſo canapo con un piccolo martello di legno, affinchè diſcenda più preſto, che ſia poſſibile.

La detta faſcia concava ſi rappreſenta nella figura II in maggior proporzione col titolo *curve del fuſo*. Di tali curve ſe ne formano otto, o dieci ſecondo il biſogno, e con eſſe ſi faſcia il fuſo cilindrico inchiodandole al medeſimo con chiodi acciecati nel legname, affinchè non facciano alcuna reſiſtenza, e non conſumino il canapo.

Sulla teſtata dell' argano ſegnata *A* ſi formano i due trafori quadrati, per i quali devono paſſare le due manivelle *Pp*, *Hh*, le quali devono eſſere di lunghezza tale, che i lavoranti girando attorno all' aſſe dell' argano poſſano facilmente ſcanſare il ſuo telajo *MM*, *MM*.

E quantunque la loro lunghezza poſſa giovare per ſollevare la potenza motrice, diminuendo così la ſpeſa di più lavoranti, contuttociò non dovremo eccedere in tal lunghezza, eſſendo coſa evidente, che quanto più eſſa ſi eſtende, tanto è maggiore il tempo, che eſigge il giro maggiore de' lavoranti, i quali ſi avanzano ſempre con paſſo uniforme. Conſiderando tutte le circoſtanze di queſta macchina, e di queſto lavoro, io ho rinvenuto coll' eſperienza, che la proporzione, che corre tra la lunghezza della leva ed il ſemidiametro del fuſo, ſul quale il canapo ſi avvolge, può tenerſi fra i due limiti della parte decima, o al più della quindiceſima, cioè il ſemidiametro del fuſo facciaſi di pollici 4, la lunghezza della leva *AH* potrà farſi di pollici 40, e potrà ancora farſi giugnere a pollici 60, che fanno piedi 5 parigini. Nel primo limite la potenza motrice ridurraſſi alla parte decima del peſo da elevarſi, colle ſue reſiſtenze, e nel ſecondo, e più alto limite detta potenza motrice ſarà di una parte quindiceſima.

Vero è, che nell' atto del lavoro non può oſſervarſi una preciſa proporzione, giacchè i lavoranti, quando ſon raddoppiati, operano con leve maggiori, o minori, ſecondo i diverſi punti delle manivelle, a' quali eſſi vanno applicando le loro mani, e non poſſono tutte riunirſi in un punto ſolo. Indi è, che per metterſi al ſicuro dell' impreſa, dovrà ſempre l' architetto formare il ſuo calcolo ſul vette minore, per non trovarſi deluſo nell' atto dell' operazione.

Laſcerò di deſcrivere minutamente alcune altre minori avvertenze, le quali ſaranno ben note agli architetti, e ſolamente riſolverò il dubbio, che potrebbe naſcere ſulla faſcia concava già deſcritta *Ff*.

Domandaſi adunque in qual punto del cilindro debba eſſa collocarſi, cioè, ſe torni bene di collocarla nel punto intermedio fra la panchetta inferiore e ſuperiore, ovvero in altro punto inferiore verſo *B*. Il punto intermedio gioverebbe per diſtribuire ugualmente le due reſiſtenze, la prima delle quali conſiſte nel pernio inferiore dell' argano, e la ſeconda nel collo ſuperiore *aa*. Poichè è notiſſimo per la Meccanica, che le due preſſioni reſtano in ragion reciproca delle diſtanze de' due punti del contatto dal punto della potenza. Così, ſe il canapo, ovvero la faſcia *Ff* ſi faceſſe ſalire ſull' eſtremità ſuperiore del cilindro addoſſo alla panchetta *CD*, allora la maſſima reſiſtenza la ſoffrirebbe il collo dell' argano *aa*, mentre la minima ſi porterebbe al pernio inferiore *bb*. E per converſo, ſe ſi faceſſe ſcendere la faſcia concava verſo il punto *B*, allora la maſſima reſiſtenza tornerebbe ſulla punta inferiore dell'argano, e la minima ſul collo ſuperiore.

In ordine al valore delle due reſiſtenze poco, o punto vi corre, ſe la faſcia ſi collocaſſe nel mezzo, ovvero ſe ſi portaſſe ne' due eſtremi punti, o ſuperiore, o inferiore. La giuſta ſoluzione di tal problema dipende dalla ſerie delle reſiſtenze reſpettive, delle quali ora non occorre ragionare: e perciò per riſolvere il preſente dubbio ſoggiugnerò ſolamente, che in pratica torna aſſai comodo, che detta faſcia ſia collocata piuttoſto verſo la parte inferiore *B*, e ciò a motivo, che i lavoranti nelle loro rivoluzioni attorno all' aſſe dell' argano poſſano più facilmente cavalcare il canapo *FQ* ſenza il minimo perdimento di tempo. Si ſa, che il canapo da una parte va verſo il primo calceſe, o puleggia π (*fig. I*). Onde queſta parte di canapo *DD* deve ſaltarſi da' lavoranti, che vanno attorno dell' argano. L' altra eſtremità oppoſta alla prima è ſoſtenuta da una potenza *Ll*, la quale tiene a ſtretta detto canapo, affinchè non giri liberamente ſul ſubbio, e perciò i lavoranti ſono obbligati a cavalcare ancora ſulla ſeconda eſtremità del canapo. Quando adunque queſto canapo ſi collocaſſe ad un' altezza notabile, i ſucceſſi, e continui ſalti de' lavoranti, tanto da una parte, che dall' altra verrebbero a ritardare il lavoro. Ma non così ſuccede, quando il canapo quaſi rade il terreno.

Ora riflettaſi, che nell' argano ordinario, ſalendo il canapo dal punto inferiore al ſuperiore, dovrà ſempre ſuccedere l' inconveniente del ritardamento, o almeno nelle maggiori altezze del canapo, e tale inconveniente pure ſi toglie nel nuovo argano, tenendo più baſſa la faſcia curvilinea.

Non laſcerò ancora di avvertire, che alcune volte il fuſo dell'argano rieſce di tal diametro, che in eſſo può eſcavarſi quella faſcia curvilinea, ſenza i riſalti de' regoli incurvati, i quali portano nella coſtruzione un lavoro più lungo.

Mi ſi domanderà finalmente di qual qualità, e natura eſſer poſſano quelle curve, dal cui rivolgimento vien generata la ſopraddetta faſcia. Riſponderò, che ſenza entrare in un eſame lungo, ed inutile potremo formare dette curve di archi circolari alquanto minori di un mezzo cerchio, come ſarebbe di gradi 140, o poco più, giacchè in tal graduazione s' incontrano ſempre tali inclinazioni, che baſtano per far ſalire, o diſcendere i canapi, che è l' unico oggetto di ſomigliante coſtruzione. Nel caſo preſente la ruvidezza della ſuperficie maggiore, o minore fa sì, che il canapo ſalga ora ad altezza maggiore, ed ora minore; ſempre però le ordinarie reſiſtenze ſon tali che quando il canapo dal vertice della curva è ſalito per gradi 50, ovvero 60, ricade da sè medeſimo, ritornando allo ſteſſo punto del vertice, e perciò eſſo non ſale giammai verſo i gradi 70.

Premeſſa adunque la nuova coſtruzione dell' argano, reſtano evidenti i ſuoi vantaggi ſopra l' argano comune, cioè

Primieramente, che le ſue reſiſtenze riduconſi alla parte ſediceſima, e ancor meno, delle reſiſtenze comuni.

Secondariamente, che non mai s' interrompe il lavoro per abbaſſare i canapi, ammagliando le taglie, come ſuccede nel metodo ordinario.

In terzo luogo, che eſſendo il fuſo dell' argano ſoſtenuto a deſtra, e ſiniſtra, ſi ſugge il pericolo che ſia roveſciato.

In quarto luogo, che reſtando il canapo aſſai baſſo preſſo il terreno, vien rimoſſo l' inconveniente de' ſalti de' lavoranti per cavalcarlo.

In quinto luogo, che eſſendo ſoſtenuto il pernio dell' argano ſul fondo della panchetta con laſtra di ferro ſi sfuggono così i gran contatti, che ſoffre l' argano comune, arrotandoſi, e ſtriſciando ſulla ſuperficie della panchetta inferiore.

L' altro inconveniente, che è tutto proprio dell' architettura navale per le groſſe gomene, che in eſſa ſi adoperano nella maggior parte delle operazioni nautiche, e ſpecialmente nel ſalpar le ancore, non pare che poſſa totalmente sfuggirſi, o rimediarſi, giacchè non eſſendo poſſibile, che la gomena per la ſua groſſezza, e ruvidezza ſi avvolga al fuſo dell' argano doppio, riuſcirà ſempre indiſpenſabile, che alla detta gomena ora ſi attacchi, ed ora ſi ſciolga quel canapo ſecondario, chiamato nella marina franceſe *Tournevire*, che nel noſtro volgare direbbeſi *gira e tira*. Indi è, che per tale inconveniente altro compenſo non potrebbe rinvenirſi, ſe non quello di facilitare, ed abbreviare l' operazione, che ſi fa di legare, e poi ſciogliere dalla gomena il canapo ſecondario. Ripenſando adunque a tal meccaniſmo, mi parrebbe, che poteſſe molto diminuirſi il tempo per via di due mezzi cilindri imperniati con opportune cerniere, e ſcavati al di dentro ſecondo le ſpire della gomena, i quali mezzi cilindri poteſſero facilmente aprirſi, o ſerrarſi per mezzo di due viti di ferro. Se adunque ſi fiſſaſſe il canapo ſecondario a' detti due mezzi cilindri, eſſi potrebbono traſportarſi da' punti ſuperiori a' punti inferiori della gomena con aprire ſolamente, o con ſerrare due viti di ferro. Il che certamente ſi ottiene in pochi ſecondi di tempo. Ma non così ſuccede nel metodo preſente, nel quale il canapo ſecondario deve prima legarſi alla gomena con funicelle dette comunemente *garzette*; e quando queſte colla gran forza ſi ſono fortemente annodate, convien poi diſcioglierle per rimetterle ne' punti inferiori della gomena, e continuare così l' operazione di ſalpar l' ancora.

Affinchè il mio meccaniſmo più chiaramente s' intenda, ſia nella fig. III la gomena AA', intendendo, che l'eſtremità *A* corriſponda al baſtimento, che ſalpa l'ancora, mentre l'altra eſtremità *A'* corriſponde all'ancora, che ſi giace ſul fondo del mare. Secondo il preſente metodo il canapo ſecondario legaſi alla gomena coll' uſo delle garzette, per eſempio, nel punto *m m'*, e ciò per fiſſare al detto punto il canapo ſecondario *m n*, *m' n'*, il quale colle due eſtremità *nn'* portaſi all'argano doppio del baſtimento. Or quando coll' operazione del medeſimo i punti *mm'* ſon già arrivati al bordo della nave, allora conviene ſciogliere la legatura, e poi riportarla di bel nuovo verſo la parte dell' ancora per far la ſeconda legatura, e la ſeconda operazione. Pertanto faccianſi due mezzi cilindri di forte legname *Cc*, *Bb*, nel mezzo de' quali, laſciandovi una ſufficiente groſſezza di legno, ſi eſcavino le ſpire concave *Pp*, *Pp* ecc. in modo tale, che la parte conveſſa della gomena poſſa combagiare colle ſpirali concave de' cilindri. Si adattino a' medeſimi in quattro ſtaffe di ferro non ſolamente le due cerniere *Hh*, ma eziandio i quattro braccioli *Dd*, *Ee*, in forma tale, che ne' due primi reſti eſcavata la madrevite, e ne' due ſecondi i maſchj della medeſima *Gg*, i quali abbiano la loro gruccia, o manico per ſerrargli con forza addoſſo a' due braccioli *Dd*. Se ora ſi concepiſca, che tal macchinetta ſi adatti alla gomena, faſciandola per mezzo delle cerniere *Hh*, e poi ſerrandola addoſſo colle due viti *Gg*, eſſa reſterà fortemente fiſſata addoſſo alla gomena ſenza poter traſcorrere a motivo delle ſpire, che reſtano ſerrate l'una coll' altra, cioè le parti concave colle reſpettive conveſſe. Attaccando pertanto a tal macchinetta il canapo *tournevire*, inſiem con eſſo potrebbe facilmente traſportarſi, e fermarſi nella gomena con un ſemplice giro della vite, che può allentarſi, e riſerrarſi in poche battute di polſo. Perciò detta macchinetta potrebbe acconciamente chiamarſi il *conduttor nautico*, non già conduttore di materie elettriche, o fulminee, come la moderna Fiſica va ſpeculando, ma bensì conduttor materiale della gomena, che con eſſo è traſportata dal fondo del mare nella nave. Queſto è uno de' compenſi per abbreviare notabilmente il tempo ben lungo, che nel metodo ordinario rendeſi neceſſario per ſalpare un' ancora. Forſe da tal meccaniſmo altri ne naſceranno più brevi, e più ſemplici; ma il preſente conduttore non mi pare nè molto lungo, nè molto compoſto. Sono ſempre neceſſarj de' tentativi, affinchè da eſſi riſulti il miglior meccaniſmo adattato al biſogno.

PARTE IV.

Che l' argano nuovamente ridotto tolga gl' inconvenienti dell' antico, e che in eſſo le reſiſtenze rieſcano tenuiſſime.

Da quanto è ſtato eſpoſto nella terza parte apparirà, che co' compenſi preſi vengano a toglierſi, o almeno diminuirſi notabilmente gl' inconvenienti, che incontra l' argano comune. L' eſpoſizione medeſima de' vantaggi dell' argano ridotto baſta per convincer tutti di tal verità. Onde per non dilungarmi di vantaggio ſolamente dimoſtrerò col calcolo quanto ſiano tenui le reſiſtenze, che reſterebbono nell' argano ridotto. E' ſtato accennato, che le reſiſtenze antiche a quelle del nuovo argano ſiano nella ragione del 16 : 1, cioè, che queſte ſiano ſedici volte minori. Il che naſce dalla formola $\frac{P}{a-1}$, la quale nell' argano comune è di $\frac{1}{2}$, e nell' argano ridotto è di $\frac{1}{32}$. Ma non così ſuccede in tutte le operazioni dell' argano, eſſendo diverſa tal proporzione, quando ſi aggiungono le taglie, o pulegge, che ſempre, o quaſi ſempre ſi adoperano. La teoria è la medeſima, che dianzi è ſtata maneggiata nella parte *II*, e ſolamente varia il valore della reſiſtenza. Onde ſarà

Calcolo delle reſiſtenze dell' argano ridotto ſecondo le nuove ſperienze includendovi le due pulegge.

Sia, come dianzi, il peſo *PP'* di libbre 4000. E' manifeſto per le ragioni addotte, che il pernio della puleggia *P* reſterà aggravato da una doppia preſſione, equivalente a libbre 8000. Per le nuove ſperienze eſſe dovranno dividerſi per 32, e perciò la reſiſtenza degli attriti del pernio di detta prima puleggia ſarà di libbre 250.

Ora riducendo queſta reſiſtenza alla circonferenza della puleggia, facciaſi, come il 6: 1 = 250 al quarto termine, che ſarà di libbre . . . . 41.33 centeſime.

Paſſando pertanto l' energia del peſo unita a quella della reſiſtenza alla ſeconda puleggia π eſſa ſarà di libbre . . . . 4041.33 centeſime, e tal forza dee raddoppiarſi per avere la vera preſſione della ſeconda puleggia, la quale ſarà di libbre 8082.66 centeſime. Ancor queſta preſſione, per dedurre la reſiſtenza, dee dividerſi per il ſolito diviſore 32, e così reſteranno libbre 252.60.

Ma perchè nella ſeconda puleggia π il canapo paſſa ſoltanto per un arco di quadrante, e non già per la mezza circonferenza, come già è ſtato avvertito; perciò il detto valore dovrà diminuirſi per le dimoſtrazioni del mio Trattato ſulle reſiſtenze nella ragione del 1000:707 proſſimamente, e con tal diminuzione reſteranno libbre . . . . 178. 58 centeſime.

Queſte debbono di bel nuovo diminuirſi nella ragione del 6:1 per riportare la reſiſtenza dal pernio alla circonferenza della puleggia, e perciò reſterà finalmente la reſiſtenza di libbre . . . . 29.76 centeſime.

Ora aggiungendo tal reſiſtenza al valore di libbre . . . . : . . . . 4041. 33.

avremo la forza del canapo *DD* di libb. 4071. 09 cent.

Queſta

Queſta è la totale reſiſtenza, che l'argano, o la potenza al medeſimo applicata deve ſuperare.

Eſſa nel caſo preſente non va raddoppiata, come nelle pulegge, giacchè intendeſi il canapo come fiſſo nello ſteſſo cilindro. Ma dee ſoltanto dividerſi per il conſueto diviſore 32, e ne riſulteranno libbre 127.18 centeſime.

Una tal reſiſtenza conſiderata finora al pernio, o collo dell'argano, deve riportarſi alla potenza motrice per il momento della leva, di cui eſſa è fornita, e perciò ritenendo la proporzione dell'ultimo eſempio, nel quale il braccio della leva ſi è fatto al ſemidiametro del pernio, come il 12 ½ : 1, eſſa ci tornerà di lib. 10.17 cent.

Ma eſſendo ſtata calcolata la reſiſtenza da ſuperarſi dell' argano colla ſua potenza di libbre . . . 4071.09 cent.
dividendo tal numero per il 10. ſecondo la proporzione adoprata tra la lunghezza della leva ed il ſemidiametro del fuſo, ci torneranno libbre . . . . 407.10 cent.
Alle quali aggiungendo le dette libbre 10.18
otterremo tutto il valore della potenza motrice per elevare il peſo, e ſuperare le tre reſiſtenze di libbre . . . . 417.28 cent.

Dal che ne viene in conſeguenza, che nell'argano ridotto ſecondo le mie ſperienze la potenza motrice non è aggravata, ſe non che di libbre 17. 28 centeſime di più di quello, che ſarebbe, diſtruggendo affatto tutte le reſiſtenze.

Volendo ora paragonare le reſiſtenze del vecchio argano a quelle dell'argano ridotto, baſterà ripigliare il numero della ſeconda parte, che è di libbre 730. 92 centeſime, delle quali le libbre 400 appartengono alla potenza nell'ipoteſi, che manchino le reſiſtenze, e le altre libbre 330. 92 centeſime ci eſprimono le pure reſiſtenze. Indi è che nella preſente combinazione dell'argano con due ſemplici pulegge, la prima reſiſtenza dell' argano antico ſta alla ſeconda dell' argano ridotto, come il numero 330. 92 ианteſime al numero 17. 28, cioè come il numero 191 al 10, vale a dire, che le nuove reſiſtenze dell' argano ridotto ſiano circa una parte decima nona delle antiche reſiſtenze riſpetto alla combinazione conſiderata nel preſente calcolo.

Calcolo della potenza motrice eſcludendo l' uſo delle due pulegge.

Volendo conſiderare le reſiſtenze dell' argano ridotto ſenza l' operazione delle due pulegge, allora il peſo di libbre 400 deve immediatamente dividerſi per $a-1$, che nel preſente caſo è di parti 32. Onde avremo per la detta diviſione libbre . . . . 125 . 00
che diviſe per $12\frac{1}{2}$ ci ſomminiſtrano lib. 10 . 00
alle quali aggiungendo le ſolite libbre . . 400 . 00
verremo in chiaro del valore della potenza, che ſarà di libbre 410. 00
cioè libbre 10 di più, che non accaderebbe diſtruggendo qualunque ſorte di attrito.

Nella medeſima ipoteſi la reſiſtenza degli argani ordinarj è ſtata calcolata nella ſeconda parte di libbre 160; e perciò la reſiſtenza dell' argano ſarebbe nel preſente caſo una parte ſediceſima dell' argano comune, come eſſere deve a motivo del diviſore $a-1$, che come è ſtato detto è 16 volte maggiore nell' argano comune riſpetto all' argano ridotto.

Per maggior facilità aggiungerò il ſeguente riſtretto, affinchè in un' occhiata ſi veggano le differenze delle diverſe ipoteſi, e de' due argani inſieme paragonati.

Riſtretto delle diverſe potenze motrici di un argano, col quale debba elevarſi un peſo di libbre 4000. *in diverſe ipoteſi.*

Prima ipoteſi, che non vi ſia alcuna reſiſten-

za, e che il braccio della leva ſia al ſemidiametro del fuſo dell' argano nella ragione del 10: 1; potenza motrice libbre	400.00
Seconda ipoteſi dell' argano comune con due pulegge, ſecondo le diverſe proporzioni del calcolo colle antiche reſiſtenze	730.31
Terza ipoteſi delle nuove reſiſtenze con due pulegge, e ſecondo le ſteſſe proporzioni; potenza motrice	417.28
Quarta ipoteſi coll' argano ſenza pulegge, ſecondo le antiche reſiſtenze	560.00
Quinta ipoteſi dell' argano ſenza pulegge, ſecondo le nuove reſiſtenze; potenza motrice . .	410.00

Formola analitica per lo ſteſſo calcolo.

Reſta ora, che con qualche formola analitica ſi poſſa abbreviare la teſſitura del calcolo, giacchè eſſa rappreſentando tutte le ipoteſi ci ſomminiſtra una maggior facilità, perchè allora altro non occorrerà, ſe non che applicare le altre ipoteſi, che ſi voleſſero, ſoſtituendo i nuovi numeri alle eſpreſſioni delle lettere.

Calcolo analitico delle reſiſtenze.

Il peſo, che deve elevarſi dicaſi $= P$, la frazione ſarà $= \frac{P}{a}$, che rappreſenta la reſiſtenza aſſoluta. Onde la ſerie delle reſiſtenze ne' caſi, in cui conviene, ſarà $= \frac{P}{a-1}$

La prima puleggia avrà la reſiſtenza $= \frac{2P}{a-1}$. Convien raddoppiare il valore di P, perchè il pernio è aggravato dal canapo dall' una parte, e dall' altra. Sia il diametro della puleggia a quello del pernio come $D : d$.

Onde la reſiſtenza riportata alla prima puleggia ſarà $= \frac{2\,d\,P}{D(a-1)}$

Paſſando alla ſeconda puleggia, eſſa ſarà aggravata da $2\,P + \frac{4\,d\,P}{D(a-1)}$. Giacchè ancor eſſa riſente il carico dall' una parte, e dall' altra. Per avere la ſua reſiſtenza convien prima moltiplicarla per la ſteſſa frazione $\frac{1}{a-1}$, e ſarà $\frac{2\,P}{a-1} + \frac{4\,P\,d}{D(a-1)^2}$

Ma perchè nel caſo della ſeconda puleggia il canapo reſta ſolamente a contatto col ſemplice quadrante della rotella, convien di bel nuovo diminuirla nella proporzione del diametro al quadrante. Dicaſi tal proporzione come $\Delta : \delta$. Onde ſarà $= \frac{2\,P\,d\,\delta}{\Delta D(a-1)} + \frac{4\,P\,d^2\,\delta}{\Delta D^2(a-1)^2}$

Paſſando dunque il canapo dalle due pulegge all' argano, ſarà aggravato del peſo P, più la reſiſtenza delle due pulegge la quale ſi trasfonde inſieme col detto peſo. Onde l' argano ſarà aggravato dal valore

$$P + \frac{2\,P\,d\,\delta}{\Delta D(a-1)} + \frac{4\,P\,d^2\,\delta}{\Delta D^2(a-1)^2} + \frac{2\,d\,P}{D(a-1)}.$$

Per maggior brevità l' eſpreſſa formola facciaſi $= F$

E ſia la ragion del vette al ſemidiametro del ſubbio come $b : 1$

Sia pure la ragione dello ſteſſo vette al ſemidiametro del pernio dell' argano, e del ſuo collo, come $g : 1$

Onde volendo dedurre la potenza motrice, che dicaſi uguale a y, avremo la ſeguente equazione

$$\frac{F}{b} + \frac{F}{g(a-1)} = Y.$$

Per applicare la preſente formola a' caſi particolari, ſuppongaſi prima ſecondo le mie ſperienze $a-1=32$, e ſi laſcino le altre proporzioni, come ne' paſſati calcoli. Riducendo adunque in numeri la formola, ſarà

$$F=4000+\frac{8000}{6\times32}+\frac{8000\times707}{1000\times6\times32}+\frac{16000\times707}{1000\times36\times1024}.$$

Fatte le opportune diviſioni ſarà

Il primo termine . . . $=4000$
Secondo termine . . . $=41.66$
Terzo termine . . . . $=29.32$
Quarto termine . . . . $=0.11$
Somma ſarà di libbre 4071.09 centeſime $=F$

Onde ſarà $\frac{F}{h}=\frac{4071.09}{10}=407.109$ milleſime

Avremo $\frac{F}{g(a-1)}=\frac{4071.09}{400}$,

che ſarà uguale a libbre . . . . . 10.177. milleſime

Onde finalmente avremo $Y=417.286$. Un tal valore rieſce maggiore del calcolo
antecedente, che era libbre . . 417.28. centeſime

La piccola differenza di ſei parti milleſime naſce dalla maggior preciſione della formola, la quale racchiude più frazioni, che non è ſtato fatto nel primo calcolo.

Applicazione della ſteſſa formola nell' ipoteſi delle antiche reſiſtenze.

Con ugual facilità potrà applicarſi la medeſima formola alle antiche reſiſtenze, purchè ſolo ſi cambj il valore di $a-1$, che in queſto caſo ſarà $=2$. E perciò avremo

$$F=4000+\frac{8000}{6\times2}+\frac{8000\times707}{1000\times6\times2}+\frac{16000\times707}{1000\times36\times4}.$$

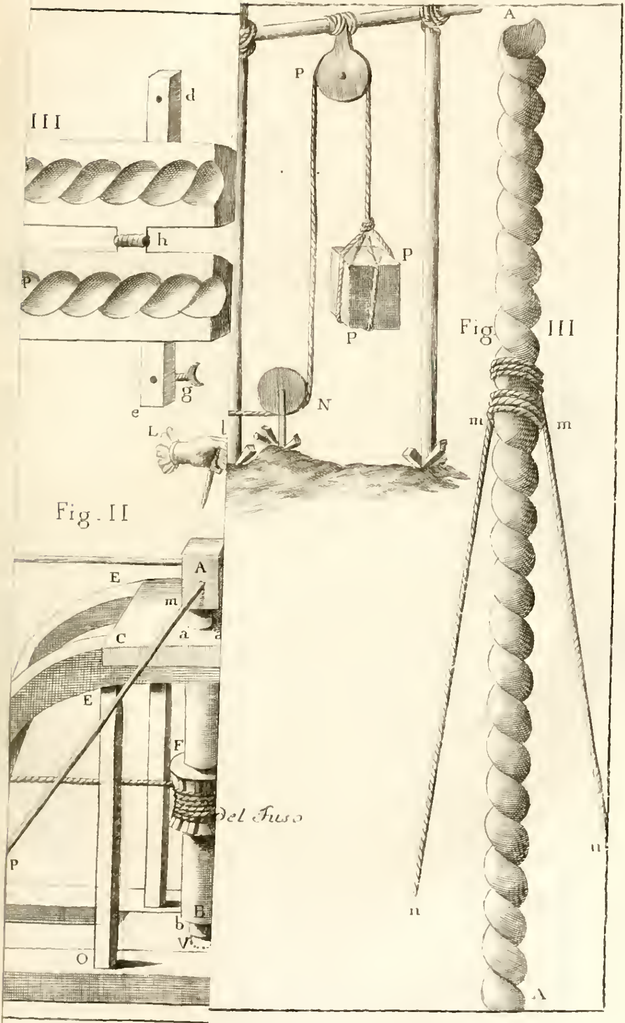
Onde ſarà $F=$ a' ſeguenti termini, cioè

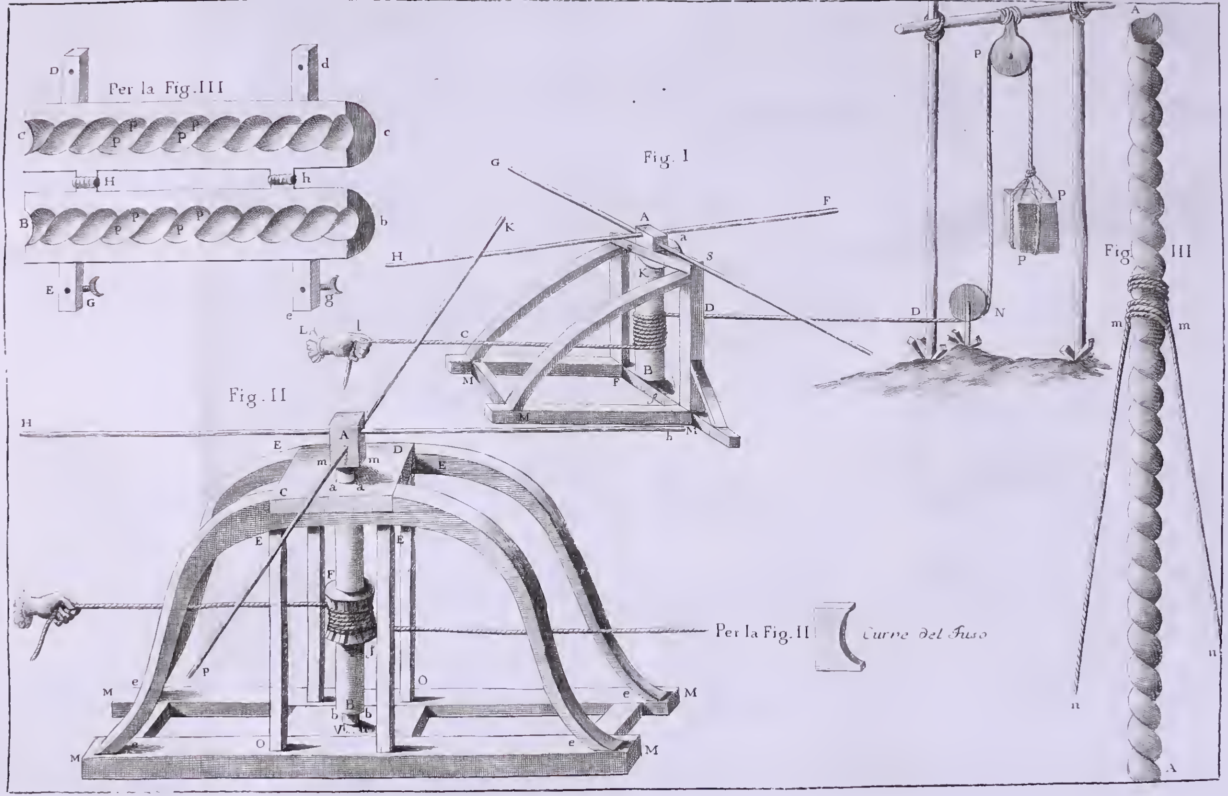
Termine I. = ... 4000
Termine II. = ... 666.66
Termine III. = ... 471.33
Termine IV. = ... 78.55
Valore di F = ... 5216.54 centeſime
Perciò ſarà $\frac{F}{h}$ = ... 521.654 milleſime
Sarà $\frac{F}{g(a-1)} = \frac{5216.54}{12.5 \times 2} =$ 208.660
Unendo l' antecedente termine . . . 521.654
Sarà Y = ... 730.314 milleſime

Confrontando il preſente reſultato con quello dell' antecedente calcolo alla Parte ſeconda, che è di libbre 730.24 . . . . 730.24, ſi troverà la piccola differenza di 7 parti centeſime, la qual naſce come dianzi, per eſſere ſtate traſcurate in detto primo calcolo alcune frazioni.

Per la qual coſa eſſendo ſtati dimoſtrati i vantaggi del nuovo argano, e particolarmente quello di aver ridotte le reſiſtenze degli attriti ad una quantità preſſochè inſenſibile, come quella che non giugne a libbre 18 in paragone delle libbre 330. proſſimamente delle antiche reſiſtenze, ora altro non reſta all'intelligente Architetto, ſe non che di fare eſeguire la coſtruzione di detto argano ſecondo i nuovi principj, adoperando per diminuire le reſiſtenze quelle combinazioni di materie, che ſono ſtate da me eſaminate, e propoſte.

E quando egli abbia così coſtituiti i ſuoi argani, le ſue pulegge, le ſue taglie, ed altri ordigni di queſto genere, allora il diſpendio delle ſue fabbriche in ordine alle operazioni, e numero de' manuali ſcemerà nella ſteſſa ragione, in cui diminuiſcono le reſiſtenze, computandovi i peſi aggravati, cioè la ſpeſa co' ſoliti argani al-


III
d
h
P
g
e
L
l
Fig. II
A
E
m
C
a
a
E
F
del Fuso
P
B
b
V
O
A
P
P
P
N
Fig. III
m
m
n
n
A


Per la Fig. III
D
d
c
c
P
P
P
P
H
h
B
b
P
P
P
P
E
G
e
g
Fig. I
G
F
A
a
H
S
K
D
C
L
l
M
F
B
f
M
M
h
P
P
P
P
N
D
Fig. II
H
A
E
m
m
D
E
a
a
C
E
E
F
f
p
M
e
O
B
b
b
V
u
O
M
e
M
e
M
Per la Fig. II
Curve del Fuso
Fig. III
A
m
m
n
n
A

la ſpeſa cogli argani ridotti ſarà come il numero 730 al 417 proſſimamente. E ſe ſi voleſſe aggiungere, che il contraſto di due legni rozzi, come ſono negli argani comuni, cagioni un attrito aſſai maggiore del terzo, ſi conchiuderà, che il diſpendio delle comuni reſiſtenze giunga quaſi al doppio di quello delle reſiſtenze trovate colle mie ſperienze.

Vero è, che non eſſendo ſtate ancora da me pubblicate le nuove ſperienze, le quali diminuiſcono le reſiſtenze degli attriti alle tre parti centeſime de' peſi aggravati, vi saranno delle perſone, che difficilmente ſi capaciteranno di così inſigne vantaggio in favore della Meccanica. Ma io ſpero che le mie lunghe, e reiterate ſperienze, le quali ſaranno ampiamente deſcritte nel mio Opuſcolo, rimuoveranno ogni qualunque dubbio ſu queſto importante ritrovato.

Io ſo, che tutti i Meccanici, che finora hanno ſcritto, altro non hanno fatto, che muovere de' dubbj ſulle diverſe teſſiture de' noſtri ſolidi, e ſulle diverſiſſime reſiſtenze, che indi debbono produrſi. Ma ſe con queſta incertezza di ſuperficie, e di ſcabroſità ſi ritrovano de' ſolidi, i quali combinati inſieme con alcune cautele, e diligenze ſomminiſtrano coſtantemente, ed in tutte le circoſtanze una tenuiſſima, e quaſi inſenſibile reſiſtenza, con queſto ſolo la Meccanica ſarà quell' acquiſto, che ſi deſidera, cioè che le reſiſtenze degli attriti rendanſi almeno ſedici volte minori, che non ſono a tenore delle ſperienze del Sig. *Amontons*, e di altri inſigni Scrittori.

In queſta Memoria io ho applicata la dottrina delle nuove reſiſtenze all'argano, ed alle pulegge, che lo accompagnano; ma ſarà facile di applicarla a tutte le altre macchine o ſemplici, o compoſte, che ſi mettono in opera nell' Architettura Civile, Militare, e Navale.

LETTERA

Del Sig. FELICE FONTANA Direttore del Real Muſeo
di Fiſica, e di Storia Naturale di Firenze
Al Sig. ADOLFO MURRAY Profeſſore d' Anatomia
a Upſal

Scritta il dì 20. di Ottobre 1781.

IN queſti giorni mi è capitato tra mano il ſecondo Tomo degli Opuſcoli Chimici del Cavalier *Bergman*. Gli ho letti con quel traſporto, con il quale aveva letti gli altri Opuſcoli del medeſimo Autore, che ſono nel primo Tomo; e mi ſon comparſi anche queſti degni della grande riputazione, che ſi è meritamente acquiſtata quel valentiſſimo Chimico. Quaſi tutto è originale quello, che ſorte dalla penna di quel grand' uomo; e vanno del pari la ſcelta delle eſperienze, la ſagacità nel ſarle, e l' eſattezza nelle conſeguenze. Credo che ſi poſſa dir di lui, per rapporto delle coſe chimiche, quel che diceva *Cicerone* della latinità di *Ceſare*. *Ineptis gratum fortaſſe fecit ... Sanos quidem homines a ſcribendo deterruit*, tanto pareva inimitabile nel tempo che era originale ed eccellente.

Ma fra le molte belliſſime verità, che c' inſegna quell' uomo illuſtre, trovo tre punti che principalmente anderebbero eſaminati nel più gran dettaglio. L' uno riſguarda la teoria del calore, e della formazione dell' aria deflogiſticata, con cui ſpiega egli le revivificazioni delle calci metalliche; la ſeconda la deflogiſticazione del ſangue ſopra le arie reſpirabili; la terza l' aria fiſſa dell' atmosfera, o dell' aria comune. Sono più anni, che travaglio ſopra le medeſime materie; ma il tempo, e le le mie occupazioni mi hanno fin qui impedito di pubblicare le mie eſperienze, che ſono numeroſiſſime, nè per ora ſono ancora in iſtato di farlo, almeno così ſubito.

Permettetemi però di ſtaccare dalla mia opera quello, che ho oſſervato ſopra i tre articoli accennati colla luſinga, che volendo voi comunicare le mie eſperienze all' illuſtre Chimico Svezzeſe, e voſtro amico, come io rilevo da queſto ſteſſo volume, dove parla del voſtro merito, e ſapere, il facciate pure liberamente; e vi aſſicuro, che non ho altro in viſta, che di eſſere illuminato, ſe ſono nell' errore, e di vedere ſtabilite le nuove teorie ſopra ragioni ſolide, ed inconcuſſe. Queſto è quello, che io devo aſpettare da un Filoſofo ingenuo, ed illuminato, come il Cavalier *Bergman*. Che ſe le mie eſperienze poſſono aver qualche forza ſul ſuo animo, neſſuno è più in iſtato di lui per darci una teoria più vera, e de' principj più certi non ſenza vantaggio della Chimica, e della Fiſica, che deve eſſere il ſolo ſcopo di chi ama la verità.

Le nuove opinioni del valente Chimico Svezzeſe ſono in origine le medeſime del famoſo *Scheel*, che ſi può chiamar lo ſcopritor degli acidi moderni, ma ſono più ſiſtematizzate nel primo, più eſteſe e corredate da nuove ragioni ed eſperienze. Elleno meritano un eſame particolare, ſi tratta dell' uſo più importante del polmone, ſi tratta dell' aria principio sì neceſſario alla vita, ſi tratta in fine delle funzioni più grandi dell' economia animale.

L' altra parte ha per oggetto le operazioni più delicate della Chimica moderna, cioè la natura, e la formazione delle arie non aſſorbibili dell' acqua, e la revivificazione delle calci metalliche, che tiene a tutta la Chimica.

Il nuovo ſiſtema roveſcia tutte le idee fin qui ricevute, ed è ſottilmente legato inſieme coi fatti, e coll' eſperienze le più ſeducenti , talchè non mi maraviglio punto, che ſia ſtato immaginato e ſoſtenuto nelle loro opere da quei valenti Chimici, e che faccia de' proſeliti anche appreſſo gli eſteri.

Il Sig. *Bergman* prova con diverſe eſperienze e ragioni, che la flogiſticazione dell' aria comune non ha luogo nel polmone , ma che anzi il polmone aſſorbe , e ſpoglia del ſuo flogiſto le arie , che s' introducono in quel viſcere col mezzo della reſpirazione; l' aria poi che rimane dopo quella funzione è aria ſpogliata del flogiſto ſecondo lui , al contrario di tutti gli altri Filoſofi moderni, che la credon ricca di quel principio.

Egli prova queſta ſua teoria colle ſeguenti ragioni , che meritano un eſame tutto particolare . Ha trovato per eſperienza che l' aria reſpirata dagli animali in vaſi chiuſi non è punto diminuita. La mancanza poi di $\frac{1}{500}$ d' aria, in cui laſciò morire un ſorcio, conviene attribuirſi (dice egli) al calore dell' animale, che deve averla fatta ſortire dal vaſo dove era ſituato ſul mercurio quando vi fu introdotto. E' già noto che il flogiſto diminuiſce le arie reſpirabili; onde è falſo, conchiude egli, che dal polmone eſca il flogiſto per unirſi all' aria comune.

Il Sig. *Bergman*, dopo di aver così ſoſtenuto che nella reſpirazione non ſi produce dal polmone flogiſto alcuno, cerca di provar per l' oppoſto, che l' aria, in cui ſi è laſciato ſpegnere un lume, non è ſenſibilmente alterata nella ſua bontà, benchè ſi trovi molto diminuita dal flogiſto eſcito del lume, che meſcolato coll' aria, e fatto calore ſorte attraverſo i pori del vetro , talchè l' aria pura ſorte allora dal vaſo unita al flogiſto ſotto forma di calore , e da queſto e non da altro ſi trova l' aria del vaſo diminuita. In queſt' aria un animale ci vive quaſi così bene che nell' aria comune di prima.

Ma una prova ancora più forte, perchè più diretta, egli la deduce da una ſua eſperienza particolare, e bella, che merita tutta la conſiderazione del Filoſofo. Quel valente uomo ſcoſſe del ſangue dentro di un vaſo ſul mercurio, in cui vi era aria comune, e trovò che l'aria non fu punto diminuita, benchè una candela non poteſſe più ardere in quell' aria. Non eſce adunque, dice egli, il flogiſto dal ſangue, ma piuttoſto il ſangue ne aſſorbe, e per queſto l'aria ſi trova peggiorata, cioè privata di flogiſto.

Finalmente egli portava una eſperienza di *Scheel* ſull'aria infiammabile, che egli ha voluto ripetere, ed è che l' aria infiammabile ſi reſpira impunemente dall' uomo per 20, e più volte dentro una veſcica, e dopo ſi trova incapace di più infiammarſi, o di laſciarvi arder un lume. Il che dimoſtra, dicono que' due valenti Chimici, che il polmone l' ha ſpogliata del ſuo natural flogiſto, tanto è contrario che quel viſcere ne abbia dato a quell' aria.

Al primo argomento io poſſo opporre 37 eſperienze, o riſultati fatti ſu i ſorci, 452 ſu i piccoli uccelli, e 179 ſu i minimi porchetti d' India, e minimi cunigli. Il riſultato delle eſperienze fatte ſopra de' ſorci è che tutti hanno diminuito l'aria comune ſul mercurio dentro vaſi, dove ſono morti, e che l' aria era diminuita da $\frac{1}{30}$ fino ad $\frac{1}{23}$ del totale. L'aria comune di cui mi ſervivo era dodici pollici. Sette uccelli hanno un poco accreſciuta l' aria, due altri non l'hanno nè creſciuta, nè diminuita ſenſibilmente; tutti gli altri poi l' hanno diminuita da $\frac{1}{30}$ fino ad $\frac{1}{21}$ in circa. Cinque porchi d'India hanno un poco aumentata l'aria, e così ancora han fatto tre cunigli, tutti gli altri l' han diminuita da $\frac{1}{27}$ fino ad $\frac{1}{9}$ incirca. In generale poi ho oſſervato, che le arie ſono tanto più diminuite, quanto più lungamente ſono ſtate reſpirate dagli animali. Nell'aria deflogiſticata le diminuzioni ſono moltiſſimo maggiori, e poſſono arrivare fino ad un quarto dell' aria primitiva, e più ancora. Non parlo dell' aria fiſſa, che ſi è formata in quelle eſperienze, ch'è molto più delle quantità diminuite, e ſpecialmente nell' aria deflogiſticata.

Nè deve parere ſtrano ſe qualche volta ſi trova in qualche caſo particolare l'aria piuttoſto accreſciuta, che diminuita, perchè quando l'animale viene chiuſo ne' vaſi ha dell' aria ne' ſuoi polmoni, e può eſſer coperto dai vaſi nel momento dell'inſpirazione, onde averne anche di più. Queſta aria polmonare può nelle diverſe circoſtanze dell' animale ſortir più e men dal polmone dopo morto l'animale, e meſcolarſi nell'aria del vaſo, e ſupplire alla diminuzione dell' aria ſeguita dal flogiſto polmonare, e fino parer d' eſſer creſciuta. Va conſiderata ancora l' aria che ſi attacca ai peli degli animali, ed alle piume degli uccelli, che non ſempre rieſce di ſtaccar tutta perſettamente, nè anco allora, che s' introducono ne' vaſi facendoli paſſare attraverſo il mercurio, che è il metodo da me oſſervato; e queſta mancanza d' attenzione può aver beniſſimo indotto in errore i Filoſofi Svezzeſi che non hanno fatto uſo di queſto metodo, almeno per quel che pare da' loro ſcritti. Per altro ſe ſi fanno le eſperienze ſull'acqua, e non ſul mercurio, le diminuzioni appariſcono anche maggiori a motivo dell' aria fiſſa, che viene aſſorbita allora dall' acqua. Non par dunque che ſi poſſa dubitare, dopo le numeroſe eſperienze da me fatte ſopra le arie reſpirabili, in cui ſi laſcian morire gli animali, che ſegue una vera diminuzione, e che in conſeguenza eſce dal polmone del flogiſto. E queſto ſerva per riſpondere alla prima difficoltà.

Trovo fra' miei fogli un gran numero d' eſperienze relative all' aria comune, in cui ſi è laſciato ſpegnere un lume ; e fra le molte eſperienze baſterà che ne accenni una, che mi par deciſiva, atteſe le cautele da me uſate, e queſt' una contiene il riſultato medio di tutte le altre conſimili, che non differiſcono fra loro.

Queſte mie eſperienze ſerviranno di riſpoſta alla ſeconda difficoltà.

Feci fare un piccolo foro alla eſtremità chiuſa di un cilindro di criſtallo lungo otto poll. largo due, e legai fortemente nell' alto, dove era il foro, una veſcica in modo che ſoffiando per la bocca oppoſta, ed aperta del cilindro potevano entrare nella viſcica otto in dieci pollici di aria. Galleggiava ritta una candelina minima di cera ſopra una gran vaſca di mercurio. La candelina non era fatta che di cinque fili molto ſottili, uno de' quali era tenuto un poco diſtante dagli altri, perchè la fiamma foſſe appena ſenſibile nel principio, e non ſi comunicaſſe nell' iſtante agli altri fili. Accendevo quel filo con un altro filo sì ſottile, che appena dava una fiamma ſenſibile, e lo faceva in un iſtante. Nel medeſimo momento copriva il candelino col cilindro, e l' immergeva di qualche pollice nella vaſca, ed allora la veſcica ſi diſtendeva, e gonfiava, che prima era vuota, e compreſa ſul foro del cilindro. Il candelino finiva di accenderſi tutto, e non ſortiva punto di aria dal cilindro per tutto il tempo, che durava a bruciare. Laſciata raffreddare ogni coſa miſurava l' aria del cilindro, e la trovai diminuita di $\frac{1}{30}$ o poco meno. Portata l' aria ſull' acqua, e ſcoſſa diminuì di nuovo di $\frac{1}{40}$. Provata allora coll' aria nitroſa dava 135, quando la comune dava 110. Miſi un calenzuolo in otto pollici cubici di queſt' aria, e ci viſſe minuti $5\frac{1}{2}$. Ne miſi un altro in altrettanta aria comune di paragone, e viſſe minuti ſette.

Quando ſi voleſſe ſupporre, che qualche poco di aria deve eſſerſi perduta nell' atto di coprire il candelino acceſo per l' azione del fuoco, converrebbe diminuire un poco il $\frac{1}{30}$, e forſe ridurlo ad $\frac{1}{40}$ o poco meno, che io non credo. Ma in tutte le ipoteſi, che ſi vorran fare, ſarà ſempre vero, che la diminuzione è piccoliſſima, onde non è poi maraviglia, che l' aria ſia peggiorata di sì poco, e che ſi poſſa ancor reſpirare dagli animali in tale ſtato. La pochiſſima aria fiſſa, che ſi è formata, è un nuovo argomento per aſſicurarci anche di più che ſi è ſchiuſo poco flogiſto dal candelino, e che in conſeguenza di poco deve anche eſſer peggiorata l' aria rinchiuſa. Io trovo qui come per tutto altrove, che l' aria reſta alterata in proporzione di quel ch' è diminuita.

E' vero che un lume vi ſi ſpegne, e che un animale ſeguita a vivere; ma queſto non prova altro, ſe io non erro, ſe non che l'aria, che laſcia vivere un animale, non può laſciar ardere un lume, e che un'aria infetta è più nociva alla fiamma, che alla vita animale, talchè non altro ſe ne può dedurre a parer mio, ſe non che la vita dell'animale non è una fiamma, non è un lume acceſo, e che la vita è più tenace della fiamma.

E' molto probabile, che i celebri Chimici Svezzeſi non ſi ſieno ſerviti del metodo della veſcica da me praticato, nè di qualche altro analogo ad eſſo, ma che abbiano coperto il candelino probabilmente molto maggiore del mio, e già acceſo molto prima col recipiente. In queſti caſi la diminuzione è aſſai più grande a motivo del calore, che rarefa l'aria avanti di coprirla col recipiente, ed eſce anche più dagli orli di eſſo, quando ſi fa uſo di piccoli recipienti, in cui ſi trova diminuita fino di $\frac{1}{4}$.

Non poſſo temere d' alcuno errore nella mia ſperienza atteſo la maniera di farla, ed eſſendo tale che con eſſa ſi sfuggono tutte le difficoltà, e circoſtanze, che poſſono renderla equivoca; e poi quella eſperienza è affatto conforme a moltiſſime altre da me fatte nelle medeſime circoſtanze.

Per riſpondere alla terza difficoltà, cioè del ſangue, che non diminuiſce le arie ſane, io accennerò qui in poche righe i riſultati di quattro eſperienze, che par che non ammettano alcuna riſpoſta. Introduſſi quattro pollici cubici di aria deflogiſticata dentro di un vaſo di vetro pieno di mercurio attraverſo del mercurio medeſimo, che era in una vaſca col vaſe roveſciato. Il mercurio era ſtato riſcaldato di prima fino al calor del ſangue umano, come ancora il vaſo. Riempii di ſangue ancor caldo una boccia calda capace di una libbra di acqua, il quale eſciva a torrenti dalle carotidi di un caſtrato; e riempiuta in modo, e coperto il collo con un dito, che non ſi vedeſſe bolla alcuna di aria nella boccia, e nel ſangue, lo introduſſi ſubito attraverſo il mercurio nel vaſo, dove era l'aria deflogiſticata. Scoſſi allora il vaſo ſul mercurio per tre minuti, e portato ſull'acqua ne ſeci ſortire tutta l'aria del vaſo, che era in bollicine minime, e difficili ad unirſi inſieme. Sparite le bollicine miſurai l'aria, e trovai che era diminuita di $\frac{1}{4}$ giuſto. Eſaminato la ſua bontà col mio Evaerometro ſecondo il mio metodo, trovai che dava coll'aria nitroſa cavata dal mercurio poco prima 70. 32. *66. 166.* quando prima di ſcuoterla col ſangue dava 70. 33. 23. 123. Era adunque peggiorata ſenſibilmente, e nel tempo ſteſſo diminuita.

Ripetei queſta eſperienza nelle medeſime circoſtanze di ſopra, ma ſenza ſcuotere punto il vaſo, e laſciai il ſangue così a contatto dell'aria per tre minuti. Cavata allora l'aria come ſopra, trovai che non era ſenſibilmente diminuita, e colla nitroſa diede 70. 32. 40. 120. Era adunque un poco peggiorata in bontà, benchè non diminuita ſenſibilmente, o pochiſſimo aſſai, ma era molto migliore, che nella prima eſperienza, dove fu ſcoſſa col ſangue.

Volli fare due altri ſperimenti nelle ſteſſe circoſtanze di ſopra, ma coll'aria comune. Nella prima di queſte due ultime eſperienze ſcoſſi l'aria comune col ſangue per tre minuti, e ritrovai che l'aria era diminuita di $\frac{1}{7}$. Trattata coll'aria nitroſa diede 126. quando l'aria comune prima di ſcuoterla col ſangue dava 111. Queſta aria era adunque diminuita, e fatta peggiore nel tempo ſteſſo.

Nella ſeconda eſperienza laſciai a contatto dell'aria il ſangue per tre minuti, ma ſenza ſcuoterlo punto. Cavata l'aria, che non trovai ſcemata, ma piuttoſto accreſciuta un poco, forſe di una bollicina, o due, coll'aria nitroſa diede 111. Queſta aria non era adunque nè diminuita, nè peggiorata.

Queſte quattro eſperienze, ſe io non erro, dimoſtrano chiaramente, che il ſangue può beniſſimo diminuir le arie reſpirabili, e renderle peggiori. E' vero che il ſangue della quarta eſperienza nè ha diminuita l'aria, nè l'ha peggiorata punto; ma convien riflettere, che l'aria non iſtette a contatto del ſangue, che tre ſoli minuti; e che non furono ſcoſſi i due fluidi inſieme, onde non ſi toccavano fra loro, che con due ſoli ſtrati ſottiliſſimi. Ed in fatti quando ſi ſcoſſero que' fluidi fra loro nella terza eſperienza, vi fu diminuzione di aria, e deterioramento di bontà, che forma una dimoſtrazione completa. Che ſe nella ſeconda eſperienza ci fu peggioramento di bontà ſenza diminuzione ſenſibile dell'aria deflogiſticata, non deve parere ſtrano, perchè la ſcala della bontà dell'aria nel mio ſtrumento, e col mio metodo è molto più ſenſibile di quel che foſſe il metodo praticato da me nel miſurare la diminuzione dell'aria prodotta dal flogiſto. Dove poi fu ſcoſſa l'aria deflogiſticata unitamente col ſangue, ſeguì maggior diminuzione

nuzione, e maggior deterioramento di bontà, che combina perfettamente con tutti gli effetti del flogiſto colle arie reſpirabili, e coll'aria puriſſima. Io non ſo concepire eſperimento, che ſi accoſti più allo ſtato naturale del ſangue, che paſſa per il polmone dell'animale vivente, di quelli da me riportati ſopra. Il paſſaggio del ſangue dai vaſi nel mercurio era fatto dentro due ſecondi o poco più. Il ſangue conſervava il ſuo calor naturale per tutti i tre minuti. Quando era ſcoſſo, moltiplicava i ſuoi contatti ſull'aria, come ſuccede appunto nel polmone, e nel breve tempo di tre minuti non ſi può credere che il ſangue perdeſſe nulla delle ſue qualità primitive.

Si obbietterà forſe che l'aria in una reſpirazione non ſta a contatto delle veſcichette polmonari, che quattro in cinque ſecondi, non già 20. o 30 volte di più, come nelle eſperienze fatte da me, e riportate ſopra; onde non eſſer maraviglia, ſe l'aria è poi diminuita notabilmente, e peggiorata. Ma ſi deve riflettere che una porzione dell'aria, che ſorte dal polmone nella eſpirazione, è aria in parte delle inſpirazioni fatte avanti. In ſecondo luogo, e queſta io credo la principal ragione, il ſangue nel polmone è diviſo, ſuddiviſo in infiniti vaſi ſempre minori, onde preſenta una immenſa ſuperficie all'aria inſpirata, la quale è parimente moltiſſimo diviſa, e diſteſa nelle innumerabili veſcichette polmonari: laonde i contatti fra il ſangue e l'aria nel polmone ſono incomparabilmente di più, che i contatti del ſangue, e dell'aria ſcoſſi inſieme dentro d'un vaſo ſul mercurio. Si aggiunga a tutto queſto la gran velocità, con cui ſcorſe il ſangue nel polmone; e ſi troverà che anche per queſta cagione gli effetti del ſangue polmonare ſull'aria inſpirata devono eſſer grandiſſimi, talchè non deve parerci punto ſtrano, che ſi trovi l'aria eſpirata ſenſibilmente diminuita, e peggiorata.

Una ricerca molto intereſſante rimane a farſi anche dopo le quattro eſperienze ſul ſangue e ſull' aria riportate di ſopra, ricerca che può avere la più grande influenza nell' economia animale, e che può moſtrare i veri uſi del polmone, viſcere tanto neceſſario alla vita. Conſiſte in ſaperſi ſe vi è alcuna nuova produzione di aria, oſſia accreſcimento di fluido elaſtico, quando l'aria è in contatto del ſangue.

L' aria delle quattro eſperienze di ſopra ſi è miſurata nell' acqua, e ſi è ſcoſſa in eſſa per liberarla dall' aria fiſſa ſe ſe ne foſſe trovata in quelle circoſtanze; e perchè le mie eſperienze procedeſſero con metodo io ho creduto di dover cominciare dal laſciar l' aria, ed il ſangue tranquilli dentro i vaſi, per oſſervar quello, che può il ſangue ſopra l' aria col ſolo ſuo contatto, e nel tempo ſteſſo ho cercato di miſurar l' aria ſul mercurio, e non ſull' acqua, come avevo fatto di prima. Mi ſon ſervito di aria deflogiſticata, perchè i riſultati foſſero maggiori, e meno equivoci. Nel far queſte eſperienze ſi richiede molta deſtrezza e abitudine nell' oſſervatore. Il ſangue ſi coagula poco dopo introdotto nel vaſo anche ſul mercurio caldo, onde rieſce poi difficile di cavarne tutta l' aria, come conviene, per miſurarla. Unitamente coll' aria tende ad eſcire il ſangue coagulato, che biſogna in qualche parte rompere, perchè eſca l' aria ſola; eſce in ogni modo coll' aria un poco di ſangue, o di ſiero roſſo ancora ſciolto. Io ſoglio mettere una rete di ferro fitta nel fondo del vaſo, dove è il ſangue dopo i tre minuti dell' eſperienza, per impedire che non eſcano le parti coagulate, e ricevo l' aria dentro d' un bicchiere pieno di mercurio, ed immerſo nella vaſca medeſima, dove è il vaſo, che contiene il ſangue, e l' aria. Fatto queſto immergo ſotto il mercurio delle carte ſucciantì, e ſottili, e ſo in modo, che reſtino private di quel poco di aria, che potevano avere attaccata in minime bollicine ſulla ſuperficie. Il peſo del mercurio, ed un leggier moto delle carte baſta per far tutto queſto. Fo allora paſſare queſte carte nel bicchiere, e tutto il ſangue, o umido roſſo reſta aſſorbito nel momento. Levate dal bicchiere le carte colla mano, reſta l' aria aſciutta, ed in iſtato di miſurarſi.

Introduſſi in un vaſo pieno di mercurio ſei poll. cub. di aria deflogiſticata della ſeguente bontà 75. 45. 35. 125. Il mercurio ed il vaſo avevano il grado del calor del ſangue.

Riempii di ſangue colante dall' animale la ſolita boccia prima riſcaldata, e lo feci paſſare nell' iſtante attraverſo il mercurio nel vaſo dell' aria. Lo tenni in queſto ſtato per tre minuti, e lo cavai nel modo accennato di ſopra, e lo miſurai eſattamente. L' aria era creſciuta di più di $\frac{1}{5}$. La portai allora ſull' acqua, e la agitai un poco per iſpogliarla di aria fiſſa, e l' aria ſcemò non ſolo del quinto, di cui era creſciuta, ma ancora di un ſettimo della prima ſua quantità. La ſua bontà era 78. 55. 125. 255. cioè molto peggiorata.

Queſto eſperimento dimoſtra, che il ſangue non ſolo peggiora la bontà dell' aria col puro contatto, e la diſpone ad eſſer diminuita ſull' acqua, come ſi è veduto ancora nelle altre eſperienze riportate di ſopra, ma di più accreſce il volume dell' aria primitiva almeno di $\frac{1}{5}$ d' aria fiſſa eſtranea, oltre un altro ſettimo della quantità primitiva, che ſi trova eſſere anch' eſſa aria fiſſa.

Queſti nuovi ed inaſpettati riſultati hanno di che ſorprendere il Fiſico, è vero, ma ſono affatto conformi ai moltiſſimi altri da me ſcoperti ſull' aria fiſſa, che ſi produce dagli animali chiuſi dentro vaſi di aria deflogiſticata a contatto del mercurio. Queſte mie eſperienze furono fatte a Londra nel 1778, e 1779; e prima a Parigi, e furon quelle che mi fece dire al mio Amico, e valente Filoſofo Sig. *Ingen-houtz* che dal polmone ſortiva dell' aria fiſſa, la qual mia opinione, come molte altre, è ſtata attaccata con ragionamenti puri e non con eſperienze.

Benchè queſto non ſia il luogo di dare alcun dettaglio di eſſe eſperienze ſopra queſta materia, eſſendo riſervate per un mio Trattato particolare *ſulla reſpirazione degli animali*; ciò non oſtante mi ſi permetterà qui di accennare un riſultato generale, perchè ſi vegga ſopra quali fondamenti io ho permeſſo che ſi avanzaſſe quella mia idea nell'Opera del mio Amico, e quanto è uniforme ai riſultati dell' eſperienze di ſopra fatte ſul ſangue. Queſto reſultato, che è cavato da più di 100 eſperimenti, tende a dimoſtrare che una parte dell' aria fiſſa, che ſi trova nei recipienti, in cui ſi ſono laſciati morir gli animali, ſi deve al polmone, e non già al ſolo flogiſto polmonare, come ſi è creduto fin ora. Il Sig. Cavalier *Landriani* celebre Profeſſor di Fiſica ſperimentale in Milano ha creduto di dovere impugnare la mia opinione dell' aria fiſſa, che ſorte dai polmoni, e che ſi uniſce all'aria inſpirata dagli animali; e l'ha fatto con alcune ſue particolari ragioni, che noi eſamineremo ſcorrendo, giacchè egli c' invita gentilmente a farlo. Mi ſi permetta che io porti le ſue medeſime parole per conſervare in tutta la ſua forza le difficoltà da lui propoſte. Alla pag. 76. 77 della ſua opera, che ha per titolo *Opuſcoli Fiſico-Chimici*. Milano 1781. ſcrive „ Nelle mie ricerche Fiſiche intorno alla ſalubrità dell' „ aria ho fatto oſſervare, che l'aria dopo d'eſſere paſ„ ſata per li polmoni intorbida l'acqua di calce, arroſ„ ſa la tintura di turneſole... in ſomma preſenta tutti „ quanti i fenomeni conoſciuti dell' aria fiſſa. E con„ chiuſi quindi che queſt' aria fiſſa era generata nella „ reſpirazione dal flogiſto, che perſpirando dai polmo„ ni ſi uniſce all' aria atmosferica, e la cangia in aria „ fiſſa nello ſteſſo modo, con cui l'aria atmosferica negli „ altri proceſſi flogiſticanti viene cangiata. Ma il Sig. „ Ab. *Fontana*, ſiccome almeno viene annunziato dal „ chiariſſimo Sig. *Ingen-houtz*, è d' opinione che queſt' „ aria fiſſa, di cui trovaſi caricata l' aria dopo eſſere

,, paſſata per i polmoni, non derivi dal flogiſto, che
,, ſi ſvolge da eſſi, e che unendoſi all'aria atmosferica
,, la cangia in aria fiſſa; ma pare che egli piuttoſto
,, inclini a credere che una gran quantità di aria fiſſa
,, ſia generata nel noſtro corpo, e che queſta eſca pei
,, polmoni nella reſpirazione. L' opinione d'un sì ec-
,, cellente Fiſiologo è per me tropo autorevole per
,, non farmi dubitare della mia opinione riguardo all'
,, origine di queſt' aria fiſſa polmonare; ma prima di
,, ſottoſcrivere alla ſua opinione vorrei che ſi rifletteſ-
,, ſe che nei fluidi animali, e ſegnatamente nel ſangue
,, non ſi trova una gran quantità di queſt' acido mo-
,, fetico, che ſi ſuppone eſalare dai polmoni. Inoltre
,, non ſi ſa intendere, come mai queſt' aria fiſſa poſſa
,, eſſere dai polmoni depoſitata nell' aria atmosferica,
,, perchè quando anche queſta eſiſteſſe nel ſangue, par-
,, rebbe ſempre ſtrano che lo abbandonaſſe per unirſi
,, all' aria atmosferica, colla quale ha pochiſſima affi-
,, nità: altronde ſiccome ogni volta che l' aria atmo-
,, sferica ſi flogiſtica, ſi genera ſempre molta aria fiſſa,
,, parrebbe che al flogiſticamento della reſpirazione at-
,, tribuire più che ad altro ſi doveſſe queſt' aria fiſſa
,, polmonare; tanto più che dovrebbe il volume dell'
,, aria reſpirata trovarſi creſciuto, e non diminuito, qua-
,, le ſi trova per l' addizione dell'aria fiſſa, che ſi ſup-
,, pone continuamente emanare dai polmoni. Ma il Sig.
,, Ab. *Fontana* avrà ſoddisfatto pienamente, e ſuperior-
,, mente a queſte rifleſſioni, ed attenderò dal medeſimo
,, gli opportuni riſchiaramenti circa queſto importante
,, articolo Fiſiologico.

Il Sig. *Landriani* fonda le ſue difficoltà ſopra queſto paſſo che egli cava dall' opera di M. *Ingen-houtz*. *Abbè Fontana found that an animal brething in either common or dephlogiſticated air renders it unfit for reſpiration by communicating to it a conſiderable portion of fixed* *air wich generated in our body and thrown out the lungs as excrementious.*

Io era a Londra nel 1779. quando comunicai al mio riſpettabile Amico M. *Ingen-houtz* il riſultato di diverſe mie eſperienze ſopra la reſpirazione degli animali, riſultato che egli inſerì nella ſua belliſſima opera intitolata *Experiments and obſervations upon vegetables.*

Il riſultato delle mie eſperienze ſi riduceva a provare, che non tutta l' aria fiſſa, che ſi trova nell' aria eſpirata dagli animali, era l' effetto del flogiſto polmonare, ma che una parte dell' aria fiſſa veniva dal polmone medeſimo.

Io non ho poi mai detto a M. *Ingen-houtz* in neſſun luogo, nè in neſſun tempo, che non ſi formi dell' aria fiſſa col mezzo del flogiſto polmonare in quelle mie eſperienze, che gli comunicai; ma bensì ho detto, che ſorte anche immediatamente dal polmone, e che ne ſorte in quantità, ſenza definire ſe ſia il quarto, l' ottavo, o più o meno, nè il paſſo citato del mio Amico dice diverſamente. Nè io ſo d' aver mai detto, o ſcritto che l' aria fiſſa, che ſorte dai polmoni, ſia generata dentro del corpo, potendo eſſa trovarſi beniſſimo nei cibi, e nel chilo.

Mi ſi obbietta inoltre dal Profeſſor milaneſe, che non ſi trova nel ſangue una gran quantità di aria fiſſa; ma quando ancora foſſe dimoſtrato da ſicure eſperienze, il che ſin ora non ſi è potuto fare per quanto a me pare, che ſi trovi pochiſſima aria fiſſa nel ſangue, o per meglio dire nel polmone, la pochiſſima che ſi concede potrebbe baſtare nel mio caſo, giacchè nell' eſperienze da me fatte l' animale non moriva ad un tratto, ma dopo un tempo conſiderabile; e ſi ſa che il ſangue, e gli altri umori ſcorrono nel polmone con gran velocità preſentando all' aria delle veſcichette una immenſa ſuperficie.

Si obbietta ancora dall' illuſtre Profeſſore, che pare ſtrano che l' aria fiſſa abbandoni il ſangue per unirſi all' aria dell' atmosfera, colla quale ha pochiſſima affinità. In queſta difficoltà ſi ſuppone, ſe io non m' inganno, che l' aria fiſſa non poſſa ſortir dai corpi in virtù della ſua propria forza, e delle ſue proprie qualità, ma ſolo per una forza eſterna; nulla di queſto ſi vede provato dal noſtro Profeſſore, ma bensì ſuppoſto.

L' aria fiſſa ſorte dai fluidi in mille caſi, ſenza che vi ſia biſogno di affinità alcuna, come tutte le eſperienze dimoſtrano. Se i cibi, ſe il chilo introduceſſero nella maſſa degli umori una più gran quantità di aria fiſſa, ch' eſſi non poſſono ritenere, l' aria fiſſa ſortirà a diſpetto delle non neceſſarie affinità, quando quei fluidi ſcorrono per i polmoni. Si ſeguita ad obbiettare, che quando ſi uniſce il flogiſto all' aria comune ſi genera aria fiſſa; e di qui ſi vuole inferire, che ſi debba piuttoſto attribuire l' aria fiſſa al flogiſto polmonare, che ad altro. Queſta rifleſſione fatta a propoſito dal noſtro illuſtre Autore è molto ragionevole, ma non ſempre quello, che pare più ragionevole, è ancora il più vero. Le mie eſperienze annichilano affatto quella difficoltà di veriſimiglianza, la quale porterebbe di più in ſul falſo, quando ſi voleſſe qui far vedere, che io abbia ſoſtenuto che tutta l' aria fiſſa deriva dal polmone, e nulla dal flogiſto.

Si ſeguita ad obbiettare dal Profeſſore contro di me, che dovrebbe il volume di aria reſpirata dagli animali trovarſi creſciuta, e non diminuita per l'addizione dell' aria fiſſa, che ſi ſuppone continuamente ſortire dal polmone, quando ſi oſſerva che è diminuita.

Io ho ſempre creduto, che quando due cagioni o principj tendono l' uno a diminuire una quantità l'altro ad aumentarla, tre caſi molto differenti foſſero poſſibili, e non già un ſolo, come qui ſi ſuppone dall' illuſtre Profeſſor milaneſe. Se per eſempio una fonte riceve continuamente dell' acqua, e ne perde continuamente, può l' acqua della vaſca creſcer ſempre, ſcemar ſempre, e può nè creſcere nè ſcemare.

Non ſo vedere adunque perchè poſſa continuamente emanare aria fiſſa dal polmone, e ciò non oſtante trovarſi diminuita l'aria inſpirata dal flogiſto del polmone.

Finiſco con rilevare, che l' ipoteſi che ſi abbraccia qui dal celebre Sig. *Landriani* ſulla precipitazione dell' aria fiſſa dall'aria comune, non è appoggiata che a dubbie eſperienze, ed inconcludenti; e che l' altra ipoteſi da lui abbracciata ſul flogiſto, che ſorte dal polmone, non comincia ad eſſer ſoſtenibile che dopo gli eſperimenti riportati da me contro la teoria de' Signori *Scheel*, e di *Bergman*, eſperimenti, che il Sig. *Landriani* non conoſceva ſicuramente quando egli adottò quelle due ipoteſi, come due verità di fatto, e come ſe foſſero ſtate dimoſtrate.

Il dotto Profeſſor milaneſe par che ſi applichi ſeriamente da qualche tempo in qua agli ſtudj Fiſiologici; e noi ci rallegriamo di cuore con lui, perchè molto deve ſperare la Fiſica dal ſuo talento, e dallo ſpirito di ricerca, e di analiſi che dimoſtra in queſte materie.

Io non avrei mai penſato a riſpondere a' ſuoi obbietti, ſe egli medeſimo non mi aveſſe, quaſi direi, gentilmente invitato a farlo; e ſe io non vedeſſi che tratto tratto egli ſi compiace nelle Opere, che va pubblicando, di onorare delle ſue difficoltà le mie particolari opinioni. Della qual coſa io devo ſapergli grado moltiſſimo, perchè così mi darà occaſione ſubito che avrò un poco d' ozio d' intraprendere un nuovo eſame delle coſe da me pubblicate, e da lui combattute, e di rigettarle, ſe falſe, o di confermarle, ſe vere con nuovi argomenti, e con nuove eſperienze. In queſta maniera la verità, e la ſcienza ne trarranno de' vantaggi reali, e il pubblico ci ſaprà grado delle noſtre comuni ricerche, e differenze di pareri.

Ma ritorniamo all'azione del polmone ſopra dell'aria

oſſia

oſſia per parlare con più di eſattezza, agli effetti del ſangue ſulle arie reſpirabili. Si è veduto a non poterne più dubitare, che il ſemplice contatto del ſangue coll'aria deflogiſticata è ſufficiente per peggiorarla anche dopo pochi minuti, e che il ſangue ſomminiſtra una gran quantità di aria fiſſa all' aria deflogiſticata. Si ſa poi d' altronde che il flogiſto in generale diminuiſce tutte le arie reſpirabili, e le diminuiſce tanto più quanto ſono migliori, e quanto ſono migliori tanto maggior quantità ſi trova di aria fiſſa dentro di eſſe.

Non dubito adunque nel caſo noſtro che il flogiſto del ſangue non abbia diminuito ſenſibilmente l' aria deflogiſticata. Ma ſiccome reſta ignota la quantità diminuita dal flogiſto, non è poſſibile di poter dire con eſattezza quanta aria fiſſa ſia ſortita dal ſangue, e meſcolata coll' aria in quelle mie eſperienze. Noi abbiamo trovato che era creſciuta ſul mercurio l' aria introdotta di $\frac{1}{5}$; onde ſi dovrà dire, che l'aria fiſſa ſortita dal polmone in tre minuti era certamente di $\frac{1}{5}$ almeno.

Queſti eſperimenti ſul ſangue per quanto mi pareſſero ſicuri non potevano però rendermi ancor tranquillo. Erano troppo pochi da una parte, e reſtava ancora da saperſi, ſe le altre arie erano aumentate, o no, ſul mercurio non ſolo a ſangue tranquillo, ma ancora a ſangue agitato. Mi pareva ancora che doveſſero eſſere importanti per la Fiſica le alterazioni, che potevano ſubire col ſangue le due arie flogiſticate, ed infiammabili; mi riſolvetti adunque di far le ſeguenti eſperienze.

La mia prima eſperienza fu ſopra l' aria deflogiſticata. Le doſi delle arie, e del ſangue ſono ſempre ſtate le medeſime di ſopra. L'aria deflogiſticata, di cui mi ſervii, dava colla nitroſa 75. 45. 35. 135. Agitai per tre minuti i due fluidi ſul mercurio, e trovai che l'aria era creſciuta ſul mercurio da 14 parti a 15 $\frac{1}{2}$. Scoſſa nell' acqua diminuì d' $\frac{1}{25}$ della prima quantità. Coll' aria nitroſa diede 80. 67. 175.

E' mirabile che queſt' aria a ſangue agitato ſia aumentata di meno, che a ſangue tranquillo; così merita attenzione il vedere che è diminuita di meno a ſcuoterla nell' acqua, che nelle antecedenti eſperienze, e nel tempo ſteſſo, che ſia ſtata di molto peggiorata.

Ma quello che pare innegabile è, che il ſangue accreſce la maſſa dell' aria deflogiſticata che gli ſta a contatto, o ſi ſcuota, o no, che queſto accreſcimento è aria fiſſa, e che vi è una vera diminuzione dell' aria primitiva, come ſi oſſerva dopo levata coll' acqua, e ſpogliata dell' aria fiſſa.

L' aria comune a ſolo contatto col ſangue crebbe ne' ſoliti tre minuti ſul mercurio da 14 parti a $\frac{1}{17}$. $\frac{1}{3}$. La ſcoſſi nell' acqua, ed il reſiduo era ancora $\frac{1}{14}$ di più della primitiva quantità. Colla nitroſa diede 116, quando quella di paragone dava 111.

Ripetei l' eſperienza ſcuotendo il ſangue coll' aria comune; ma una circoſtanza fece che non poteſſi oſſervare, ſe era creſciuta ſul mercurio. Scoſſa poi nell' acqua ſcemò quaſi di $\frac{1}{4}$. Colla nitroſa diede 135. Era adunque molto più peggiorata, che nell' eſperimento di ſopra. Ma nell' una, e nell' altra eſperienza ſi vede una produzione grande di aria fiſſa.

Paſſai all' aria infiammabile, che non era diminuibile dalla nitroſa, e la laſciai a contatto del ſangue per tre minuti. Crebbe ſul mercurio di quaſi $\frac{1}{14}$. Scoſſa nell' acqua ſi riduſſe a meno ſenſibilmente del primo volume di circa $\frac{1}{20}$ ſcarſo. Al lume arſe con eſploſione. Coll' aria nitroſa diede 185.

Ripetei l'eſperienza ſcuotendo il ſangue, e crebbe da 14 a 18 ½. Scoſſa poi nell' acqua ſi riduſſe a 14 ¾. Col lume fece eſploſione. Colla nitroſa diede 165.

Paſſai all' aria flogiſticata, che laſciai al contatto del mercurio, e che non era diminuita dall' aria nitroſa. Sul mercurio crebbe da 14 a 15. Scoſſa nell' acqua ſi riduſſe a poco meno del ſuo primo volume. Spenſe più volte un lume. Colla nitroſa diede 185.

Ripetei l'eſperienza coll' agitare il ſangue, ed appena crebbe l'aria quando fu ſul mercurio. Scoſſa nell' acqua diminuì quaſi di un ſeſto. Colla nitroſa diede 165.

Per riſpondere alla quarta difficoltà dell' aria infiammabile, che ſi reſpira impunemente, e che perde la ſua infiammabilità dopo reſpirata, io poſſo cominciare dall' aſſicurare appoggiato ad un immenſo numero di eſperienze, che l' aria infiammabile non è un veleno a reſpirarſi, come non lo è ancora l' aria flogiſticata a differenza dell' aria fiſſa, che deve conſiderarſi come veleno, e come un fluido malfacente capace di alterar di per sè l'economia animale, anche allora ch' è unita a molta aria comune, e fino a gran quantità di aria deflogiſticata la più pura, benchè il polmone poſſa ſcaricarſi di tutto il ſuo flogiſto liberamente. Tutte queſte nuove verità, e moltiſſime altre analoghe, ſono appoggiate ad un immenſo numero di eſperienze fatte da me ſopra la reſpirazione degli animali fin da quando era in Parigi, e che ho comunicato a' miei Amici di là, ed in Londra, e fra queſti ai Signori *Cavallo*, ed *Ingen-houtz*, ed al Sig. *Kirwan*, ſenza parlare del Sig. *Giovanni Fabroni*, che gli ha veduti tutti coi proprj occhi, ed ha voluto aſſiſtervi. L'aria infiammabile adunque va conſiderata come non aria, per rapporto agli uſi ordinarj del polmone. Laonde ſe nel polmone, dopo fatta l'eſpirazione, rimaneſſero ſoli 100 poll. cub. di aria comune, ſi potrà ſeguitare a reſpirarla rinſerrata in una veſcica, e ſervirà alle ſolite funzioni per qualche tempo, benchè un poco peggiorata. L'aria infiammabile di ſua natura innocente non può nuocere all'aria animale, nè può impedire, che il polmone non eſerciti le ſue ordinarie funzioni qualunque eſſe ſieno; che anzi può ſino eſſer utile in qualche maniera all'animale medeſimo, perchè può diſtribuire per tutti i bronchi, e per tutte le veſcichette polmonari l'aria comune, che nella noſtra ipoteſi era 100 poll. cub., e di cui il polmone non ſi vuota mai affatto, e gonfiarne le veſcichette come prima. Laddove la ſola aria comune non avrebbe potuto fare che men bene con danno dell'economia animale, giacchè ſi ſa che quando le veſcichette polmonari ſono flacide, e ſchiacciate, il ſangue è arreſtato almeno in parte, e la circolazione è nel più gran diſordine.

Per altro è poi certo, che dopo una fortiſſima, e violenta eſpirazione non ſi reſpira l'aria infiammabile, che per poco tempo, come l'ho fatto vedere in una mia Memoria pubblicata nelle Tranſazioni Anglicane ſopra di queſta materia, alla quale mi riporto intieramente. Devo però avvertire che quando io feci in Londra quella mia eſperienza, in cui non potei inſpirare che tre ſole volte l'aria infiammabile, io dovetti probabilmente impiegar molto tempo nel far quella violentiſſima eſpirazione che precedette l'eſperienza, e forſe ancora le tre inſpirazioni furono fatte da me con lentezza, giacchè ho trovato nel ripeter quell'eſperimento delle differenze ſenſibili, ed ho potuto reſpirar l'aria infiammabile ſino ſei in ſette volte. Ma tutto queſto ſempre più mi perſuade, che l'aria infiammabile non è nociva di ſua natura, e che va conſiderata come non aria. L'iſteſſe eſperienze ho fatto reſpirando l'aria flogiſticata, ed i riſultati ſono ſtati poco differenti. Talchè queſti riſultati, ed i moltiſſimi altri fatti ſugli animali chiuſi dentro vaſi colle arie reſpirabili pure, e colle medeſime meſcolate in diverſe quantità coll' aria infiammabile, flogiſticata, e fiſſa dimoſtrano l'aſſurdità di molte ipoteſi immaginate da' Fiſici moderni ſopra la morte degli animali nelle arie reſpirabili, e nelle arie non reſpirabili.

Conviene ancora riflettere che 20 reſpirazioni ſi fanno in meno aſſai di due minuti; onde non trovo punto ſtraordinario, che ſi poſſa reſpirar l' aria infiammabile per 20 volte impunemente, giacchè ſi può tenere il reſpiro per quaſi due minuti, volendo uſar gran forza, anche dopo ſeguita l'eſpirazione naturale.

Ho fatto diverſi eſperimenti ſopra la mia propria reſpirazione ne' differenti ſtati del polmone, ed ho potuto fiſſare i ſeguenti riſultati, che fanno molto a propoſito alla materia, che abbiamo fra le mani.

I.

Poſſo tener la reſpirazione per 60 ſecondi e più, dopo che il polmone ha fatto la ſua inſpirazione naturale.

II.

Poſſo tenerla per 48 ſecondi e più, dopo che il polmone ha fatto l' eſpirazione naturale.

III.

Poſſo tenerla per 37 ſecondi e più, dopo che ha fatto l' eſpirazione violenta.

IV.

Poſſo tenerla per 65 ſecondi e più, ſe il polmone è nell' inſpirazione violenta.

Si avverta che in un minuto ſi reſpira 16 in 18 volte. Si avverta che il più piccolo affanno può accelerar le reſpirazioni a ſegno di farne fino 25, e 30 per minuto, e per l'oppoſto in altri caſi le ritarda. Si avverta che i tempi indicati di ſopra variano ſecondo i differenti ſtati della noſtra macchina, e che le reſpirazioni ſi fanno molto lente verſo la fine.

Se nelle quattro eſperienze riportate di ſopra ſi fa paſſar l'aria, che ſi eſpira, dentro di una veſcica, e ſi continua a reſpirar quell' aria per mezzo di eſſa veſcica, cangiano ſenſibilmente i tempi fiſſati di ſopra, e ſi reſpira per più tempo.

Nella prima eſperienza ſi arriva a reſpirar l'aria per 70 ſecondi e più.

Nella ſeconda, e terza eſperienza ſi dura parimente un tempo più lungo.

Nella quarta eſperienza ſi arriva a reſpirarla anche dopo 120 ſecondi.

Queſta diverſità di tempi par che dipenda dalla rinnovazione dell'aria, che ſi fa nel polmone ad ogni reſpirazione. Ad ogni inſpirazione ſi porta nelle veſcichette polmonari anche l' aria meno infetta della trachea, e de' bronchi, laddove ſenza veſcica, ed a polmone tranquillo l' iſteſſa aria più infetta, ch' era nella veſcichetta, peggiora ſempre di più, perchè non rinnovata. Vi ſi aggiunga il calore dell' aria, che è maggiore nel primo caſo, che nel ſecondo, e che porta dell' affanno al polmone, come ſi farà vedere altrove.

Nella quarta eſperienza ſi paſſa di poco i 65 ſecondi per motivo dello ſtato di violenza, e di diſtenſione indotta a tutto il polmone da una troppo eſorbitante moſſa di aria; ma è poi chiaro da sè che in quello ſtato ſi reſpirerà più lungamente, ſe ſi fa uſo della veſcica, sì perchè la quantità dell' aria è molto di più, che nelle altre eſperienze, sì perchè non ſi porta ai polmoni, che nella quantità ordinaria, ma ſempre rinnovata.

Rifletto ancora, che la traſpirazione inſenſibile non arriva a flogiſticar l' aria comune ſenſibilmente, come mi coſta da tutte le mie eſperienze, chechè altri ne abbiano ſcritto in contrario, forſe per aver fatto uſo di cattivi Evareometri, e per avere ignorato il metodo da me tenuto.

E' vero che nelle altre ſecrezioni più groſſe vi ſi trova del flogiſto; ma queſte ſortono dall' animale a grandi intervalli di tempo, ed in qualche caſo, ed in qualche animale ſi poſſono ſoſpendere per giorni e giorni ſenza incomodo almeno molto ſenſibile; talchè parrebbe che non rimaneſſe altra via all' animale, per iſcaricarſi della eccedente quantità di flogiſto, che ſi prende col cibo, e che va ad unirſi alla maſſa degli umori circolanti, che il polmone, e ſi ſa che la parte roſſa del ſangue è ricchiſſima di flogiſto.

All' altra parte della difficoltà, che l' aria infiammabile ceſſa d' infiammarſi dopo reſpirata, io non ſaprei, ſe non ſe opporre eſperienza ad eſperienza. Non mi è ancor riuſcito di privarla affatto della ſua infiammabilità quando la reſpiravo nelle veſcichette alla maniera dei Filoſofi Svezzeſi, e molto meno quando la reſpiravo ſull' acqua, dove anderebbe fatto queſto eſperimento, eſſendomi ſoſpette le veſciche per molte ragioni, che tralaſcio preſentemente di accennare. Ma non ſo veder genere d' eſperienza più deciſivo, che quello di far reſpirare agli animali ſul mercurio l' aria infiammabile meſcolata con altrettanta aria comune. Ho fatto uſo de' porchetti d' India, e ſon viſſuti in quell' aria ſette, otto, e ſino in nove minuti. La quantità di ciaſcuna aria da me adoperata era di 12 poll. cubici. In tutte le eſperienze da me fatte ho trovato che l' aria s' infiammava, benchè reſpirata sì lungo tempo da quegli animali, e benchè foſſe reſpirata fino a laſciarli morire. Non ſo veder nulla di più ſemplice, e meno ſoggetto ad equivoci.

Rifletto ancora, che potrebbe darſi beniſſimo il caſo, che un lume ſi ſpegneſſe nell' introdurlo dentro di un tubo d' aria comune, é di aria infiammabile reſpirata lungamente dal polmone. L' aria comune, ſe è ſpecialmente in quantità fatta aria flogiſticata e fiſſa nel polmone, impedirà che un lume vi arda, benchè vi ſia nel tubo dell' aria infiammabile, e tanto più facilmente, quanto più il tubo ſarà lungo, e ſtretto. Si ſa che l' aria infiammabile non arde ſenza aria comune, e che l' aria flogiſticata e l' aria fiſſa ſpengono i lumi.

Ma ſi conceda pure ai due celebri Fiſici Svezzeſi che l' aria infiammabile ceſſa di eſſer tale dopo reſpirata, e che perde il ſuo flogiſto, e lo dà al polmone; non per queſto ne ſeguirà neceſſariamente, che il polmone aſſorba il flogiſto dell' aria comune dall' aria deflogiſticata. L' aria infiammabile certamente pregna di flogiſto ſi trova obbligata per lungo tempo a ſtriſciare ſopra un numero infinito di minimi vaſi roſſi polmonari. Ma non veggo poi punto impoſſibile, che nel mentre che l' aria comune riceve il flogiſto da una ſoſtanza, che ne ha più di lei, come è il ſangue per rapporto all' aria comune, l' aria infiammabile ne dia per l' oppoſto al ſangue, che può avere meno di eſſa. Può adunque l' aria comune caricarſi del flogiſto polmonare, e l' aria infiammabile eſſere impoverita del ſuo flogiſto dal polmone, ſenza che ſi debba credere, che il polmone aſſorba il flogiſto dell' aria atmosferica, quando ancora l' aſſorbiſſe dall' aria infiammabile. Queſto è quello, che ho creduto di poter dire in fatti ſopra le belle eſperienze dei

dei due famoſi Chimici Svezzeſi intorno alla flogiſticazione dell' aria nel polmone.

Si potrebbe qui obbiettarmi una eſperienza dell' illuſtre Sig. Cav. *Landriani*, colla quale ha egli trovato, che l' aria flogiſticata arriva ad ammazzare gli animali col ſolo tenerla a contatto della loro pelle ſenza reſpirarla punto. Egli aſſicura di avere oſſervato, che chiudendo una gallina dentro di una veſcica piena di aria flogiſticata col capo fuori del collo della veſcica, la gallina muore ben preſto. Io avevo chiuſo dentro di un recipiente col capo fuori diverſi animali in arie anche più micidiali dell' aria flogiſticata, come per eſempio l' aria fiſſa ecc., ma non avevo mai oſſervato, che gli animali aveſſero moſtrato di ſoffrire per queſto; lo ſteſſo oſſervai più volte nell' aria infiammabile. Potrebbe parere ancora ſingolare che vi foſſe un fluido aeriforme, permanente ſull' acqua, che poteſſe uccidere sì preſto col ſolo contatto della pelle. Ma tutte queſte difficoltà non ſono di neſſun peſo contro di una eſperienza diretta. Ero adunque curioſo di vedere io ſteſſo un eſperimento così ſorprendente, e sì nuovo; e mi determinai di farlo più volte, e lo feci oſſervando rigoroſamente il metodo del Sig. *Landriani*, e le cautele da lui preſcritte: ma per quante volte io lo replicaſſi, che furono moltiſſime, non ſolo non mi morì neſſuna gallina, ma neſſuna moſtrò nè anco di avere il menomo incomodo. Eſteſi le mie eſperienze ſopra i conigli, i porchi d' India, ed i piccioni; ma neſſuno morì, o moſtrò di ſoffrir punto in quell' aria. La veſcica durava più e meno gonfia di aria flogiſticata per il tempo dell' eſperienza, benchè ſcemaſſe continuamente, ma poco a poco, e per gradi minimi.

Penſai di ripetere l' iſteſſe eſperienze in una maniera ancora più deciſiva: deſideravo che la veſcica foſſe egualmente piena di aria flogiſticata per tutto il tempo dell' eſperienza. Per queſto mi ſervii di un recipiente di criſtallo a gran pancia capace di più di 1000 poll. cub. di aria, che aveva un'apertura nell'alto di circa un poll., e nel baſſo di 6 poll. e più.

Legai il collo di una gran veſcica al foro ſuperiore del recipiente, e fatto un taglio nella parte oppoſta della veſcica, v' introduſſi l' animale in modo che reſtaſſe tutto il capo fuori della veſcica. Fatto queſto, facevo uſcire l' aria comune dalla veſcica tenendo il recipiente immerſo nell' acqua. Quando l' acqua era vicina a entrare nella veſcica, introducevo ſucceſſivamente più migliaja di pollici di aria flogiſticata nel recipiente, e laſciavo che ſortiſſe l' aria per gradi allargando un poco la veſcica intorno al collo dell'animale a proporzione, che entrava l' aria. Quando l' aria del recipiente doveva eſſer ridotta a pura aria flogiſticata, chiudevo in modo la veſcica con preſſioni eguali, e molleggianti, che l'aria non poteſſe ſortire più almeno ſenſibilmente da eſſa, ed immergevo il recipiente nell' acqua di più pollici, perchè la veſcica foſſe ſempre ripiena di aria flogiſticata. Ho fatto le mie eſperienze nelle galline, ne' piccioni, ne' conigli, ne' porchi d'India ecc. e neſſuno mi è morto, o ha moſtrato di ſoffrire punto. Il metodo da me tenuto è ſemplice, le mie eſperienze ſono molte, onde non poſſo temere d' eſſermi ingannato. Laſciavo gli animali nell'aria flogiſticata ſino due in tre ore.

Il Profeſſor milaneſe crede, che l' aria flogiſticata della veſcica uccida gli animali col ſolo contatto eſteriore, perchè s' impediſce, dice egli, con quell'aria la traſpirazione del flogiſto attraverſo la cute. Ma biſognerebbe prima di tutto che il valente Profeſſore provaſſe I. che ſi fa veramente queſta traſpirazione cutanea di flogiſto negli animali, II. che ſi fa in modo nelle galline da ucciderle in poco tempo, quando è impedita. La prima parte a noi par falſa almeno nell'applicazione, che ſe ne vuol far qui dal noſtro Autore per quanto abbiamo potuto rilevare dalle noſtre proprie eſperienze che daremo in altro tempo. La ſeconda è affatto inveriſimile, non appoggiata a fatto veruno, e contraddetta dalle mie eſperienze medeſime, che pubblicherò fra poco, ſopra la *reſpirazione degli animali*.

Non poſſo adunque convenire in neſſuno dei fatti riportati dall' illuſtre Profeſſor milaneſe ſugli effetti attribuiti da lui all'aria flogiſticata, e molto meno ſopra le eſperienze da lui fatte. Devo adunque pregarlo a voler ripetere le ſue eſperienze una ſeconda volta, perchè meritano la più gran conſiderazione; e tutti coloro, che amano le verità Fiſiche, e i fatti veri, gli ſapranno grado della pena, che ſi vorrà dare; e noi ſaremo i primi a convenire con lui che ci ſiamo ingannati, nè ci vergogneremo di confeſſarlo quando egli ci avrà dato quel dettaglio che è neceſſario perchè le eſperienze rieſcano anche agli altri. Chi ſperimenta può ingannarſi; ma tutto dobbiamo ſperare dalla conoſciuta ingenuità, ed amore per le verità utili del degno Profeſſore.

L'altra parte della nuova teoria ſtabilita dai due Fiſici Svezzeſi riſguarda la formazione del calore, la generazione dell'aria deflogiſticata, la reviviſicazione delle calci metalliche, e la diminuzione delle arie reſpirabili coi proceſſi flogiſtici, ed è forſe la più brillante, e dove ſpicca più il loro talento inventore. Credono adunque che la materia del calore ſia formata del flogiſto, e di aria puriſſima, e che in queſto ſtato paſſi liberamente attraverſo di tutti i corpi. Con queſti principj ſpiegano facilmente le reviviſicazioni delle calci de' metalli prezioſi, cioè col ſolo calore, e ſpiegano la formazione dell' aria pura chiamata da noi aria deflogiſticata. La materia del calore nel paſſare attraverſo i vaſi ſi decompone; il flogiſto attratto dalle calci metalliche le reviviſica in metallo; e l' aria pura abbandonata a sè ſteſſa, e fatta libera, ſorte dal collo del matraccio aria deflogiſticata.

Non ſo veder nulla di più ſemplice, e di più ingegnoſo, e ſi ſpiegano, convien confeſſarlo, colla più gran facilità le diminuzioni delle arie pure coi proceſſi flogiſtici, che ſono ſempre accompagnate dal calore.

Queſta teoria ſi trova illuſtrata con ſommo ingegno dal Cav: *Bergman*, ed applicata a quaſi tutti i fenomeni della Chimica. Non poteva trovar campione più valoroſo per ſoſtenerla; ma da quel grand'uomo che egli è non l'avanza per una verità ancor dimoſtrata, ma per una teoria, o ipoteſi, che ſpiega i fenomeni più difficili, ed eſorta gli altri Fiſici a travagliare ſopra queſta materia importante.

Io avrei però deſiderato che foſſe appoggiata a qualche eſperienza diretta, o che ſi foſſe immaginata tale eſperienza, che dimoſtraſſe all' oſſervatore imparziale, che le diminuzioni dell' aria pura proveniſſero da perdita di eſſa aria attraverſo i vaſi inſieme col flogiſto, quando diventa calore, non già da riſtringimenti, e decompoſizioni dell'aria medeſima. In ſomma mi pareva che mancaſſe uno di quegli eſperimenti, che il Gran Bacone da *Verulamio* chiamava *experimentum crucis*, e che egli deſiderava, che ſi cercaſſero dal Fiſico induſtre per iſtabilire, o per abbattere le teorie, e le ipoteſi immaginate dai Filoſoſi. Non ſempre però rieſce di trovare di queſti eſperimenti, nè anco dai Filoſofi più grandi, e più conſumati, e ſuppongono un genio creatore nell' uomo; e a queſta difficoltà ſola ſi devono appunto le diſpute interminabili ſopra tanti punti importanti della Fiſica, e della Chimica, che durano ancora, e che non finiranno sì ſubito.

Frattanto mi ſi permetta di riportar qui un eſperimento, che a me pare fortiſſimo, e che rende alquanto ſoſpetta quella nuova teoria. Ecco l'eſperienza.

Si prende un'oncia di mercurio puriſſimo, e ſi mette in un matraccio di lungo collo, ed aperto al fuoco di ſabbia. Se il collo è aperto, ſi calcina il mercurio per intiero dopo molti meſi, e ſi trova ch' è creſciuto di $\frac{1}{8}$ in circa del peſo primitivo. Queſto aumento di peſo viene ſicuramente dall' aria, perchè a vaſo chiuſo non ſe ne calcina ſenſibilmente, e quel poco che ſi calcina è in proporzione della quantità dell' aria, ch' è dentro del vaſo, e l' aria ſi trova allora diminuita, e peggiorata in bontà. Si revivifichi ora col ſolo fuoco la calce del noſtro matraccio, e ſi ricevano i prodotti in vaſi adattati. Il mercurio ritornerà ad un' oncia come era prima di calcinarſi, e ſortirà aria puriſſima dal collo, che peſata ſarà preciſamente un ottavo di oncia, cioè il peſo, di cui era creſciuto il mercurio per l' aria certamente, che gli ſi era unita, o per meglio dire da materia cavata dall' aria. Qui non ſi fa vedere decompoſizione alcuna di calore, perchè l' aria ſortita è uguale in peſo all' accreſcimento della calce, e non maggiore. Se vi foſſe ſtata la decompoſizione del calore, e la produzione di nuova aria pura, che è uno de' ſuoi componenti, nell' ipoteſi Svezzeſe, ſarebbe ſortita dal matraccio una più grande quantità di aria, e di un peſo molto maggiore, perchè vi ſarebbe ſtata tutta quella del matraccio, che era un ottavo di oncia, e l' altra del calore decompoſto. Non ſo coſa ſi poſſa replicare a queſta eſperienza, dove vi è certamente la materia del calore, come nelle altre revivificazioni metalliche, ſenza che vi ſia la decompoſizione di eſſo, e la produzione di nuova aria deflogiſticata.

Queſto argomento può ſervire a ſpiegare molte altre revivificazioni metalliche, e produzioni di aria puriſſima ſenza biſogno di ricorrere alla decompoſizione del calore, e ſenza ſuppor nota la compoſizione di quel principio sì poco conoſciuta ancora dai Filoſofi.

Se foſſe permeſſo di azzardar qualche penſiero ſopra queſta materia sì oſcura, potrei domandare ſe è poi un aſſurdo di penſare, che in quell' ottavo d' oncia di materia eſtranea accreſciuta nel mercurio calcinato vi foſſe tanto di quel principio, che fa revivificare i metalli, che meſſo in moto dal fuoco foſſe attratto dal mercurio, che n'è ſpogliato, e ſitibondo, quando è in ſtato di calce, e ſi repriſtinaſſe così in metallo. In queſta ſuppoſizione la materia, che è nel mercurio, privata di flogiſto ſortirà aria deflogiſticata puriſſima. Ammeſſa queſta ipoteſi, ſi rende ragione di una infinità di fenomeni non prima inteſi.

Le calci metalliche non ſono affatto prive di flogiſto. Quelle calci, in cui ſi trova aria fiſſa, non ſono nè anco eſſe affatto prive di quel principio, sì perchè l'aria fiſſa non ne è priva nè anco eſſa, sì perchè alcune calci danno l' aria infiammabile coll' acido del fosforo, sì perchè altre calci unite all' acido vitriolico danno dell' aria vitriolica, cioè un' aria fatta elaſtica dal flogiſto, che a loro ſi è unito.

Conviene ancora riflettere che colla ſemplice unione degli acidi, e delle calci metalliche ſi cavano de' fluidi elaſtici, cioè de' fluidi fatti elaſtici dal flogiſto. La poca aria deflogiſticata, che ſi ottiene da certe calci coi puri acidi, non diſtrugge punto l'oſſervazione fatta ſopra, e il valente Chimico Svezzeſe il Sig. *Bergman* ſteſſo non crede poi prive affatto di flogiſto le calci metalliche, *interim tamen non penitus ſpoliata reperiuntur*, ſcrive egli e ne adduce delle forti prove. Vi è del ferro ſpatoſo, che non è punto tirato dalla calamita; ma appena vi ſi applica il fuoco, tramanda aria infiammabile, e fiſſa, ed allora è tirato per intiero dalla calamita. Se ſi voleſſe conſiderare il ferro nel primo caſo ſotto forma di calce, converrebbe credere, che vi foſſe unito un principio flogiſtico, che revivifica la calce in ferro, e forte ſotto forma di aria infiammabile.

Tutto queſto ci farebbe credere, che l' ottava parte di peſo accreſciuto al mercurio, che diventa calce col ſolo fuoco, non è tutto ſotto forma di aria pura inelaſtica, ma bensì di un compoſto della materia di quell' aria, e di flogiſto, il quale meſſo in movimento dall'azione del fuoco vivo corre a revivificare il mercurio, con cui ha la più grande affinità; e l' altro componente fatto libero ſorte ſotto forma di aria puriſſima, cioè di aria privata di flogiſto almeno in gran parte. Ma io non pretendo di ſtabilire una teoria ſicura ſu de' principj certi, mancano le prove dirette, le eſperienze deciſive.

La bella eſperienza riportata dal Sig. *Bergman* dell' aria, che ſi trova conſumata nella palla, in cui egli laſcia raffreddare la paſta de' tre metalli ſolubili all' acqua, non prova nulla in favore di quel ſiſtema, perchè ſi ſuppone che la palla ſia diminuita di peſo, ma non ſi adduce neſſuna eſperienza, neſſun fatto certo, che ci aſſicuri di queſto.

L' iſteſſo ſi deve dire delle ordinarie calci metalliche, che contengono dentro di sè una gran quantità della materia dell'aria, ed alla quale ſi deve il loro peſo accreſciuto, e che ſi cava da eſſe co' ſoliti mezzi.

Nè a me pare che provi molto in favore di quel ſiſtema l' eſperimento fatto dal Sig. *Bergman* col lume acceſo, che conſuma quaſi affatto l' aria deflogiſticata di un recipiente ſul mercurio, perchè non appariſce da eſſo, che l' aria deflogiſticata diventata calore ſe ne ſia andata attraverſo del vetro. Per l' oppoſto tutto concorre a far credere, che la materia dell' aria, perduta la ſua naturale elaſticità, ſi uniſca al corpo, da cui è ſortito il flogiſto; ed in fatti ſi vede che allora quelle ſoſtanze creſcono di peſo in proporzione appunto dell' aria diminuita, come ſi oſſerva del foſforo, del zolfo, del piroforo, che ſi fanno ardere nell' aria dentro vaſi.

Ma poi non laſciano alcun dubbio le mie eſperienze ſul carbone. Queſte eſperienze furono da me fatte fino dai primi tempi, che ero a Parigi, e fra i molti che le videro mi baſterà di nominare il Sig. *Duca di Chaulnes*, M. *Turgot* Miniſtro di ſtato, e il dotto traduttore di *Prieſtley* M. *Gibelin*. Si trovano dopo quel tempo citate da diverſi teſtimoni. *Prieſtley* ne parla in più luoghi nella ſua opera ſulle *Arie* ſtampata a Londra fin dal 1778, e riſtampata in franceſe nel 1782. dove alla pag. 77 ſi ſpiega così: *L' aſſorbition de toutes les eſpeces d' air par le charbon eſt une grande decouverte de l' Abbè Fontana qui à bienvoulù me permettre d' en faire mention.*

Si faccia accendere il carbone, e quando è bene acceſo, ed in pezzetti, ſi faccia ſpegnere dentro bocce ripiene di eſſo, e ſubito ſi chiudano. Raffreddate ſi peſino, e s' aprano poi nell' aria comune, o dentro vaſi di note quantità di aria e galleggianti ſul mercurio; le bocce dove è il carbone creſceranno di peſo, e creſceranno in ragione dell' aria diminuita ne' vaſi. Queſto carbone poi meſſo nel vuoto, o immerſo nell' acqua dà una gran quantità di aria, la maggior parte della quale è aria flogiſticata, il reſtante è aria fiſſa con poca aria comune.

Se ſi ſpegne nel mercurio del carbone acceſo, e ſi fa paſſare attraverſo il mercurio ſenza toccar l' aria eſterna in un recipiente, in cui vi ſia dell' aria comune, ſi vede nell' iſtante diminuirſi quell' aria fino a non apparirne più un atomo. Se in queſto ſtato ſi fa paſſare il carbone nell' acqua ſenza toccare all' aria eſterna, ſorte dal carbone in bolle circa $\frac{1}{5}$ dell' aria primitiva aſſorbita, la quale è perſettamente flogiſticata. Sorte ancora dal carbone dell' aria fiſſa, che viene aſſorbita dall' acqua a proporzione, che ſe n' eſce in bollicine. Il carbone arriva ad aſſorbire circa 6 volte il ſuo volume di aria in queſte eſperienze.

Si noti che il carbone aſſorbe in queſte circoſtanze di ſopra ſei volte, ed anche più di aria deflogiſticata; ma meſſo nell' acqua dà poche bollicine, e di un' aria molto migliore della comune, ma molto peggiore di prima.

Meſſo poi il carbone ſpento nel mercurio nelle arie infiammabili,

infiammabili, o nelle flogiſticate, appena aſſorbe il proprio volume di eſſe, ed immerſo come ſopra nell' acqua non dà ſenſibilmente aria veruna.

Mi ſi permetta di dare qui alcuni riſultati di eſperienze fatte col carbone ſpento nel mercurio, e poi introdotto attraverſo il mercurio in tubi alti 35 poll., larghi due, in cui ſi era meſſo una determinata quantità di aria comune. L' aria introdotta era circa 10 poll. ſcarſi. Mi ero accorto, che tenendo il tubo verticalmente ſortiva molta aria dal carbone, la quale veniva aſſorbita coll' inclinar il tubo all' orizzonte. Inclinai adunque il tubo a tal ſegno, che l' aria foſſe aſſorbita per intiero dal carbone. Allora ſituai il tubo a piombo; e laſciato così per qualche tempo, cavai dal tubo il carbone per mezzo di un filo ſottile di ferro attaccato ad una rete di ferro anche eſſa, e introdotta nella parte più alta del tubo, che ſtraſcinava ſeco il carbone. Cavato adunque il carbone miſurai ſul mercurio l' aria rimaſta nel tubo, e ſortita dal carbone per tolta preſſione eſterna, e trovai che era 6 poll. cub. per lo meno. La portai ſull' acqua, e la ſcoſſi, e ne fu aſſorbito mezzo pollice. Il reſiduo ſpenſe un lume, e diede colla nitroſa 185; onde vi erano nel carbone, che era circa due poll. cub., circa tre volte più di aria del ſuo proprio volume, e queſt' aria era per $\frac{1}{12}$ aria fiſſa, ed il reſtante aria quaſi affatto flogiſticata.

Ripetei l' eſperienza coll' aria deflogiſticata nelle circoſtanze di ſopra, il carbone era 4 poll. cubici, eſciron dal carbone ſul mercurio quattro poll. dell' aria. Il reſiduo ſcoſſo nell' acqua diminuì d' $\frac{1}{4}$. Coll' aria nitroſa diede 72. 42. 78. 178., quando prima dava 71. 38. 46. 90. 190. Era adunque ancora aria deflogiſticata, benchè reſa peggiore, e vi era con eſſa un poco di aria fiſſa.

Ripetei l' eſperienza coll' aria flogiſticata, ma il carbone, ch'era circa 5 poll. cubici, non ne aſſorbì, che il proprio volume. Scoſſi il reſiduo nell' acqua, e fu aſſorbito di $\frac{1}{6}$. Il reſtante non fu diminuito punto dall' aria nitroſa.

Ripetei l' eſperimento coll' aria infiammabile, e con ſette poll. cubici di carbone, ne aſſorbì il proprio volume. Miſi il tubo orizzontale, ſi trovò che vi era tutta la quantità primitiva di aria infiammabile, come me ne aſſicurai con miſure attuali. Scoſſa nell' acqua diminuì ſenſibilmente. Colla nitroſa non lo fu punto, ed il lume l' acceſe come prima.

Io ho una lunghiſſima ſerie di eſperienze fatte col carbone ſpento nel mercurio e nel vuoto, che formano un nuovo ramo di Scienza ſopra queſta materia, e principalmente ho de' riſultati inaſpettati. Sopra le arie, che ſi ottengono immergendo il carbone acceſo ne' differenti fluidi, come negli acidi, negli olj, e nell' acqua medeſima. E' mirabile che ſi ottenga dell' aria infiammabile tuffando il carbone acceſo nell' acqua anche diſtillata, e potrebbe aver l' aſpetto di paradoſſo, ſe ſi domandaſſe di cavar l' aria infiammabile da un corpo coll' acqua la più fredda. Ma mi riſervo di trattar queſta materia nel più gran dettaglio nella mia Opera ſulle arie.

Queſte nuove eſperienze ſul carbone ſomminiſtrano de' gran lumi per la teoria delle arie medeſime, e ci preſentano de' fenomeni nel tempo medeſimo di difficile ſpiegazione. Non s' intende per eſempio come un pollice cubico di carbone poſſa contenere tre volte il ſuo volume di un' aria, che di comune è diventata aria flogiſticata, cioè un' aria, ch' è difficile ad alterarſi ſervendoſi ancora de' mezzi più forti che la Chimica moderna ſomminiſtra, e che pare indeſtruttibile, indecomponibile. Se eſſa conſerva nel carbone la ſua naturale elaſticità, deve eſſer per lo meno tre volte più elaſtica dell' aria comune, onde non s' intende come poſſa il carbone contenerla dentro di sè; ſe poi non è elaſtica dentro il carbone, come potrà eſcire quell' aria dal carbone ſubito che ſi diminuiſce anche di poco la preſſione del mercurio contro del carbone medeſimo, avendo oſſervato che diminuita la preſſione dell' aria eſterna di un quarto, e di un quinto, ed anche meno aſſai, eſce beniſſimo più e meno di quell' aria dal carbone? Siamo adunque sforzati di ammettere nel carbone una tal forza, che arrivi appena a vincere la forza sfiancante dell' aria, quando il carbone è premuto da tutto il peſo dell' atmosfera; ma che appena ſi arriva a diminuire la preſſione del mercurio contro del carbone, prevale la forza dell' elaſticità dell' aria, e ſorte colle qualità che abbiamo veduto.

Ma queſta maniera di eſaminare le forze ſecondo che i fenomeni lo richieggono, o di rappreſentar gli effetti col ſuppor delle cauſe, che ſieno in rapporto con eſſi, è piuttoſto matematica, che fiſica, e tende più a trovar le leggi di eſſi effetti, che le cagioni.

Io ſono di parere che l' aria eſca dal carbone, e ſi trovi in quella ſoſtanza, come eſce l' aria dall' acqua, e come l' aria ſi trova nell' acqua medeſima. E quel che dico dell' aria per rapporto all' acqua, par che ſi debba dire di quel fluido elaſtico per rapporto a tutti i corpi, in cui ſi trova. Ho dimoſtrato negli anni addietro nella mia opera *Sur l' air nitreux & ſur l' air deſlogiſtiquè*, ſtampata a Parigi nel 1781., che l' aria comune non poteva trovarſi dentro dell' acqua in iſtato di elaſticità. Conſidero l' aria nell' acqua in un vero ſtato di diſſoluzione completa. Le molecole dell' aria in quello ſtato tendono in ogni iſtante a ſortire dall' acqua per un principio, o forza che agiſce inſtantemente contro di eſſe, ed eſcono in fatti ſubito che la preſſione eſterna ſull' acqua è diminuita di tanto che prevalga la forza, che tende a farle ſortire dall' acqua, così concepiſco che l' aria ſi trovi nel carbone, cioè ridotta in molecole impercettibili non elaſtiche, ma tendenti a ſortire da quel corpo ſubito che la forza eſpanſiva, che le penetra, e che le ſtacca dal carbone, prevale. L'eſempio dell'acqua, che diventa vapore nel vuoto, e del mercurio medeſimo, che ſi riſolve in minimi corpiccioli nel vuoto più perfetto, dimoſtrano abbaſtanza, che regna queſta forza in tutti i corpi, e che la ſola preſſione eſterna dell'aria, o tolta, o diminuita, fa che ſi riducano in vapori i fluidi più inerti, e più peſanti. Io ſpero di poter dimoſtrare con tutta l'evidenza, di cui ſono capaci le verità fiſiche, la realtà di queſto nuovo principio, ed il ſuo meccaniſmo.

Comunque ciò ſegua poco importa, purchè il fatto ſia vero, e ſi convenga, che tutti quegli effetti derivano dal principio flogiſtico, ch'è nel carbone. Non ſi può adunque più dubitare, che la diminuzione dell'aria, anzi la totale diſtribuzione di tutte le arie artificiali, e naturali non ſi facciano a ſcapito dell'aria medeſima, che ſi è introdotta nel carbone.

Merita ancora tutta la conſiderazione del Filoſofo penſatore il vedere, che ſi è trovato una materia, che aſſorbe tutte le arie per intiero, ſenza reſiduo alcuno, che fin'ora non ſi è ottenuto con neſſun altro proceſſo flogiſtico, e che deve render ſoſpette le teorie di quei Fiſici, che hanno formato l'atmosfera di $\frac{3}{4}$ di aria micidiale, e di $\frac{1}{4}$ di aria puriſſima col ſolo fondamento che non ſapevan diminuire l'aria comune, che di $\frac{1}{4}$, e che il reſiduo era meſitico, oſſia aria flogiſticata. Il carbone può diminuirla comunque, ed i reſidui ſono aria mal ſana, e può fino diſtruggerla affatto. In queſto caſo converrebbe dire, che l'aria atmosferica è fatta di ſola aria deflogiſticata, di ſola aria puriſſima, che è un aſſurdo, e ch'è contrario alla ipoteſi, che combattiamo. Il carbone è di tutte le ſoſtanze, o flogiſti, il ſolo conoſciuto fin qui che aſſorba tutte le arie naturali, ed artificiali sì ſalubri, che meſitiche, che ne aſſorba in sì gran quantità, che ne aſſorba con tanta rapidità, e che le aſſorba per intiero, cioè ſenza reſiduo alcuno di fluido elaſtico; ed in queſto conſiſte principalmente, e non in altro la ſingolarità da me ſcoperta in quella ſoſtanza. Nè ſi deve confondere il carbone con quelle ſoſtanze, che aſſorbon l'aria naturale ad eſſe, e che hanno perduto per qualche accidente; ma la diminuzione dell'aria deve eſſer fatta dal ſolo flogiſto, come è fatta dal carbone. Nè mi coſta ancora da neſſuna eſperienza diretta, che nè anco le piante ſteſſe in ſtato di vegetazione ſi poſſono paragonare col carbone per le diſtruzioni delle arie, e poi il principio che le produce non ſi prova il medeſimo. Nè ſi creda che il carbone aſſorbe le arie ſolo a proporzione, che ſi raffredda, perchè fa il medeſimo raffreddato comunque, e chiuſo in vaſi, e coperto di mercurio anche per anni.

Ma dopo ancora tutte le coſe da noi rilevate contro la nuova Teoria del calore, non ero contento di me medeſimo, nè tranquillo, e mi mancava una di quelle eſperienze, che decidono delle controverſie fiſiche, e che non laſciano luogo a dubbj ulteriori.

Un nuovo eſame ſopra quella Teoria mi portò poco a poco a vedere, che era poſſibile di fare una eſperienza diretta, e deciſiva. Suppoſi adunque ſciolto il problema in quiſtione alla maniera degli Analiſti, e cercai quali erano le conſeguenze immediate, che derivano, e ſe vi era mezzo alcuno di confermare coll'eſperienza le conſeguenze dedotte, e legate intieramente co' loro principj.

Suppoſta vera l'ipoteſi che da noi ſi combatte, l'aria pura nell'unirſi al flogiſto dentro de' vaſi diventa calore. Il calore è dunque una ſoſtanza fatta di due principj, che ſono l'aria pura, e il flogiſto. La materia del calore paſſa attraverſo di tutti i corpi anche i più compatti, e ſi diffonde, e comunica ai corpi eſterni. Si ſa che l'aria è grave, e ſe ne conoſce il peſo. Noi non isbaglieremo gran fatto a ſupporre che un poll.cub. di aria comune è circa $\frac{1}{3}$ di grano, ma nel caſo noſtro non abbiamo punto biſogno di preciſione, e prendendo ancora i dati più ſvantaggioſi vi è anche di troppo per l'applicazione, che ne facciamo. Il flogiſto è corpo, e queſto baſta per crederlo peſante, benchè poi ſia vero che ſe ne ignora il peſo preciſo, ma noi lo poſſiamo traſcurare, e ci è affatto inutile. L'aria pura fatta calore col flogiſto ſorte dai vaſi in cui ſi è formato il calore. La quantità della materia dovrà in quei caſi diminuire dentro di eſſi vaſi, e queſta diminuzione ſarà tanto più grande, quanto maggior quantità di aria è ſtata conſumata per la formazione del calore.

Diverſi metodi ho io immaginato per trovare con ſicurezza, e facilità la materia perduta dentro de' recipienti; ma mi contenterò per ora di accennare un ſolo, che ho preferito agli altri. Avevo biſogno di gran bocce, o vaſi, perchè il flogiſto agiſſe ſopra gran maſſe di aria, ma nel tempo medeſimo cercavo di potere aſſicurarmi anche delle più piccole differenze di peſo.

Per arrivare a ſoddisfare all'una, ed all'altra condizione ho fatto ſoffiare un gran numero di palloni di vetro ſottili, e capaci dai 600 fino in 1000. poll. cub. di aria e più ancora. Queſte palle finivano in un collo lungo quattro in cinque pollici, per il quale introducevo le diverſe materie, di cui volevo ſervirmi, e chiudevo ſubito il collo ermeticamente. Allora peſavo ogni coſa colla più grande attenzione. I palloni anche dopo chiuſi non arrivavano a peſar mai ſei once, e la maſſima parte peſavano fra le tre once, e le cinque once, e ſi accoſtavano più alle prime, che alle ſeconde. La bilancia, di cui mi ſervivo, caricata dai palloni rompeva coſtantemente ad $\frac{1}{10}$ di grano.

Devo confeſſare con ingenuità, che nel fare queſte eſperienze ſono ſtato più volte nel procinto d' ingannarmi, ed ho creduto per qualche tempo, che vi foſſe una vera perdita di materia fatta dai noſtri palloni. Diverſe ſono ſtate le materie, che io ho creduto di dover provare, e queſte erano tutte di natura combuſtibile, e capaci di ſchiudere il flogiſto, e di eccitare il calore. Mi ſon ſervito della polvere d' archibuſo, dell' eſca comune, del zolfo, del piroforo, e finalmente del fosforo di orina. Accendevo nelle palle la polvere, e l' eſca con una lente uſtoria; la polvere era acceſa a piccole maſſe, perchè il pallone non iſcoppiaſſe, che in diverſo modo ſuccede. Applicavo ai palloni, dove ſi trovava il zolfo, un lume acceſo, e ve lo laſciavo per 10 in 12 ore, finchè ſi foſſe tutto ſollevato in fiori di zolfo: ordinariamente mettevo una dramma di zolfo nei palloni e non più.

I palloni dove vi era il zolfo, ed il fosforo mi moſtrarono per più, e più volte una coſtante diminuzione di peſo, che arrivava fino a due grani, e più. Ma oltrechè la perdita in peſo non corriſpondeva punto alle diminuzioni dell' aria ſeguite nelle palle, era in contraddizione col peſo trovato negli altri palloni, ne' quali ſpeſſo ſi oſſervava anzi una vera aumentazione.

A proporzione, che andavo moltiplicando le mie eſperienze, e che uſavo delle nuove cautele, ed attenzioni trovavo che l' eſperienze ſi accordavano ſempre più fra di loro, e che tendevano a provare, che non vi era nè diminuzione, nè aumentazione di peſo. La temperatura eſterna dell' aria, ed il calore rendevano i miei riſultati ineguali; l' umidità, la polvere, il ſudiciume delle mani vi concorrevano anche eſſi ſenſibilmente. Nell' eſame rigoroſo delle circoſtanze diverſe, ed incoſtanti, che ſi meſcolavano nelle mie eſperienze, ho ſcoperto che il calore dei palloni medeſimi poteva alterarne il peſo ſenſibilmente, il che merita qualche rifleſſione.

Un giorno avevo meſſo circa 15 grani di eſca in un pallone pieno di aria comune, e chiuſo ermeticamente.

Il pallone per mezzo di un filo di ſeta era ſoſpeſo ad un braccio di bilancia, e peſava onc. 4 dan. 7 gr. $7\frac{1}{4}$: acceſi l' eſca nel pallone colla lente uſtoria, ed oſſervai che il pallone perdeva ſenſibilmente del ſuo peſo. Il pallone era caldo nel fondo, e freddo nell' alto. Ripetei l' eſperimento ſopra quattro altri palloni, e trovai nelle ſteſſe circoſtanze di ſopra, che il peſo arrivava a ſcemare d' un grano, e più, ma che appena raffreddati i palloni ritornavano al peſo di prima.

Queſta diminuzione di peſo nell' atto, che brucia l' aria nei palloni pare un fatto d' eſperienza, e da non poterſene dubitare nè anco; ma d' onde viene poi queſta diminuzione? Una perſona che ſi trovò preſente ad alcune di queſte eſperienze mi fece riflettere, che ſi alzava dall' eſca un vapore denſo, torbido, il quale ſaliva con forza nelle parti più alte, e ſuperiori del pallone. Credeva adunque che quei vapori o fumo diminuiſſero il peſo nel pallone coi loro urti entro le pareti ſuperiori, e per le vie, che ſi doveva aprire per l' aria. Non era molto difficile di rilevare l' inſuſſiſtenza dell' una, e dell' altra ipoteſi; ma volevo eſaminare ogni coſa coll' eſperienza alla mano, e volevo che i fatti medeſimi ſerviſſero a trovar la vera cauſa di quella leggerezza.

Molte eſperienze nuove io feci per queſto fine, e trovai che a proporzione che il calore diminuiva dopo bruciata l' eſca, la differenza in peſo diventava minore, e che creſceva per l' oppoſto al creſcer del calore. La qual coſa mi fece ſoſpettare che il calore applicato anche eſteriormente al palloni ne diminuiſſe ſenſibilmente il peſo.

Preſi adunque un pallone di vetro del diametro di poll. 10. e pieno di aria comune lo chiuſi ermeticamente. Era once 4 dan. 5 gr. $2\frac{1}{2}$. Tenendolo ſoſpeſo ad un filo lo riſcaldai coll' accoſtarlo ad un braciere di carbone acceſo. Il calore era appena ſoffribile nel fondo,

ma

ma non era ſenſibile nelle parti ſuperiori. Ripeſato lo trovai diminuito di due grani in punto. A proporzione che ſi raffreddava diventava più peſante per gradi, e ridotto alla temperatura di prima, e della ſtanza, ſi trovò che aveva acquiſtato il peſo di prima.

Queſto eſperimento fu da me ripetuto molte altre volte col medeſimo eſito. Volli anche oſſervare ſe ſeguiva l' iſteſſo riſcaldando i palloni nelle parti ſuperiori verſo il collo, e non nel fondo, e ſe il medeſimo ſeguiva riſcaldato il pallone egualmente per tutto. I riſultati di tutte le mie eſperienze mi portano a creder vere proſſimamente le ſeguenti propoſizioni.

I.

Un pallone del peſo di circa quattro once, chiuſo ermeticamente, e pieno di aria comune, ſe dopo peſato bene ſi riſcalda forte nella parte oppoſta al collo a ſegno di non poterla toccare colla mano, ſi trova diminuita ſenſibilmente di peſo. Se ha 10 in 12 poll. di diametro, la diminuzione arriva fino a due grani e più: ſi avverta che il calore non ſi laſcia ſalire fino al collo della palla, il fondo della quale ſi riſcalda bruſcamente ſulle brace bene acceſe, quando ſi vuol far l'eſperienza. Dopo pochi minuti diventata fredda come prima ſi trova che è creſciuta dei due grani, che aveva perduto.

II.

Se ſi riſcalda la ſola parte ſuperiore del pallone dov' è il collo, ſi trova un poco diminuita, ma molto meno che nel primo caſo, e ſubito raffreddata ritorna al peſo di prima.

III.

Se ſi riſcalda egualmente per tutto il pallone ſopra, e ſopra ſi trova più diminuita, che al numero II, ma un poco meno che al numero I.

IV.

Le materie nell' atto di ardere dentro le palle chiuſe ermeticamente ſcemano di peſo, ma raffreddate ritornano al peſo di prima.

V.

Le diminuzioni di peſo nei palloni, in cui ſi è eccitato il calore, non deriva dai vapori, che ſi ſpargono nell' aria dai palloni.

VI.

I corpi riſcaldati dal calore poſſono apparir meno peſanti di prima.

VII.

Anderebbono ripetuti gli eſperimenti fatti dai Fiſici ſopra i corpi inſuocati a motivo d' aver negletto queſto elemento.

Finiſco coll' avvertire che avendo riſcaldato un pallone aperto nel collo, trovai che peſava 27 grani meno di prima. Era riſcaldato nel fondo, e non in alto. A proporzione che ſi raffreddava creſceva di peſo, e raffreddato del tutto ritornò a peſar come prima: ma qui la cauſa è troppo patente, perchè meriti che ſe ne parli.

Dopo di avere a poco a poco conoſciuti, e corretti i piccoli errori, che io commettevo nei far le mie eſperienze ſul peſo de' miei palloni, trovai che combinavano molto bene i riſultati fra di loro, ma che non favorivano punto la nuova teoria Svezzeſe.

Credetti di dover continuare le mie eſperienze, variandole ancora in modo che i riſultati foſſer più grandi e più pronti, onde ancora più ſicuri. In alcuni palloni inſinuai delle fettucce ſottili di fosforo, e dopo chiuſi ermeticamente accendevo col calore d'un carbone acceſo il fosforo. Speſſo ſi rompeva il pallone anche allora, che accendevo un ſolo pezzetto di fosforo per volta.

Ho trovato che l' eſperienza rieſciva con più di ſicurezza, quando ſoffiavo del vento freddo contro quella parte del pallone, dove il fosforo bruciava. Il freddo ritarda, e diminuiſce la fiamma del fosforo, e per queſto le rotture ſono meno frequenti. Qualche volta in meno di $\frac{1}{4}$ d' ora l' eſperimento era finito, il pallone raffreddato e ripoſato. Due volte ſole ſi è acceſo ad un tratto il fosforo ſenza romperſi il pallone, ed ho oſſervato che le pareti interne di eſſo erano gremite di una materia bianca lanuginoſa finiſſima regolare.

In neſſuna delle moltiſſime eſperienze da me fatte bruciando il fosforo nei palloni ho trovato diminuzione di peſo, come non ho mai trovato aumentazione di peſo. Io le ho ripetute in diverſi tempi, e luoghi procurando che il peſo dell' aria, ed il calore foſſero ſempre i medeſimi.

Se mi ſono ingannato, biſogna ben dire che tutto è concorſo per ingannarmi; ma frattanto mi ſi conceda di fiſſare come un Canone fiſico dei più ſicuri, che i corpi nelle circoſtanze da me eſaminati non aumentano di peſo, come non diminuiſcono di peſo.

Ho trovato che l' aria in alcuni palloni era diminuita di quaſi il quarto, e queſto quarto poteva ſalire ſino a 200 poll. cub., talchè avrei dovuto trovare più di 66 grani di diminuzione di peſo , quando la bilancia non ne moſtrava punto.

Un altro genere di eſperienze ho voluto ancora intraprendere , le quali provano anche più direttamente la medeſima verità . Conſiſtono queſte in mettere dentro i palloni una quantità di acido nitroſo , ed una quantità di mercurio . I palloni erano fatti in modo , che verſo la metà del collo vi era una gobba da una parte, o piccolo ſacchetto di vetro chiuſo eſternamente, ed aperto internamente nel collo. Inſinuavo prima di tutto l' acido nitroſo per il collo ſenza che ne entraſſe punto nel ſacco, e ſubito dopo mettevo il mercurio nel ſacco per mezzo di un tubo ricurvo facendolo entrare per il collo . L' acido nitroſo era un poco fumante, ed in tal quantità da ſciorre abbondantemente il mercurio. Chiuſo il collo ermeticamente, lo peſavo alla bilancia, ed in tale ſituazione ſenza toccar più nulla facevo cadere il mercurio nel pallone. In pochi minuti era ſciolto il mercurio e raffreddato il pallone , e allora alzavo la bilancia per vedere , ſe vi era variazione di peſo. Queſta eſperienza rieſce in meno di 6 minuti. Il pallone non è mai toccato eſternamente, che quando s' inclina un poco per far cadere il mercurio ſull' acido nitroſo, il che ſi fa con un cencio fine. La bilancia reſta nella ſituazione di prima , onde non vi è neſſuna circoſtanza che poſſa far ſoſpettare di errore. Tutte le eſperienze da me fatte con queſt' ultimo metodo ſono ſtate uniformi; e mi hanno aſſicurato, che non vi è diminuzione alcuna di peſo nei palloni , come non vi è aumentazione , e che non ſorte dai palloni l' aria pura ſotto forma di calore, nè altra ſoſtanza qualunque ſuſcettibile di peſo . Io credo di potere avanzare queſta verità , che mi pare importante aſſai , e che mancava alla Fiſica moderna, ed alla Scienza delle arie. E' vero che è in contraddizione colla teoria dei due valenti Chimici Svezzeſi, ma è ſempre un gran paſſo verſo la verità di aver levato un oſtacolo di mezzo, che poteva ritardare i progreſſi de' Fiſici.

Sopra l' aria fiſſa eſiſtente nell' atmosfera.

Avanti di eſaminare con qualche dettaglio la preſente quiſtione, io ho creduto, che conveniſſe prima di eſaminare un' altra forſe meno importante, ma che rende molto più facile la ſoluzione della prima. Queſta ſeconda ha per oggetto di ſapere, donde venga il reſiduo aeriforme, che ſi trova nell' aria fiſſa. I Fiſici moderni, che hanno più lavorato intorno alle proprietà, ed alla teoria delle arie, trovano dopo il celebre D. *Prieſtley* che per quanta aria fiſſa ſi faccia aſſorbire dall' acqua, reſta ſempre un reſiduo di aria, che l' acqua non può aſſorbire, e che è affatto differente dall' aria fiſſa medeſima, quando anche l' aria fiſſa, di cui ſi è fatto uſo, ſia della più pura, che ſi può ottenere coi metodi conoſciuti ſin ora. Si è creduto fin qui da tutti, che queſto reſiduo di aria, che è aria comune, ma in parte alterata, e probabilmente dal flogiſto, foſſe naturalmente unita all' aria fiſſa, talchè non poteſſe trovarſi queſta ſenza di quella. In queſt' aria una candela può bensì arderci, ma per meno tempo, e men bene, che nell' aria comune: un animale ancora ci vive, ma per minor tempo, e non sì bene, che nell' aria comune, e l' aria nitroſa non la diminuiſce che in parte, cioè meno dell' aria comune. Queſte proprietà, come ognun vede, convengono coll'aria comune alterata in parte dal flogiſto.

Ma d' onde venga queſto reſiduo dell' aria fiſſa, e come ſi trovi egli unito a quell' aria, reſta ancora da ſaperſi. Si crede comunemente che l' aria fiſſa non poſſa mai eſſere ſcompagnata da quell' aria comune, e che la prima aria non eſiſta mai ſenza la ſeconda.

Suppoſta l'eſiſtenza neceſſaria di una parte d'aria comune nell' aria fiſſa, ſi può domandare in qual maniera quell' aria è unita all' aria fiſſa, o in quale ſtato ſi trovi eſſa dentro l' aria fiſſa medeſima. Una tale quiſtione è ſuſcettibile di eſperienze, e di eſperienze dirette, talchè la ſoluzione pare che ſia in mano del Fiſico oſſervatore.

Si ſa che l' aria nitroſa diminuiſce l' aria comune, e tutte le arie reſpirabili. Se vi foſſe dell' aria comune meſcolata all' aria fiſſa, dovrebbe vederſi una diminuzione molto ſenſibile, quando ſi uniſcono inſieme aria nitroſa, ed aria fiſſa; e queſta diminuzione ſarebbe in ragione della quantità, e qualità dell' aria comune. Si ſa che l' aria fiſſa la più pura laſcia dopo ſcoſſa nell' acqua circa $\frac{1}{40}$ del ſuo volume; onde ſe ſarà introdotta una quantità un poco grande d' aria fiſſa dentro d' un tubo aſſai alto, e pieno di mercurio, la diminuzione potrà eſſere aſſai ſenſibile. Io poſſo però aſſicurare, che tutte le volte che ho operato ſopra aria fiſſa aſſai pura, non ho mai potuto accorgermi di diminuzione alcuna, almeno non mi è mai paruta ſenſibile, e certa; ma avevo l'avvertenza di non ricever l'aria ſull' acqua, ma ſul mercurio, e di non ne ricevere che dopo che ne era eſcita una gran parte. Queſto eſperimento è molto difficile, ed eſige grande attenzione dalla parte dell' oſſervatore, e grandi cautele.

Eſcluſa così l' ipoteſi di ſemplice meſcuglio di aria comune nell'aria fiſſa, reſta da vedere d'onde viene quel reſiduo di aria, e come ſi trovi nell' aria fiſſa dopo sbattuta nell' acqua, o ricevuta ſull' acqua. Un gran numero di eſperienze mi hanno fatto vedere, che quel reſiduo di aria comune non è una quantità coſtante, benchè l' aria fiſſa ſi ſia cavata dai medeſimi corpi, e coi medeſimi mezzi; ho trovato ancora, che è più, e meno flogiſticata ſecondo le varie circoſtanze e maniere di cavarla dai corpi. In generale mi è paruto di vedere che l' aria fiſſa, che reſta molti giorni a contatto dell' acqua, laſcia un reſiduo più grande di aria comune non buona. Tutte queſte oſſervazioni potrebbero già cominciare a farci ſoſpettare, che o tutto o parte di quel reſiduo d'aria ſi produceſſe nell' atto, che l' aria fiſſa viene aſſorbita dall' acqua, cioè che una parte d'aria fiſſa in que' caſi prendeſſe la qualità d' aria comune men buona leggiermente flogiſticata.

Tutte le mie eſperienze fatte fin qui mi hanno fatto vedere, che quando l' aria fiſſa è diminuita di qualche ſoſtanza, laſcia una quantità più o meno grande di aria più e meno flogiſticata, la quale diventa aria affatto ſimile al reſiduo ordinario dell' aria fiſſa, ſe ſi sbatte lungamente nell' acqua. Queſte ſoſtanze, che diminuiſcono, o aſſorbono l' aria fiſſa, ſono di quelle che abbondano naturalmente di flogiſto. La ſcintilla elettrica medeſima rende una parte dell' aria fiſſa inaſſorbibile alle acque, come l' ho provato più volte. Premeſſo tutto queſto io rifletto, che quando ſi ſcuote nell' acqua l' aria fiſſa, l' aria fiſſa è diminuita per gradi da quel fluido, ed aſſorbita dall' acqua. L' acqua non è affatto priva di flogiſto, e può flogiſticar l' aria comune sbattuta in eſſa lungamente, e render men buona fino l' aria deflogiſticata medeſima. Deve adunque l' acqua flogiſticare in parte l' aria fiſſa nell' atto di aſſorbirla; e ſiccome queſta aſſorbizione ſi fa da noi in poco tempo, e l' acqua non ha che poco flogiſto, non ſi flogiſticherà che una piccola parte di aria fiſſa, come in fatti ſi oſſerva; e per queſta iſteſſa ragione ſi troverà una più gran quantità di aria fiſſa flogiſticata quando ſi laſcia aſſorbire dall' acqua lentamente, o quando ſi uniſce ai proceſſi flogiſtici immediatamente.

Vi è un' eſperienza che par deciſiva affatto. Ho fatto aſſorbire all' acqua una gran quantità d' aria fiſſa; ho precipitato la calce in terra calcarea colla medeſima aria fiſſa. Nè l'acqua, nè la terra calcarea avevano certamente aſſorbito il reſiduo naturale inaſſorbibile dell'aria fiſſa. Ho cavato dalla calce precipitata, e dall'acqua l'aria fiſſa, ed ho trovato il ſolito reſiduo d'aria inaſſorbibile comune men buona. Ho cavato l'aria fiſſa dall'acqua collo ſcuoterla appena un poco, l'ho cavata dalla terra calcarea coll'olio di vitriolo. Quando ſi voleſſe ſoſpettare, che quell'aria era prima nell'acqua, ſoſpetto poco ragionevole atteſo il picciolo moto impreſſo nell'acqua nel cavarla, nulla ſi può opporre di queſto all'eſperienza della calce.

E' adunque un fatto d'eſperienza, che non eſiſte neceſſariamente una porzione d'aria comune men buona coll'aria fiſſa, e che quell'aria non comincia ad eſiſtere, che a proporzione che l'aria fiſſa è diminuita, e che le ſi uniſce del flogiſto.

Così riſoluta queſta quiſtione per quanto a noi pare, che a prima viſta poteva ſembrar più curioſa, che utile, ſi può ora dedurre da eſſa un corollario della più grande importanza: ſe quel reſiduo d'aria comune, che ſi ritrova nell'aria fiſſa, non eſiſteva prima in eſſa, ma ſi è formato in ſeguito col ſemplice ſcuoterla nell'acqua, ne ſegue che l'aria fiſſa può diventare in parte aria comune, o aria reſpirabile.

Benchè il mezzo uſato per operare queſto maraviglioſo cangiamento paja ſemplicemente meccanico, giacchè ſi può ottenere coll'acqua la più pura, o ſia coll'acqua diſtillata, io ſono però perſuaſo del contrario. Io credo che tutto queſto ſi faccia per un principio puramente chimico, e che il flogiſto ſolo operi tutti queſti cangiamenti. Certo è che l'acqua diſtillata medeſima può flogiſticare le arie reſpirabili, onde potrà ancora dar del flogiſto all'aria fiſſa medeſima. Si vedrà in altro luogo come il flogiſto poſſa render l'aria fiſſa inalterabile all'acqua, e come allora poſſa renderſi aria comune reſpirabile.

Illuſtrata

Illuſtrata in queſta maniera la ſeconda quiſtione da noi propoſta, poſſiamo ora paſſare all' eſame della prima, che è ſopra l'aria fiſſa eſiſtente nell'atmosfera.

Si crede dalla comune de' Fiſici d' oggidì, e dai più valenti Chimici, che nell'atmosfera eſiſta una gran quantità d' aria fiſſa, e credono di provarlo col farci oſſervare, che moltiſſimi corpi ſi decompongono continuamente ſulla ſuperficie della terra tanto foſſili, che animali, e vegetabili, i quali ſon pieni di quel fluido aeriforme. Un' altra prova ſi adduce da eſſi, ed è che coi proceſſi flogiſtici ſi trova una gran quantità d'aria fiſſa nell'aria comune, a cui ſi ſono uniti, onde ſpiegano la produzione di quell' aria per una precipitazione chimica. Ma una prova di maggior forza cavano eſſi in favore delle loro ipoteſi dall'eſpoſizione nell'atmosfera di ſali alcalini cauſtici, e dalla calce ſciolta nell' acqua; i primi criſtallizzano alla fine, la ſeconda cade in terra calcarea, e tanto i ſali, che la terra ſi trovano ricchiſſimi d'aria fiſſa. Io però ſon di parere, che le ragioni addotte di ſopra non baſtino per provare con tutta la ſicurezza l'eſiſtenza dell'aria fiſſa nell'atmosfera. E' vero per riſpondere alla prima difficoltà, o prova, che ogni giorno ſi ſchiude dai corpi una gran quantità di quell'aria, ma è altresì vero, che infiniti corpi l'aſſorbono ad ogni iſtante. L'acqua, che cuopre forſe i due terzi del globo, è uno di queſti grandi agenti deſtinati ad aſſorbirla. Non volendo contare i fiumi, le fonti, le acque, ed i vapori cadenti ſulla terra, le piante ſteſſe ne aſſorbono continuamente, ſe ne danno continuamente, talchè non ſi prova da neſſun fatto ſicuro, che i corpi che l'aſſorbono non ſieno molto più di quelli che ne tramandano, e che non vi ſieno più principj e molto più attivi per aſſorbirla, che per iſchiuderla dai corpi.

Rifletto ancora, che l'aria fiſſa eſſendo molto più peſante dell'aria comune non può alzarſi, che pochiſſimo dentro di eſſa, ma deve tenerſi raſente il ſuolo. Una prova ne abbiamo nella grotta del Cane vicino a Napoli, dove l' aria fiſſa non ſi alza mai al di ſopra di un piede, o poco più. L' iſteſſo ſi oſſerva appreſſo a poco nei Tini dove fermenta la birra. L' aria a poca altezza e diſtanza dal Tino è pura, e ſaniſſima, e ſi reſpira ſenza incomodo alcuno: l' iſteſſo ſi oſſerva nella grotta del Cane, e benchè ſorta dalla terra un fonte perenne di quell' aria mefitica, non per queſto ſi reſpira men bene l' aria di quella grotta, ſegno che non ſi meſcola l' aria fiſſa coll' aria comune, e che in ogni iſtante ne viene aſſorbita quanta ne è tramandata. Io ho voluto eſaminare col mio Evaerometro la bontà dell' aria vicino al ſuolo, e più lontana dal ſuolo, e non vi ho mai potuto ſcorgere differenza alcuna. Ho ſcoſſo quelle arie nell' acqua pura, e nella diſſoluzione di calce, e non mi ſono accorto, che differiſſero in nulla, nè che l' una foſſe più diminuita dell' altra.

Una mia curioſità mi portò ad oſſervare la ſeguente eſperienza. In uno ſtanzino verſai circa 20000. poll. cub. d' aria fiſſa. Le fineſtre, e gli uſci erano chiuſi. Diedi moto all' aria della ſtanza con un drappo teſo per 10. minuti, e dopo 30. altri minuti preſi due bocce d' aria l' una all' altezza del ſuolo a 5. piedi, l' altra di mezzo piede. Scoſſi queſt' aria nell' acqua, e non fu punto diminuita.

Appariſce adunque, che anche allora che ſi meſcola una quantità molto notabile di aria fiſſa in una quantità limitata d' aria comune, poco dopo non ſi oſſervano più gli effetti, o le proprietà dell' aria fiſſa, ſegno che viene aſſorbita preſtiſſimo dai corpi eſterni.

Vi è un altro argomento contro la preteſa aria fiſſa natante nell' atmosfera, che par ſenza replica. Si ſcuota lungamente un pollice, o più di tintura di turneſole dentro di un gran recipiente pieno di aria comune della capacità di ſette in ottocento pollici; il turneſole non cangerà per queſto di colore. Si cambj l'aria comune per quante volte ſi vuole, e ſi ſcuota di nuovo, non per queſto ſi cangerà in roſſo il turneſole, che pure la più piccola quantità di aria ſiſſa cangia nell'iſtante. Queſta eſperienza può portarſi sì in là volendo, che arrivi a dimoſtrare, che non vi è nè anco un millioneſimo di aria ſiſſa nell'aria comune, quantità, che ſi può traſcurare nella preſente ricerca, e che non ha neſſun rapporto coi fatti rapportati di ſopra dai Fiſici.

Ma ſi dirà che forſe l'aria ſiſſa è unita all' aria comune in un modo particolare, e che allora non dimoſtra più le ſue prime qualità. Se la prima opinione è comune a tutti i Fiſici moderni, queſta ſeconda lo è alla maggior parte dei Chimici, e dei Filoſofi, e baſterà nominare *Bergman*, e *Scheel* tra i Chimici per tutti gli altri, e *Prieſtley* tra i Filoſofi. Nell' ipoteſi di queſti Filoſofi il flogiſto, che ha più affinità coll'aria comune, o reſpirabile, la laſcia ſtaccarſi da lei, e precipitare. Ma queſto argomento ſuppone due coſe non dimoſtrate ancora, l'una che l'aria ſiſſa ſia tale per decompoſizione, l'altra che ſia impoſſibile, che ſi formi l'aria ſiſſa in quelle circoſtanze. Ma tutto queſto non par molto veriſimile ſe ſi conſidera che ſe ſi mette un poll. d'aria comune a contatto del mercurio, ſi trova il pollice d'aria ſiſſa dopo qualunque tempo con tutte le ſue qualità di prima.

L'eſperienza mi ha dimoſtrato che l' acqua diſtillata ſe è eſpoſta all' aria s' impregna di aria deflogiſticata e non mai di aria ſiſſa, eppure ſi ſa che l'aria ſiſſa ha più affinità coll'acqua dell'aria deflogiſticata medeſima.

Ma vi è un argomento, che par dimoſtrare che l'aria ſiſſa, che ſi trova nell'aria comune, ſi produce allora, che noi la troviamo in quell'aria.

Le arie artificiali, che non ſono ſtate mai aria ſiſſa, che non ſono mai ſtate aria comune, sbattute nell'acqua, e reſe reſpirabili di nuovo, moſtrano coi proceſſi flogiſtici l'aria fiſſa come prima; e ſe dopo di aver cavato l'aria fiſſa da eſſe ſi rendono reſpirabili di nuovo coll' acqua, danno della nuova aria fiſſa. L' iſteſſo ſi dica dell'aria comune ſpogliata la prima volta della ſua ſuppoſta aria fiſſa, ſe ſi renderà reſpirabile la ſeconda volta, darà nuova aria fiſſa, e così di ſeguito.

Qui ſi vede troppo chiaro che l'aria fiſſa non eſiſteva in quelle arie non mai compoſte di aria comune, e che nell' aria comune ſpogliata di eſſa la prima volta, ſi è formata di nuovo coi proceſſi flogiſtici. Qui non pare che ſi poſſa ricorrere a precipitazioni di arie fiſſe, giacchè ne' primi caſi non vi è mai ſtata tale compoſizione, e nell' ultimo caſo, ſe vi fu nel principio, fu poi levata in ſeguito.

Le coſe finora dette, ed oſſervate da noi ci ſomminiſtrano una riſpoſta contro la difficoltà de' ſali alcalini, che criſtallizzano all'aria aperta, ed alla calce, che ſi ſatura di aria fiſſa, che è l'argomento più forte che ſi poſſa addurre in favore di quella ipoteſi. Non trovo niente impoſſibile, che per il contatto continuato tanto de' ſali alcalini, quanto della calce coll' aria atmoſferica ſempre in moto, poſſa formarſi poco a poco dell' aria fiſſa, dove non ve n'era prima, e ſaturarſi quei corpi di eſſa. Si è veduto ſopra, quanto è facile il formar di quell' aria in mille circoſtanze. Non ſi prova poi che la calce ſia affatto priva di flogiſto, e il dotto Preſidente di Digione ha provato, che l'alcali cauſtico contiene beniſſimo di quel principio. L'iſteſſo ſi dica della terra ponderoſa, e della magneſia, che ſi ſaturano anche eſſe eſpoſte all'aria aperta. Non ſi ſaturano dell' aria fiſſa eſiſtente di prima nell'atmoſfera, ma bensì dell' aria fiſſa, che ſi forma in quelle circoſtanze per il lungo contatto di quelle materie ſciolte nell'acqua non mai priva affatto di flogiſto.

Se io non credeſſi di abuſarmi anche di troppo della voſtra compiacenza, potrei parlarvi di mille coſe importanti, che ho trovate nel ſecondo Tomo del voſtro Amico Illuſtre. Permettetemi almeno che io vi parli brevemente di alcune poche.

Il Sig. *Bergman* parlando dell' origine dell' aria fiſſa ſcrive: *modificationem acidi nitroſi credit Doct. Prieſtley, immo & nitroſam, & vitriolicam diverſas tantum variationes eſſe urget, nec refragabor, ſed fundamentum quo hae nituntur adſertiones mihi valde lubricum videtur.* Confutate poi le ragioni del Filoſofo Ingleſe finiſce con dire " *alioquin non diffiteor mihi haud improbabilem eſſe conjecturare de ortu acidi aerei & nitroſi, uti mox fuſius explicabitur.* (*a*)

Se codeſto valente uomo aveſſe conoſciuto le mie eſperienze ſulla decompoſizione totale dell' acido nitroſo in aria fiſſa, in aria flogiſticata, ed in aria comune, avrebbe ſubito veduto, che quello che era un'ipoteſi appoggiata a fallaci principj in *Prieſtley*, ed una ſemplice congettura per lui medeſimo, era una verità di fatto. Queſte mie eſperienze ſull' acido nitroſo furono da me fatte a Parigi, e comunicate là ai due illuſtri Chimici i Sigg. *Darcet* e *Ruelle* fin d'allora, e dopo furono da me ripetute in Londra alla preſenza del mio Amico M. *Ingen-houſz*. I riſultati di eſſe ſi leggono ſtampati in Londra nel 1779. ed inſeriti nell'opera del mio Amico, che l'anno dopo egli ſteſſo traduſſe in franceſe col titolo di *Experiences ſur les vegetaux*, e pubblicò in Parigi. Se ne parla in queſta opera alla pag. 115., ma nulla vi ſi dice del metodo da me adoperato, nè delle quantità aſſolute, e relative dei prodotti, e delle arie da me ottenuti.

Io non conoſco neſſuno altro acido minerale, che ſi poſſa ridurre per intiero in ſemplice aria, benchè io poſ-

---

(*a*) Opuſc. Chem. & Phyſ. T. II. pag. 360.

ſa cavar delle arie da tutti gli altri acidi abbondantemente, e che una parte di eſſi ſieno ſtati da me decompoſti in arie. Gli acidi vegetabili, ed alcuni degli acidi animali, e foſſili analoghi ai vegetabili ſi decompongono anche eſſi in arie per intiero. Queſta importante verità ſomminiſtra un fortiſſimo argumento di induzione, che tutti gli acidi in ultima analiſi non ſieno che arie, o per meglio dire per fuggir qui qualunque diſputa e ipoteſi, dico che quegli acidi ſi preſentano ſotto forma di fluidi elaſtici aeriformi, o queſto ſegua per addizione, o per ſottrazione di qualunque ſoſtanza, non conoſcendo altra ſorta di trasformazioni ne' corpi. Tutto queſto io mi luſingo d' averlo provato in alcune Memorie ſtampate ſugli acidi vegetabili, ed animali nel Giornale dell' Ab. *Rozier*; ma è molto più ſorprendente, e nuovo affatto che ſi poſſa provare l' iſteſſo ſull' acido nitroſo, che è acido minerale.

Le mie eſperienze ſui vegetabili hanno fatto dire al celebre Traduttore di *Bergman* il Preſidente *Morveau*, che l' aria fiſſa è probabilmente l' acido univerſale tanto cercato dai Chimici antichi, e del paſſato ſecolo, e con sì poco ſucceſſo. Se egli aveſſe conoſciuto anche le altre mie eſperienze ſull'acido nitroſo, avrebbe potuto dare un grado molto maggiore di probabilità a quell' ipoteſi, la quale non ſarà mai portata a quel grado di evidenza, che ſi domanda nelle coſe Fiſiche, ſe non quando ſi ſarà provato, che tutti gli altri acidi ancora ſi decompongono per intiero in arie: diſſi per intiero, perchè la poca aria, che ſi cava de eſſi anche ora coi metodi già noti, non forma neſſuna prova, e rimane quell' opinione una ſemplice ipoteſi vaga e iſolata da qualſivoglia ragione. Le ſole mie eſperienze fatte ſopra tanti acidi creduti dai Chimici affatto diverſi fra di loro, ci ſomminiſtrano almeno una fortiſſima prova d' induzione, quando prima di eſſe non altro al più ſi poteva dire, ſe non che non era ancor dimoſtrato per impoſſibile che l'aria fiſſa non poteſſe eſſere l' acido primitivo, l'acido univerſale, verità ſterile, equivalente al nulla, e da sbandirſi dalla Fiſica moderna.

Il deſiderio di trattenermi con voi, e di parlare delle ſcoperte del voſtro Amico Illuſtre mi rende più lungo di quello, che vorrei eſſerlo, onde paſſerò rapidamente ad un altro punto, che occupa da qualche tempo molti Filoſofi eſperimentatori, nelle di cui mani ſi è formato un ramo di nuova ſcienza in queſti ultimi anni, che promette moltiſſimo, e ſino de' vantaggi reali alla ſalute pubblica. Il Sig. *Bergman* alla pag. 369. della ſua opera da noi citata parlando de' vegetabili ſi ſpiega così: *novimus vegetabilia in tenebris langueſcere, & colore ſpoliari, ita autem vitiata radiis ſolaribus expoſita cito reſtitui. Scilicet lux conſtat materia caloris cum exceſſu flogiſti. Hic exceſſus primus abſorbetur, & dein ſenſim licet difficilius etiam illud inflamabile ſecernitur, quod materiam conſtituit caloris, nulla enim ſine calore vegetatio, & hoc ipſum alterum principium, aer bonus laxatur. Itaque pro inæquali caloris gradu, pro varia vegetabilium poſitione reſpectu lucis & eorum diverſa lucem coloremque decomponendi virtute, non poſſunt non diſſimiles oriri effectus. Immo aqua ipſa, quae puriſſima videtur, ſubtiliſſima non raro fovet corpora organica, viſum fugentia, quae in luce ſolari conſtituta eamdem vegetando decomponunt & bonum provocant aerem.*

Io ho voluto portare per eſteſo tutto quel paſſo, perchè contiene una nuova ſpiegazione ſopra le diverſe arie, che ſi ottengono eſponendo i vegetabili alla luce, ed all' ombra. Intorno ai fatti principali che ſi oſſervano nelle piante eſpoſte al ſole, e all'ombra, io mi riporto intieramente alle belle, ed originali eſperienze dell' illuſtre mio Amico, e Filoſofo M. *Ingen–houſz*, per cui deve aver meritato giuſtamente la ſtima dei veri Fiſici.

Ho voluto anche io ſperimentar le mie forze ſopra di queſta materia sì vaſta, e che ha fatto de' progreſſi sì rapidi in pochi anni; e credo di eſſere ben fondato dopo un' infinità d' eſperienze da me fatte, e variate in mille maniere ſopra più di 700 piante, a conſiderar queſta materia, come ancor nuova; e credo di potere aſſicurare che l' eſperienze riportate in generale fin qui dai diverſi Scrittori ſono ancora in troppo picciol numero, non abbaſtanza variate, e limitate a troppo poche piante, perchè non ſieno ſoſpette, o falſe le conſeguenze, che ſe ne ſono dedotte, e le teorie, che ſi è voluto immaginare per iſpiegarle.

I riſultati di alcune di queſte mie eſperienze ſono ſtati comunicati qui a diverſi miei Amici ſino da due anni fa, e molte di eſſe eſperienze ho io fatto vedere a più perſone, che mi onoravano in caſa della loro preſenza. Baſta che qui vi dica, che cangiata una ſola circoſtanza nelle eſperienze delle piante eſpoſte al ſole, circoſtanza, che le accoſta ancora di più al loro ſtato naturale, tutto ſi vede cangiato, e l'aria, che doveva eſſere deflogiſticata e ſana, ſi trova per contrario micidiale, e mefitica. Non vi dico di più perchè ſpero fra poco di pubblicar le mie Eſperienze in tutto il loro dettaglio. Da queſto voi vedete che quel che ſi è pubblicato finora ſopra queſta materia è falſo nella ſua generalità, o per meglio dire non è vero che in qualche caſo o accidente, o circoſtanza che ſi voglia dire, ed anche queſti fatti sì limitati non ſono i più naturali alle piante, che finiſce di rovinare ogni coſa. Per riguardo al dettaglio delle eſperienze fatte ſulle piante, ed eſpoſte al ſole ed all' ombra, ſi deve conſultare come diſſi l'eccellente Opera ſopra citata di M. *Ingen-houſz*.

Finiſco coll' aſſicurarvi che quei corpi organici, di cui parla il Sig. *Bergman*, e che ſi trovano nell' acqua dando dell' aria pura eſpoſti al ſole, ſono ſpeſſo ſemplici animali, e non piante, come ſi è creduto finora da tutti.

tutti. Queſti animali ſono di due ſpecie diverſe, l'una è formata di minimi animali rotondi quaſi ſempre in moto; l' altra è fatta di animali oviſormi e quaſi fatti a baccelli con poco moto, ma molto più grandi de' primi. Speſſo ſi trovano le due ſpecie inſieme nella ſteſſa acqua, e qualche volta ſi trova la prima ſpecie ſola. La ſpecie globulare è la medeſima, che ſi trova nelle acque ſtagnanti, per cui quelle acque appariſcono nella ſuperficie verdi, e aranciate. Gli oſſervatori microſcopici le han credute piantine minime: ma ſono più di dieci anni, che mi ſono aſſicurato, che quel colore non dipende da ſoſtanze vegetabili, ma da piccoli animali, e che i Bottanici, e gli oſſervatori ſi ſono ingannati.

E' per altro vero, che ſi trova più ſpeſſo nelle acque eſpoſte al ſole, oltre quelle due ſpecie di animali di cui ſi è parlato, qualche altra pianta minima microſcopica, come per eſempio la Tremella ecc. ma voi ſapete, che la Tremella è un corpo organizzato dotato di vita, e di ſentimento, come vi feci oſſervare fin da quando paſſaſte per Firenze nel voſtro viaggio d' Italia, e come l' avrete letto nelle mie opere.

Ma quando ancora non ſi voleſſe conſiderare la Tremella come un animale-pianta da chi non ſa oſſervare da sè, non ſi può dubitare un momento della natura animale delle altre due qualità di corpi; ed ecco che ci ſiamo aperti la via ad un belliſſimo fenomeno, e nuovo, ed inaſpettato, ed è che vi ſono degli animali, che eſpoſti al ſole nell' acqua danno aria deflogiſticata, come la danno le piante le più atte a produrre quell' aria. Tutti gli animali ſin qui conoſciuti, e comunque eſpoſti al ſole, ed all'aria, non danno che aria micidiale, e meſitica.

Non è adunque il ſolo regno vegetabile deſtinato a purificar l' aria atmoſferica, ma vi ſono ancora degli animali, che fanno l' iſteſſo, benchè poi ſia vero come ſi vedrà dalle mie *eſperienze ſui vegetabili*, che va limitata anche la prima propoſizione contro tutto quello, che ſi è creduto finora dai Fiſici oſſervatori; che anzi ſarebbe tutto l'oppoſto, e le piante in generale nel loro ſtato naturale, o almeno in uno ſtato più vicino al naturale di quello, che fin qui ſi è praticato dagli altri, come io mi luſingo di aver fatto, danno aria mefitica, micidiale, benchè eſpoſti al ſole. Si devon bensì eccettuare le piante craſſe o ſucculenti, che danno aria deflogiſticata anche in quelle circoſtanze medeſime, in cui le altre la danno mefitica. Io credo di eſſermi ſpiegato abbaſtanza per far capire, che le mie eſperienze portano non ſolo a diſtruggere i fatti e le teorie immaginate fin qui ſopra queſta importantiſſima materia, ma che vanno a formare un nuvo ramo di Scienza ignoto ancora ai Fiſici, e non da alcuno previſto ancora.

DELL' IRREDUCIBILITA'

DELLA FORMULA CARDANICA A FORMA FINITA, ALGEBRAICA, E LIBERA DA ASPETTO IMMAGINARIO.

Del Sig. Anton-Mario Lorgna Direttore delle Scuole Militari di Verona.

INTRODUZIONE.

E' paleſe oggimai in che conſiſta il nodo famoſo dell' equazioni cubiche nell' Algebra Carteſiana. Le equazioni di terzo grado, ſiccome è noto, ſono reducibili tutte alla forma ſeguente

$$(A) \ldots x^3 - px - q = 0$$

in cui p e q ſono quantità razionali. Si tratta di determinare i tre valori di x in p e q, quando tutti e tre eſſer debbono reali e diſeguali, e neſſun diviſore eſatto dell' ultimo termine q ſoddisfa' all' equazione; il che vuol dire, che tutti e tre que' valori debbono anche eſſere irrazionali. *Scipion Ferri* Italiano fu il primo che ci deſſe la riſoluzione generale dell' equazione (A) ſotto queſta forma

$$(B) \ldots x = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

la quale poi aſſunta e divulgata da *Cardano* preſe il nome di formula Cardanica. Ma quando tutti e tre i valori di x debbono eſſere reali e diſeguali, ſi dimoſtra che $p^3 : 27$ è maggiore di $q^2 : 4$. Dunque nel caſo delle tre radici reali e diſeguali, la quantità ſotto il ſegno radicale quadratico $\sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ diventa neceſſariamente negativa. E come, atteſe le nozioni convenute circa i ſegni affermativi e negativi dell' Algebra, è impoſſibile la radice d' indice pari di quantità negativa, che perciò vien detta quantità immaginaria; così nel caſo delle tre radici reali e diſeguali la formula Cardanica involge ſotto ciaſcheduno de' radicali cubici una quantità immaginaria. Faremo vedere a ſuo luogo, che qualunque volta l' equazione (*A*) abbia radice razionale, caſo in cui queſta medeſima radice è pur diviſore eſatto dell' ultimo termine *q*, anche la formula Cardanica (*B*) ſi ſpoglia non ſolamente dell' aſpetto irrazionale, ma degl' immaginarj eziandio, che ſvaniſcono per contrarietà di ſegni, e ci riſulta il valore razionale, o la radice razionale dell' equazione. E così pure accade, ſe tutte tre le radici reali aveſſero da eſſere razionali, ſomminiſtrandole tutte ad una ad una la formula (*B*). Di modo che non una ſola, ma tutte tre le radici reali dell' equazione ſono rappreſentate puntualmente e compreſe nella formula Cardanica, ſiccome il volle dimoſtrare il Sig. d' *Alembert* direttamente (*Opuſ. Mat. T. V. Parte* 1. *pag.* 204), e può non difficilmente dimoſtrarſi. Ma allorchè non ha l' ultimo termine *q* alcun diviſore eſatto, che ſoddisfaccia all' equazione, non ſi è ſcoperto ancora alcun metodo, con cui ſi ricavino i tre valori, bensì irrazionali, come debbono eſſere, ma liberi da immaginarj. L' eſpreſſione di queſti valori per ſerie, e con un' infinità di termini, come che continuamente decreſcenti e reali, non fa al caſo; come non lo fa neppure l' eſpreſſione per ſeni, e coſeni di natura traſcendente, per quello che ſi ricercano valori finiti, com' è l' eſpreſſione Cardanica, valori algebraici, e valori in queſto ſolo da' Cardanici differenti, che ſieno liberi da aſpetto immaginario. Ancorchè ſi dimoſtri incontraſtabilmente eſſere di valor reale l' intera eſpreſſione Cardanica, cioè eſſere reale la quantità

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

che eſprime la radice dell' equazione, ad ogni modo il non eſſerſi giammai potuto eſprimere alcuna delle radici dell' equazione (*A*), nel caſo, che tutte e tre eſſer debbano reali, diſeguali, e non razionali, e p q ſieno razionali, ſotto altra forma ugualmente finita, ed algebraica, ma fuor d' aſpetto immaginario, ha fatto, che ſiaſi ſempre queſto caſo denominato irreducibile. Trattandoſi pertanto di rintracciare una dimoſtrazione aſſoluta di queſta irreducibilità, non baſta il dimoſtrare, che nel caſo propoſto non è poſſibile di riſolvere per alcun metodo cognito l'equazione (*A*), e di trovare una radice ſotto le condizioni enunciate, perchè non reſta mai eſcluſa la poſſibilità di farlo per metodi, che non ſono ancor noti: nè rigoroſamente baſta, per una ſimile ragione, il dimoſtrare, che maneggiando e ſvolgendo l' equazione (*A*) per qualunque metodo conoſciuto, l'ultimo riſultamento ſia ſempre o l' eſpreſſione Cardanica (*B*), o altra ſimile, contenente ſempre quantità immaginarie. Il modo incontraſtabile di provare l' aſſoluta irreducibilità del caſo in quiſtione è quello di dimoſtrare direttamente, ch' è aſſolutamente e per natura ſua impoſſibile il ridurre l'eſpreſſione Cardanica a forma finita algebraica, e libera da aſpetto immaginario. Siccome è fuor di dubbio, che quantunque ogni termine del Binomio ſia in sè quantità aſſolutamente immaginaria, ciò non oſtante la combinazione di tutti e due coſtituiſce una quantità aſſolutamente reale, ed eſprime ſicuramente la radice reale dell' equazione; così sì fatta dimoſtrazione dell' aſſoluta irreducibilità di quel caſo ſerve nel tempo ſteſſo ad eſcludere neceſſariamente la poſſibilità di riſolvere per alcun immaginabile cognito od incognito metodo l' equazione cubica nel caſo in quiſtione, e di aſſegnarvi la radice finita, algebraica, ed immune da immaginarj : altrimenti la radice Cardanica ſarebbe reducibile a forma finita, algebraica, ed eſente da immaginarj , contro la dimoſtrazione . Ed ecco come il tentare una dimoſtrazione dell' irreducibilità aſſoluta del Binomio Cardanico, dipendente dalla natura de' termini ſteſſi del Binomio, tende direttamente, e neceſſariamente a troncare ogni ulteriore perquiſizione ſu queſto propoſito. La ſtrada, che ho battuto in queſta breve Memoria per rinvenirla, può non ſenza fondamento giudicarſi più diretta dell' altra, che ho preſo in uno ſcritto pubblicato nel 1776., che ha per titolo *de Caſu irreductibili tertii gradus* ecc. *Exercitatio Analytica*. Giudicheranno i Geometri, ſe vi ſia riuſcito, e ſe ſia impoſto fine alla quiſtione.

DEFINIZIONI.

§. I. Irrazionale del grado n è quello, in cui neſſuna quantità moltiplicata $n - 1$ volte per sè ſteſſa può produrre la quantità ſotto il vincolo radicale. Le quantità pertanto $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[n]{(P+Q)}$, $\sqrt[n]{(P+Q+R)}$ ecc. ſaranno tutte irrazionali del grado n, toſto che non v' abbia alcuna quantità, la quale moltiplicata $n - 1$ volte per ſe ſteſſa, poſſa produrre le grandezze P, $P+Q$, $P+Q+R$ ecc. qualunque coſa ſia P, Q, R ecc.

II.

Irrazionale ſemplice è quello, che non è unito a quantità razionale, come $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[n]{(P+Q)}$ ecc. qualunque coſa ſieno, e in qual numero ſi vuole le quantità ſotto il vincolo radicale. In conſeguenza irrazionale miſto ſarà quello, ch' è accoppiato a quantità razionali, come $A+\sqrt[n]{P}$, $A+\sqrt[n]{(P+Q)}$ ecc. A eſſendo qualunque quantità o compleſſo di quantità razionali.

III.

$\sqrt[n]{P}+\sqrt[m]{(P+Q)}$ ecc. è un irrazionale binomio ecc. toſto che li termini $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[m]{(P+Q)}$ ecc. ſono irrazionali ſemplici, e però vi avrà irrazionale polinomio ſemplice, e miſto, ſecondo che o non vi avrà, o vi avrà quantità razionale accoppiata al polinomio irrazionale.

IV.

Irrazionale immaginario è quello, in cui la quantità ſotto il vincolo è negativa, e l' indice n dell' irrazionalità è pari.

V.

Immaginario ſemplice è quello, che non è unito a quantità reale, razionale, o irrazionale, ch' ella ſia, come $\sqrt[2n]{-P}$, $\sqrt[2n]{(-P-Q)}$ ecc. come pure $\sqrt[n]{\sqrt{-P}}$, che ſi riduce a $\sqrt[2n]{-P}$; e immaginario miſto quello, in cui l' immaginario ſemplice è unito a quantità reale, come $A+\sqrt[2n]{-P}$, eſſendo A razionale, o irrazionale reale.

VI.

Immaginario compoſto può dirſi quello, in cui un immaginario miſto è ſotto vincolo radicale. Negl' irrazionali reali ognuno de' $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[n]{(P+Q)}$ ecc. è ſemplice in sè. Ma negl' immaginarj non può confonderſi $\sqrt[n]{(A+\sqrt{-P})}$ con $\sqrt[n]{\sqrt{-P}}$, eſſendo A reale. Per diſtinguere dunque $\sqrt[n]{(A+\sqrt{-P})}$ dagl' immaginarj ſemplici e da' miſti, il diremo compoſto.

Corollarj.

I.

§. II. Non ſarà pertanto $\sqrt{(5+2\sqrt{6})}$ un irrazionale di ſecondo grado, poichè il binomio $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ moltiplicato una volta per sè produce la quantità ſotto il vincolo $5+2\sqrt{6}$ (*Def. I*), e così per qualunque altro grado.

II.

Se dunque la quantità compreſa ſotto il vincolo o ſegno dell' irrazionalità ſarà razionale, è manifeſto, che non vi avrà razionale dal di cui prodotto poſſa ella riſultare giammai.

III.

E ſimilmente ſe la grandezza ſotto il ſegno ſarà comunque compoſta di razionale, ed irrazionale dello ſteſſo, o d' altro grado, non vi avrà nè razionale, nè irrazionale, nè miſto di razionale ed irrazionale, che moltiplicato in sè $n-1$ volte poſſa produrla giammai.

IV.

La ſomma in conſeguenza, e la differenza di due o più irrazionali ſemplici, cioè un polinomio irrazionale ſemplice, ſarà ſempre quantità irrazionale.

V.

V.

E parimenti la ſomma, e la differenza di due o più irrazionali immaginarj ſemplici, ſarà ſempre un immaginario. Ma la ſomma, o la differenza di due, quattro ecc., o di tal numero pari d' irrazionali immaginarj compoſti che ſi vuole (*§. I Def. VI*) potrà eſſere quantità reale.

VI.

E non vi avrà mai altra quantità finita, che poſſa equivalere ad una quantità irrazionale ſemplice o miſta, reale o immaginaria, fuorchè ella ſteſſa, che è quanto dire una quantità a sè identicamente uguale. Tutte le infinite forme, che può ella prendere, non ſono in fondo, che grandezze indenticamente uguali all' irrazionale traſformato; il che conſegue neceſſariamente dalla natura medeſima dell' irrazionalità.

SCOLIO.

§. III. Con queſte nozioni elementari ſotto gli occhi è difficile il prender errore al caſo, ch' è frequente, di ſupporre ne' calcoli tale o tal altra quantità come irrazionale, e nel trar conſeguenze dal paragone di quantità irrazionali sì reali, che immaginarie tra di sè, o con altre razionali, od irrazionali. E ſiccome il caſo in quiſtione non è, che un caſo particolare delle equazioni del terzo grado legato intimamente colla loro generale riſoluzione; così, dovendo trattarſi di quello, non è poſſibile di ſtaccarlo talmente dal tutto, che non convenga abbracciare ad un tempo la teoria generale. Ho premeſſo pertanto queſte poche nozioni ſugl' irrazionali a ſcanſamento d' ogni quiſtione di nome, e per appianare nell' equazioni di terzo grado, riſolubili tutte generalmente col metodo Cardanico, le difficoltà, che a' principianti ſingolarmente poſſono occorrere nel maneggio degl' irrazionali, e ſviluppamento de' razionali apparenti ſotto forme irrazionali.

PROPOSIZIONE I.

§. IV. *Se il Binomio* $A+\sqrt{B}$, *in cui* A, B *ſono quantità razionali, e* $\sqrt{B}$ *è un irrazionale ſemplice quadratico, abbia radice cubica, ella dee almeno conſtare di due termini.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, ſe può la radice cubica di $A+\sqrt{B}$ conſtare di un ſolo termine z, razionale od irrazionale ſemplice, dovrà eſſere, elevando al cubo, $z^3 = A + \sqrt{B}$. Se z^3 è razionale, dovrà eſſere $\sqrt{B} = z^3 - A$ quantità razionale, contro il ſuppoſto. E ſe z^3 è irrazionale ſemplice, dovrà eſſere $z^3 - \sqrt{B} = A$, quantità razionale che non può eſſere. Non potendo dunque la radice cubica di $A+\sqrt{B}$ conſtare di un ſolo termine nè razionale, nè irrazionale ſemplice, è manifeſto, che ella dee eſſere compoſta almeno di due termini. Il che ecc.

PROPOSIZIONE II.

§. V. *Se* B *foſſe razionale negativo, cioè* $\sqrt{B}$ *un immaginario ſemplice, la radice cubica dell' irrazionale miſto* $A+\sqrt{B}$ *ſarà anch' eſſa almeno binomia neceſſariamente.*

DIMOSTRAZIONE.

Se ella poteſſe conſtare di un ſol termine z, dovrebbe, come precedentemente, aver luogo l' equazione z^3

$= A + \sqrt{B}$. La quantità z^3 non può eſſere razionale, perchè $\sqrt{B}$, come irrazionale, non può mai eſſere identicamente uguale a quantità razionale, nè come immaginario uguagliare una quantità reale. Ma non può nè pure eſſere z^3 irrazionale ſemplice, nè reale, nè immaginario, mentre dovendo ſuſſiſtere l' equazione $z^3 - \sqrt{B} = A$, dovrebbe nel primo caſo eſſere la differenza di due irrazionali ſemplici uguale a quantità razionale (*§. II Coroll. IV*), e un immaginario a quantità reale; e nel ſecondo eſſere una quantità razionale e reale uguale alla differenza di due immaginarj ſemplici. Se dunque non può eſſere monomia la radice cubica di $A + \sqrt{B}$, ella dovrà almeno conſtare di due termini, poſto che $A + \sqrt{B}$ ſia un cubo perfetto. Il che ecc.

PROPOSIZIONE III.

§. VI. *Dovendo eſſere almeno binomia la radice cubica di* $A + \sqrt{\pm B}$, *ſe ſia ella eſtraibile, li termini della radice o ſaranno entrambi irrazionali, o razionale l' uno, e l' altro irrazionale.*

La Propoſizione è per sè evidente.

PROPOSIZIONE IV.

§. VII. *Se ſi abbia una quantità, conſiderata lineare, compoſta di due parti* A, B, *qualunque eſſe ſi ſieno; e abbiavi un quadrato* C^2 *uguale alla ſomma del quadrato* A^2 *e del triplo quadrato* B^2; *ed un altro quadrato* D^2 *uguale alla ſomma del quadrato* B^2, *e del triplo quadrato* A^2; *il cubo di quella quantità* $A + B$ *è ſempre uguale a due ſolidi, uno de' quali ha per baſe il quadrato* C^2, *e per altezza la parte* A, *e l' altro ha per baſe il quadrato* D^2, *e per altezza l' altra parte* B.

Ciò è manifeſto dalla geneſi iſteſſa de' cubi, e non ha biſogno di dimoſtrazione.

COROLLARIO I.

§. VIII. Eſſendo pertanto $(A+B)^3 = AC^2 + BD^2$, ſi rende pure manifeſto, che qualunque coſa ſia A e B, eſſendo conſiderate grandezze lineari, il cubo di $A+B$ è ſempre compoſto di due ſolidi d' ognuno de' quali è dimenſione, o parte aliquota una delle due quantità A B.

II.

Se una delle due parti B ſia un irrazionale quadratico ſemplice $\sqrt{K}$, qualunque coſa ſia K ſotto il vincolo radicale, purchè $\sqrt{K}$ ſia irrazionale, eſſendo $(A+\sqrt{K})^3 = AC^2 + D^2\sqrt{K}$; e C^2 eſſendo la ſomma del quadrato A^2 e del triplo quadrato di $\sqrt{K}$, il ſolido AC^2 ſarà libero dal vincolo radicale quadratico, qualunque coſa poi ſia K, riferendoſi l' irrazionalità del ſecondo termine a queſto vincolo, per riſpetto al quale $\sqrt{K}$ ſi conſidera lineare, e il ſolo ſolido $D^2\sqrt{K}$ ne reſterà affetto neceſſariamente.

III.

E' impoſſibile in conſeguenza, che il binomio $AC^2 + D^2\sqrt{K}$ abbia altra radice cubica fuorchè $A+\sqrt{K}$, eſſendo $C^2 = A^2 + 3K$, $D^2 = K + 3A^2$ (*Prop. IV*).

IV.

Ma è parimente impoſſibile, che $A+\sqrt{K}$ ſia radice cubica d' altro binomio $M+\sqrt{N}$, che non ſia reducibile a queſta forma $AC^2 + D^2\sqrt{K}$, come è manifeſto.

PROPOSIZIONE V.

§. IX. *Perchè il binomio* $M+\sqrt{N}$, *eſſendo* M N *quantità razionali, poſſa avere per radice cubica il binomio* $a+\sqrt{b}$, *eſſendo* a b *quantità reali*, $\sqrt{b}$ *un irrazionale quadratico ſemplice, biſogna che ſia* a *diviſore eſatto di* M, *e* b *diviſore eſatto di* N.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè non può $a+\sqrt{b}$ eſſere radice cubica di binomio, che non ſia reducibile alla forma $aC^2+D^2\sqrt{b}$, eſſendo $C^2=a^2+3b$, $D^2=b+3a^2$ (§. *VIII Coroll. IV*). Perchè dunque $a+\sqrt{b}$ ſia radice cubica del binomio $M+\sqrt{N}$, biſogna ch' eſſo ſia di quella forma, o a quella forma reducibile. Ma eſſendo M N quantità razionali, $\sqrt{N}$ un irrazionale quadratico ſemplice, ſe $M+\sqrt{N}$ non è attualmente di quella forma, non ammette per natura ſua di eſſervi ridotto (§. *II Coroll. VI*). In conſeguenza perchè queſto binomio poſſa avere $a+\sqrt{b}$ per radice cubica, biſogna che ſia attualmente $M=aC^2$ (§. *VIII Coroll. II*), $\sqrt{N}=D^2\sqrt{b}$. Ma a è una dimenſione, o diviſore eſatto di aC^2, b lo è di bD^4. Biſogna dunque che a ſia diviſore eſatto di M, b diviſore eſatto di N, come s' aveva da dimoſtrare.

SCOLIO.

§. X. Se ſia $A+\sqrt{B}$ radice del grado n del binomio $M+\sqrt{N}$, ſuole comunemente aſſumerſi $A-\sqrt{B}$, come radice del grado n di $M-\sqrt{N}$. Ma queſta poſizione non è giuſta, ſe non ſe nel caſo, che A, B, M, N abbiano una certa relazione tra di sè, fuori del quale la concluſione è falſa. Avendo pertanto da farne uſo nel decorſo di queſta Memoria, non è fuor di propoſito il prendere in eſame accurato queſt' articolo, mettendo in chiaro la conneſſione vera tra le radici de' Binomj $M+\sqrt{N}$, $M-\sqrt{N}$, e la condizione, ſenza di cui, ſe ſia $A+\sqrt{B}$ la radice $n.^{ima}$ del primo, non può eſſere $A-\sqrt{B}$ radice $n.^{ima}$ del ſecondo. Mi ſarebbe forſe ſembrato ſuperfluo il farlo, ſe non trovaſſi nel XIII. Vol. *de' vecchj Comment. di S. Pietroburgo* alla pag. 17., enunciata la coſa in modo, che può indurre in errore agevolmente.

Sia $z+y$ la radice quadrata, per eſempio, del binomio $A+\sqrt{B}$. E' certo che dee neceſſariamente aver luogo queſt' equazione.

$$(P)\ldots.\; A+\sqrt{B}=z^2+2zy+y^2$$

Sin che ſi ſta in queſta generalità, z ed y ſono indeterminate, e poſſono eſſere quel che ſi vuole, purchè ſi ſoddisfaccia all' equazione (P). E ſe ſi aggiunga negativamente da una parte e dall' altra l' irrazionale ſemplice $2\sqrt{B}$, riſulta l' equazione.

$$(Q)\ldots.\; A-\sqrt{B}=z^2+2zy+y^2-2\sqrt{B}$$

equazione neceſſaria al par della prima, e che laſcia le z, y nella ſteſſa indeterminazione. Soddisfacendo all' equazione (P), qualunque coſa riſulti per z ed y, nell' atto che ſi conſeguiſce la radice di $A+\sqrt{B}$, è data pure dall' equazione (Q) la radice di $A-\sqrt{B}$. Queſta è la vera ed unica conneſſione neceſſaria tra le radici di queſti due binomj, sì che eſſendo $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=z+y$, non laſcia pure di eſſere $\sqrt{(A-\sqrt{B})}=\sqrt{((z+y)^2-2\sqrt{B})}$. Ma ſe ſi traggano dall' equazione (P) diverſe paja di equazioni (I), (II), (III) ecc.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{B}=2zy+y^2\\ A=z^2\end{array}\right\}\ldots\ldots(\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{array}{l}A=z^2+2zy\\ \sqrt{B}=y^2\end{array}\right\}\ldots\ldots(\mathrm{II})$$

$$\left.\begin{array}{l}A=z^2+y^2\\ \sqrt{B}=2zy\end{array}\right\}\ldots\ldots(\mathrm{III})$$

ecc.

combinando a piacere i termini dell' equazione, non ha dubbio, che a qualunque di queſte combinazioni (I), (II) ecc. ſi ſoddisfaccia ſeparatamente, ſi è ad un tempo ſoddisfatto all' equazione (P). Se dunque ſia M il valor di z, N quel d' y della combinazione (I); M' il valor di z, N' quel d'y della combinazione (II) ecc.; poichè debbe ſempre eſſere $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=z+y$, ſarà neceſſariamente $M+N=M'+N'=M''+N''$ ecc. Ora ſi finga eſſere $\sqrt{(A-\sqrt{B})}=z-y$. Sarà $A-\sqrt{B}=z^2-2zy+y^2$, ed eſſendo $A+\sqrt{B}=z^2+2zy+y^2$, ſe ſi ſommino, e ſi ſottraggano ſucceſſivamente queſte due equazioni, ſi ha

$$A=z^2+y^2$$
$$\sqrt{B}=2zy$$

che è appunto la combinazione (III). Queſta è la combinazione, che determina i valori di z ed y, ſicchè eſſendo $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=z+y$, viene pure ad eſſere $\sqrt{(A-\sqrt{B})}=z-y$. Ma il ſupporre, che debba riſultare lo ſteſſo in qualunque delle rimanenti combinazioni, è lo ſteſſo che ſupporre, che, come diviſa una linea in due parti qualunque M N, poi in altre due M', N', e così ſucceſſivamente, è ſempre $M+N=M'+N'=M''+N''$ ecc., debba anche eſſere neceſſariamente $M-N=M'-N'=M''-N''$ ecc. che non può eſſere „ *Inter utramque formam* (così ſi eſprime l' illuſtre Sig. *Eulero* nel luogo ſopraccitato) *tam arctus intercedit nexus, ut inventa alterius formæ radice cujuſvis gradus, ex ea ſimul radix alterius formæ facillime formari queat* „. In fatti eſſendo $\sqrt[n]{(A+B)}=M+N$, ſarà $\sqrt[n]{(A-B)}=\sqrt[u]{((M+N)^n-2B)}$, come abbiamo indicato precedentemente, ma non per quello che vi ſi adduce in ſeguito „ *Si enim radix cujuſcumque poteſtatis ex binomio* A + B *fuerit* x + y, *tum reſpondentis reſidui* A—B *radix ejuſdem poteſtatis erit* x — y „.

Pigliamone un eſempio facile

Sia $\sqrt{(A+B)}=z+y$; ſarà $A+\sqrt{B}=z^2+2zy+y^2$, ed aſſunta a piacere una combinazione, pongo $A=2zy$, $\sqrt{B}=z^2+y^2$. Soſtituendo nella ſeconda equazione il valore di z tratto dalla prima, ſi avrà l' equazione

$y^4-y^2\sqrt{B}+\frac{A^2}{4}=0$, la quale ſomminiſtra

$y=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{B}+\sqrt{(B-A^2)}}{2}\right)}=\mathfrak{Q}$, e però $z=\frac{A}{2\mathfrak{Q}}$, e $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=\frac{A}{2\mathfrak{Q}}+\mathfrak{Q}$. Ma eſſendo $A+\sqrt{B}=(z+y)^2$, e però neceſſariamente $A-\sqrt{B}=(z+y)^2-2\sqrt{B}$, perchè poſſa eſſere $\sqrt{(A-\sqrt{B})}$ uguale a $z-y$, dovrà eſſere $(z+y)^2-2\sqrt{B}=(z-y)^2$, cioè $2zy=\sqrt{B}$. Ma $\sqrt{B}=z^2+y^2$: biſognerebbe dunque che aveſſe luogo l'equazione $2zy=z^2+y^2$, cioè che foſſe $A=\sqrt{B}$, $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=\sqrt[4]{4B}$, e $\sqrt{(A-\sqrt{B})}=0$

Non è dunque lecito di conchiudere, dall' eſſere $\sqrt[n]{(A+B)}=z+y$, che ſia pure $\sqrt[n]{(A-B)}=z-y$, ſe non abbiano luogo le due equazioni

$$A=z^n+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}z^{n-2}y^2+\frac{n\ldots.(n-3)}{1\,.\,2\ldots4}z^{n-4}y^4+\text{ecc.}$$

$$B=\frac{n}{1}z^{n-1}y+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}z^{n-3}y^3+\frac{n\ldots(n-4)}{1\,.\,2\ldots.\,5}z^{n-5}y^5+\text{ecc.}$$

cioè ſe non ſi determinino da queſte relazioni i valori di z ed y. Ed è poi manifeſto che a queſta condizione è ſempre legittima l' aſſunzione, come s' è detto da principio.

PROPOSIZIONE VI.

§. XI. *Se l' equazione* (△)

(△) .... $64z^9-48Az^6+(27B-15A^2)z^3-A^3=0$

ammetta per z *un valore razionale, il binomio* $A\pm\sqrt{B}$, *eſſendo*

eſſendo A, B *razionali*, $\sqrt{B}$ *irrazionale ſemplice*, *avrà radice cubica binomia compoſta di razionale*, *ed irrazionale ſemplice di queſta forma* $M \pm \sqrt{N}$.

DIMOSTRAZIONE.

Suppongaſi che ſia $\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})}=z+\sqrt{y}$. Innalzando al cubo, dovrà eſſere $A+\sqrt{B}=z^3+3zy+(3z^2+y)\sqrt{y}$; e perchè riſulti $\sqrt[3]{(A-\sqrt{B})}=z-\sqrt{y}$, aſſumiamo la combinazione neceſſaria (§. *X.*)

$$A=z^3+3zy,\quad \sqrt{B}=(3z^2+y)\sqrt{y}$$

Quadrando l' una e l' altra equazione, ſi otterrà

$$A^2=z^6+6z^4y+9z^2y^2$$
$$B=9z^4y+6z^2y^2+y^3$$

e ſottraendo la ſeconda di queſte equazioni dalla prima s' avrà $A^2-B=(z^2-y)^3=\frac{(4z^3-A)^3}{27z^3}$, ſoſtituendovi il valore di y tratto dall' equazione $A=z^3+3zy$. Queſt' equazione ridotta ſomminiſtra l' equazione (Δ)

$$(\Delta)\ \ldots\ 64z^9-48Az^6+(27B-15A^2)z^3-A^3=0$$

Se dunque ſi abbia un valore razionale per z da queſt' equazione $=M$, poichè $y=\frac{A-z^3}{3z}$, ſarà pure dato razionalmente il valore di $y=\frac{A-M^3}{3M}=N$, e però ſarà $\sqrt[3]{(A\pm\sqrt{B})}=M\pm\sqrt{N}$, come s' aveva da provare.

COROLLARIO I.

§. XII. Siccome l' equazione $A^2-B=\frac{(4z^3-A)^3}{27z^3}$ può eſſere meſſa ſotto queſta forma

$$(8z^3 - 2A)^3 = (27A^2 - 27B)\, 8z^3$$

dalla quale eſtratta la radice cubica s' ottiene l' equazione

$$(\Delta') \ldots . (2z)^3 - 3(2z)\sqrt[3]{(A^2 - B)} - 2A = 0$$

è manifeſto, che ſe v' abbia per z valore razionale M nell' equazione (Δ'), ſi avrà, come prima, $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})} = M \pm \sqrt{N}$.

COROLLARIO II.

E ſe foſſe il ſecondo termine del binomio un immaginario ſemplice; ponendo nell' equazioni di condizione (Δ) (Δ'), $-B$ in luogo di B, ſempre che abbiavi per z valore razionale nell' una, o nell' altra di quelle equazioni, ſarà $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{-B})} = M \pm \sqrt{-N}$, ſiccome è manifeſto.

COROLLARIO III.

E facendo conſiderazione all' equazione (Δ') del §. *XII*, nella quale non può avervi per z valore razionale, ſe non ſia $\sqrt[3]{(A^2 - B)}$ quantità razionale, ſe ne ricava un comodo e nuovo criterio, ond'eſſere certi immediatamente, che il binomio $A + \sqrt{\pm B}$ non ha per radice cubica un irrazionale miſto, ſubito che $A^2 \mp B$, quantità razionale, non è un cubo perfetto, di che è faciliſſimo l' accertarſi; e vicendevolmente $A^2 \mp B$ ſarà ſempre un cubo, allorchè ſia un cubo $A + \sqrt{\pm B}$.

PROPOSIZIONE VII.

§. XIII. *Se nell' una, o nell' altra delle equazioni (Δ), (Δ') abbiaſi per z un valore razionale, eſſendo v quantità razionale arbitraria*

$$(\Delta)\ldots\ldots 64z^9v^3 - 48Az^6v + (27B - 15A^2)z^3v - A^3 = 0$$

$$(\Delta')\ \ldots\ (2z)^3v - 3(2z\sqrt[3]{v(A^2 - B)} - 2A = 0$$

il binomio A ± √B *avrà radice cubica binomia compoſta di due irrazionali ſemplici di queſta forma.*

$$M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{v^2N^3})$$

DIMOSTRAZIONE.

Suppongaſi $\sqrt[3]{(A + \sqrt{B})} = z\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{(v^2y^3)}$. Avremo, cubando, $A + \sqrt{B} = z^3v + 3zvy + (3z^2v + vy)\sqrt{y}$; e perchè ſia $\sqrt[3]{(A - \sqrt{B})} = z\sqrt[3]{v} - \sqrt[6]{(v^2y^3)}$, ſi aſſumano (§. X) le due equazioni.

$$A = z^3v + 3zvy$$
$$\sqrt{B} = (3z^2v + vy)\sqrt{y}$$

Quadrandole entrambe, e ſottraendo il quadrato della ſeconda dal quadrato della prima ſi avrà

$$v(A^2 - B) = (z^2v - vy)^3$$

e però $\sqrt[3]{v(A^2 - B)} = z^2v - vr$. Ma $y = \frac{A - z^3v}{3zv}$. Dunque ſoſtituendo, riducendo, e moltiplicando per 2, ſi avrà l'equazione

$$(\Delta')\ldots\ldots(2z)^3v - 3(2z)\sqrt[3]{v(A^2 - B)} - 2A = 0$$

la quale, cubando, diventa

$$(\Delta)\ldots\ldots 64z^9v^3 - 48Az^6v^2 + (27B - 15A^2)z^3v - A^3 = 0$$

Se dunque ſi abbia per z valore razionale $= M$ nell'una o nell' altra di queſte due equazioni, preſo per v un razionale opportuno, ſarà $y = \frac{A - M^3v}{3Mv} = N$, e però $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})} = M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(v^2A^3)}$, come conveniva dimoſtrare.

COROLLARIO.

§. XIV. Se $\sqrt{B}$ foſſe immaginario ſemplice, baſta porre nell' equazioni di condizione $-B$ in luogo di B, sì che avendovi in tal caſo per z radice razionale, e per v valore razionale convenevole, ſi avrà $\sqrt[3]{(A\pm\sqrt{-B})}$ $= M\sqrt[3]{v}\pm\sqrt[6]{(-v^2 N^3)}$.

PROPOSIZIONE VIII.

§. XV. *Se l' equazione* (Δ)

$$(\Delta) \quad \ldots\ldots \quad x^3 - px - q = 0$$

ammetta per x *un valore razionale, eſſendo* p q *razionali, il binomio* $\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}$ *avrà per radice cubica un irrazionale miſto di queſta forma* $M\pm\sqrt{N}$, *eſſendo* M N *razionali, e* $\sqrt{N}$ *un irrazionale quadratico ſemplice.*

DIMOSTRAZIONE.

Si ſupponga eſſere $z+\sqrt{y}=\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$. Sarà cubando

$\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}=z^3+3zy+(3z^2+y)\sqrt{y}$; e perchè ſia $z-\sqrt{y}=\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$, ſi aſſumano, come qui innanzi, le due equazioni

$$q = 2z(z^2+3y)$$

$$\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}=(3z^2+y)\sqrt{y}$$

Quadrando queſte due equazioni, e ſottraendo al ſolito il quadrato della ſeconda dal quadrato della prima, ſi perverrà a queſta ridotta (§. §. *XI. XII.*) $A^2 - B = \frac{p^3}{27} = \frac{(4z^3 - \frac{q}{2})^3}{27z^3}$, da cui eſtratta la radice cubica, e poſto x in luogo di $2z$, ſi otterrà l' equazione

$$(\Delta) \; \ldots\ldots \; x^3 - px - q = 0 .$$

Qualor dunque ammetta queſt' equazione per x un valor razionale $= M$, ſarà y razionale $= \frac{4q - M^3}{12M} = N$, e però $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = M \pm \sqrt{N}$, come dovea dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

§. XVI. Che ſe foſſe $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, poſta y negativa, ſi avrebbe trovato $\frac{M^3 - 4q}{12M}$ pel ſuo valore $= -N$, e la radice cubica del binomio ſarebbe ſtata $M \pm \sqrt{-N}$, come deve eſſere.

PROPOSIZIONE IX.

§. XVII. *Se l' equazione* (Δ)

$$(\Delta) \; \ldots\ldots \; x^3 - px - q = 0$$

non ammetta radice razionale, il binomio $\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non ha per radice cubica un irrazionale miſto della forma* $\mathrm{M} \pm \sqrt{\pm \mathrm{N}}$.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, ſe può averla, ſia ella $a \pm \sqrt{\pm b}$. Operando come nelle Propoſizioni precedenti, ſi perverrà alla ridotta

$$(\mu) \;\ldots\; (2a)^3 - p(2a) - q = 0$$

Dovendo pertanto eſſere a razionale, l' equazione (μ) avrà radice razionale. Ma l' equazione (μ) è lo ſteſſo che l' equazione (Δ), poſta x in luogo di $2a$. Dunque l' equazione (Δ) ammetterebbe radice razionale, contro il ſuppoſto. Non ammettendo dunque l' equazione (Δ) radice razionale, non può eſſere la radice cubica del binomio propoſto un irrazionale miſto della forma $M \pm \sqrt{\pm N}$. Il che dovea dimoſtrarſi.

PROPOSIZIONE X.

§. XVIII. *Se il binomio* $\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non abbia per radice cubica un irrazionale miſto della forma* $M \pm \sqrt{\pm N}$, *ma l' equazione* (Δ)

$$(\Delta) \;\ldots\; x^3 v - px\sqrt[3]{v} - q = 0$$

ammetta per x *un valore razionale, avrà il binomio per radice cubica un binomio irrazionale della forma* $M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 N^3)}$, *eſſendo* v *razionale arbitrario, e* $\sqrt{v}$ *irrazionale ſemplice.*

DIMOSTRAZIONE.

Si ſupponga eſſere $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = z\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 y^3)}$. Cubando, e operando, come nelle Prop.

precedenti, ſi perverrà facilmente alla ridotta

$$(\triangle) \ldots\ldots x^3 v - px\sqrt[3]{v} - q = 0$$

poſta x in luogo di $2z$. Se dunque poſſa trovarſi per v valore razionale, che non ſia un cubo perfetto, tale, che l' equazione ($\triangle$) ammetta per x radice razionale $= 2M$, è manifeſto, che ſi avrà anche per $\pm y$ il valore razionale $\frac{\mp 4q \pm M^3 v}{12\, Mv} = \pm N$, e però ſarà $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 N^3)}$, come dovea dimoſtrarſi.

ESEMPIO.

Sia il binomio $52 + \sqrt{(2700)}$. Sarà $q = 124$, $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = 2700$. Dunque $p = 3\sqrt[3]{4}$. Se pertanto l' equazione

$$x^3 v - 3x\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{v} - 104 = 0$$

abbia radice razionale, ſarà $\frac{x}{2}\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{(v^2 N^3)}$ la radice ricercata. Ma appunto poſto $v = 2$, l' equazione

$$x^3 - 3x - 52 = 0$$

ha per radice razionale il 4. Dunque la radice cubica del binomio ſarà $2\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{108}$.

PROPOSIZIONE XI.

§. XIX. *Se l' equazione* ($\triangle$)

$$(\triangle) \ldots\ldots x^3 v - px\sqrt[3]{v} - q = 0$$

non ammetta radice razionale, eſſendo v *quantità razionale ad arbitrio, e* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale ſemplice, il binomio* $\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}$ *non ha per radice cubica un binomio irrazionale della forma* $M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 N^3)}$

DIMOSTRAZIONE.

Se può averla, ſia ella $a\sqrt[3]{v}+\sqrt[6]{(v^2 b^3)}$, b eſſendo poſitivo o negativo ſecondo che $\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}$ è reale o immaginario. Operando come in tutte le Propoſizioni precedenti ſi perverrà a queſta ridotta

$$(\Delta')\ldots.(2a)^3 v - p(2a)\sqrt[3]{v} - q = 0$$

la quale deve ammettere radice razionale per a, affinchè $a\sqrt[3]{v}+\sqrt[6]{(v^2 b^3)}$ ſia la radice cubica del binomio propoſto. Ma l' equazione (Δ') è lo ſteſſo che l' equazione (Δ), che non la ammette per ſuppoſizione, ſol che ſi ponga $2a$ in luogo di x. Dunque l' equazione in a dovrebbe ad un tempo ammettere, e non ammettere radice razionale; il che non può eſſere. Se dunque l' equazione (Δ) ecc., come dovea dimoſtrarſi.

PROPOSIZIONE XII.

§. XX. *L' equazione* (Δ)

$$(\Delta)\ldots.(2z)^3 v - 3(2z)\sqrt[3]{v}\sqrt[3]{(A^2 \pm B)} - 2A = 0$$

in cui v *eſſer dee razionale ad arbitrio,* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale,* A, *e* B *razionale; qualunque quantità ſi aſſuma per* v, *che non ſia un cubo, non può ammettere mai radice razionale,*

razionale, ſe $\sqrt[3]{(A^2 \pm B)}$ *non ſia irrazionale, e tale, che* $v(A^2 \pm B)$ *diventi un cubo perfetto.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, dovendo eſſere

$$\frac{(2z)^3 v - 2A}{6z} = \sqrt[3]{v}\,\sqrt[3]{(A^2 \pm B)}$$

e nello ſteſſo tempo razionale il primo membro dell' equazione, biſogna che dal prodotto de' due irrazionali $\sqrt[3]{v}$, $\sqrt[3]{(A^2 \pm B)}$ riſulti neceſſariamente una quantità razionale, cioè che $\sqrt[3]{v(A^2 \pm B)}$ ſia una quantità razionale. Ma ciò non può mai eſſere, ſe $v(A^2 \pm B)$ eſſendo razionale, non ſia ad un tempo un cubo perfetto. Dunque ecc. Il che dovea dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

§. XXI. Se dunque $A^2 \mp B$ ſia un cubo perfetto P^3, poichè non deve eſſerlo ad un tempo anche l' arbitraria v, altrimenti $\sqrt[3]{v}$ non ſarebbe quantità irrazionale, come ſi richiede, non potrà mai $v(A^2 \mp B)$ eſſere un cubo razionale, dovendo riſultare ſempre $P\sqrt[3]{v}$, che non può eſſerlo. E però in tal caſo non avrà l' equazione (Δ) della Prop. precedente radice razionale.

SCOLIO.

Accade ordinariamente ne' Problemi d' Algebra, che le ſoluzioni generali abbracciano più di quello, che immediatamente, e direttamente richiede la Quiſtione. A torto per altro ſe ne accuſa la Scienza, quaſi l' imperfezione foſſe dell' Arte non mai dell' Artefice. Due, per eſempio, ſono i valori, che neceſſariamente debbono aver luogo in una data Quiſtione. L' Algebra ne frameſcola bene ſpeſſo un compleſſo d'altri, parte reali, parte ancora immaginarj. Convengo, che queſt' è il caſo d' una ricchezza incomoda e perchè ci biſogna ſeparare le radici neceſſarie dalle ſtraniere all' aſſunto, e perchè non poſſiamo farlo talvolta per alcun modo. Ma o ci manchi il metodo di riſolvere le equazioni, che ne riſultano, o ſieno ſtate introdotte dall' Algebriſta relazioni ſtraniere, o non abbia ſvolte le relazioni date con la neceſſaria circoſpezione, queſta ricchezza non è mai un difetto della Scienza. Imperciocchè o il richiegga neceſſariamente l'eſtenſione delle relazioni date, o il comporti un inoſſervato, e non ſempre oſſervabile inſinuarſi di nuove condizioni, che vi ſi fa nello ſvolgimento della quiſtione, il finale riſultamento per parte della Scienza è ſempre neceſſario, e determinato dalle circoſtanze. Il metodo, per eſempio, che abbiamo tenuto precedentemente nel maneggiare le radici cubiche $z \pm \sqrt{\pm y}$ de' binomj irrazionali $A \pm \sqrt{\pm B}$ ci ha ſempre portato a equazioni di terzo grado direttamente, ſiccome la quiſtione il dimanda. Eppure abbiamo un eſempio memorabile nel V. Vol. degli Opuſc. del celebre, ed illuſtre Geometra Sig. d' *Alembert* pag. 192, e ſeq., che in queſto medeſimo caſo s' introducono nella ſoluzione ſei radici ſtraniere del tutto alla quiſtione, creando così una vera difficoltà da ſuperare, come dottamente ha egli poi fatto nel decorſo di quell' Opuſcolo. Di fatto ſia $A = \frac{q}{2}$, $B = \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$, e poſto $\sqrt[3]{(A + \sqrt{B})} = z + \sqrt{y}$, $\sqrt[3]{(A - \sqrt{B})} = z - \sqrt{y}$, ſi perviene alle due equazioni.

$$q = 2z(z^2 + 3y) \qquad (1)$$

$$\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}=)}(3z^2+y)\sqrt{y}\ (11)$$

Togliendo l'aſimetria, e maneggiando co' metodi comuni queſte due equazioni onde ricavare il valore di z, ſi perviene ad una ridotta di nono grado. Parrebbe dunque (*così il Sig. d' Alembert*), che z doveſſe avere nove valori poſſibili, ancorchè realmente non ne abbia che tre ſoddisfacenti all'equazione $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=z+\sqrt{y}$. Non ſarebbe difficile il far conoſcere, come abbiano potuto inſinuarſi per queſta via valori ſtranieri nella ſoluzione. All'oppoſto, ſi quadrino le due equazioni (1), (11), e ſi ſottragga il quadrato della ſeconda dal quadrato della prima; ne riſulta l'equazione $\frac{p^3}{27}=\frac{(4z^3-\frac{q}{2})^3}{27z^3}$, che è un cubo perfetto. Eſtratta pertanto la radice cubica ne viene la ridotta ſempliciſſima $(2z)^3-p(2z)-q=0$ di terzo grado, che dà tre ſoli valori per z, come conviene.

Si potrebbero recare infiniti eſempj di ſomiglianti ſoluzioni, ſe non foſſero fuori del noſtro aſſunto. Ho addotto queſto, perchè vi ſi attiene ſtrettamente, e n'ho profittato volentieri per moſtrare, quanto diſſenta, e non ſenza fondamento dall'opinione di molti, anche dottiſſimi uomini, che di tratto in tratto declamano contro sì fatte imperfezioni, ch'eſſi dicono, dell'Algebra. Si dovrebbe piuttoſto prendere da queſto motivo di ammirarne la perfezione, ſiccome quella che all' interpolarſi in una quiſtione del più piccolo, per così dire, elemento ſtraniero al ſoggetto o con elevazione a potenze, o con introduzione di qualche fattore, o per ſimile altra operazione, che non altera per verità l'egualianza de' membri, ma vale di fatto a moltiplicare le ſoluzioni, manifeſta ſubito ſintomi totalmente nuovi, e corriſpondenti all'alterazione indottavi, inviluppando co' riſultamenti proprj della quiſtione una moltiplicità d' altre ſoluzioni, che le ſono improprie. Non può quindi dirſi più perfetta l' Algebra nel darci un' equazione di terzo, che è propria della quiſtione, che una di nono corriſpondente alle nuove condizioni tacitamente introdotte nel maneggiare le relazioni fondamentali.

PROPOSIZIONE XIII.

§. XXII. *Tutte le equazioni di terzo grado ſi poſſono ridurre all' equazione (F)*

$$(F) \quad . \; . \; . \; . \quad x^3 - px - q = 0$$

PROPOSIZIONE XIV.

§. XXIII. *Riſoluta l'equazione (F) col metodo di Cardano, ne riſulta generalmente una delle radici ſotto queſta forma*

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

PROPOSIZIONE XV.

§. XXIV. *Qualunque volta ſia* $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, *tutte e tre le radici dell' equazione (F) ſono reali, e diſeguali.*

Queſte tre Propoſizioni ſono ampiamente dimoſtrate nell' Algebra comune.

PROPOSIZIONE XVI.

§. XXV. *La formula Cardanica*

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

eſſendo p q *grandezze reali, in qualunque caſo è ſempre radice dell' equazione* (*F*)

$$(F) \; . \; . \; . \; . \; x^3 - px - q = 0$$

e radice ſempre reale.

DIMOSTRAZIONE.

Si faccia $\sqrt[3]{(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})})}+\sqrt[3]{(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{23})})}=x$.
Sarà cubando

$$x^3=\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}+3\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}\times\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}$$

$$\times\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}+3\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}\times\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}$$

$$\times\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^3}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}+\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}=q+3\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}$$

$$\times\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}\times\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}+3\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}$$

$$\times\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}\times\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}.$$

Ma $\Big(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)\Big(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)=\frac{p^3}{27}$. Dunque ſarà

$$x^3=q+p\Big\{\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}+\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}\Big\}.$$ Ed è poi

$$-px=-p\Big\{\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}+\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}\Big\}$$

$$-q=-q.$$

In conſeguenza, facendo l'aggregato degli omogenei di comparazione, ſarà $x^3 - px - q = 0$, che è l'equazione cubica (*F*). Dunque la formola Cardanica in qualunque caſo è una radice di queſt'equazione. Reſta da provare, ch'ella ſia ſempre radice reale. Ma eſſendo $\frac{p^3}{27}$

minore di $\frac{q^2}{4}$, o eguale a $\frac{q^2}{4}$, la formola è ſempre reale; e nel caſo di $\frac{p^3}{27}$ maggiore di $\frac{q^2}{4}$, in cui appunto ella appariſce ſotto aſpetto immaginario, tutte tre le radici dell'equazione ſono reali (§. *XXIV.*); non può dunque la formola eſſere radice dell'equazione (*F*) ſenza eſſere neceſſariamente radice reale. Dunque la formola Cardanica in qualunque caſo è radice dell' equazione (*F*), e radice ſempre reale. Il che ecc.

DEFINIZIONE.

§. XXVI. Caſo irreducibile del terzo grado è quello, in cui le quantità p, q dell'equazione (*F*)

$$(F) \; \ldots\ldots\ldots \; x^3 - px - q = 0$$

eſſendo razionali, e $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, neſſun diviſore eſatto dell' ultimo termine q può ſoddisfare all'equazione (*F*); oppure, che è lo ſteſſo, Caſo irreducibile del terzo grado è quello, in cui le quantità p, q dell'equazione (*F*) eſſendo razionali, tutte e tre le radici dell' equazione debbono eſſere reali, diſeguali, e irrazionali.

SCOLIO.

§. XXVII. La condizione delle quantità p, q razionali, non atteſa quanto baſta, ha fatto equivocare più d' uno in queſto argomento. V' ha un' infinità di equazioni di terzo grado aventi tre radici reali, diſeguali, e irrazionali, le quali ciò non oſtante non entrano nella Claſſe delle irreducibili. Baſta tor via dall' equazione qualunque irrazionalità, perchè ella divenga toſto reducibile, ed abbiavi in conſeguenza diviſore dell' ultimo termine ſoddisfacente all'equazione. Ne ho fatto chiaro cenno al §. 88. nell' *Eſercitazione Analitica* citata teſtè nell' Introduzione, di modo che quelle ſteſſe equazioni del Sig. *Nicole* (*Mem.* 1738. 1740), e tutte le infinite ſimili, che poſſono trovarſi, le quali erano giudicate come caſi rapiti all' irreducibilità (*Enciclop. Cas irred.*), non lo ſono altramente, ſiccome può ognuno accertarſene agevolmente col ridurle alla forma (*F*) del §. precedente, con le quantità p, q razionali, al che non s' era poſto mente.

PROPOSIZIONE XVII.

§ XXVIII. *Nel caſo irreducibile il binomio* $\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non ha per radice cubica alcun irrazionale miſto di queſta forma* $M \pm \sqrt{-N}$.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè non avendo in queſto caſo l' equazione (*F*) (§. XXVI.) alcun diviſore eſatto dell' ultimo termine, che ſoddisfaccia all' equazione, non ha ella per x radice razionale. Ma in tal caſo non ha il binomio propoſto radice cubica di quella forma (§. *XVII*). Dunque ecc.

PROPOSIZIONE XVIII.

§. XXIX. *Nel caſo irreducibile il binomio* $\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non ha per radice cubica un binomio irrazionale della forma* $M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(-v^2 N^3)}$, *eſſendo* v *razionale ad arbitrio, e* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale ſemplice.*

DIMOSTRAZIONE.

Se può averla, ſia ella $z\sqrt[3]{v}+\sqrt[6]{(-v^2y^3)}$, eſſendo z ed y indeterminate. Operando come nella Prop. VII., ſi perverrà alla ridotta (I)

$$(\mathrm{I}) \; . \; . \; . \; . \; . \; (2z)^3 v - p(2z)\sqrt[3]{v} - q = 0$$

Se dunque quella è la radice cubica del binomio propoſto, l' equazione (I) avrà per z radice razionale (§. *XIX.*). Ma eſſendo p quantità razionale, $\sqrt[3]{v}$ irrazionale, non può l' equazione (I) avere radice razionale, qualunque quantità razionale ſi aſſuma per v (§§. *XX. XXI.*). Non può dunque il propoſto binomio avere nel caſo irreducibile radice cubica di quella forma, come s' aveva da dimoſtrare.

PROPOSIZIONE XIX.

§. XXX. *In qualunqe equazione del terzo grado*

$$x^3 - px - q = 0$$

in cui tutte tre le radici dell' equazione ſono reali, e diſeguali, il quadrato di qualunque delle tre radici è ſempre minore di $\frac{4p}{3}$

DIMOSTRAZIONE.

Sieno a, $-a'$, $-a''$, oppure $-a$, a', a'' le radici dell' equazione. Mancando il ſecondo termine, ſarà per i principj dell' Algebra, $a = a' + a''$, e però l' equazione prende queſta forma.

$$x^3 - (a'^3 + a'a'' + a''^2)x \pm a'a''(a' + a'') = 0$$

Eſſendo

Eſſendo manifeſto, che $\frac{4}{3}\,(a'^2 + a'a'' + a''^2)$ è maggiore del quadrato a'^2, oppure a''^2 di ciaſcuna delle radici, reſta che ſi dimoſtri eſſere quello maggiore di $a^2 = (a' + a'')^2$. Ora eſſendo la ſomma de' quadrati di due quantità maggiore del doppio prodotto delle medeſime quantità, ſarà $a'^2 + a''^2 > 2\,a'a''$. Dunque $a'^2 + 4\,a'a'' + a''^2 > 6\,a'a''$, e però $4\,a'^2 + 4\,a'a'' + 4\,a''^2 > 3\,a'^2 + 6\,a'a'' + 3\,a''^2$. In conſeguenza $\frac{4}{3}\,(a'^2 + a'a'' + a'^2) > a'^2 + 2\,a'a'' + a'^2 > (a' + a'')^2 > a^2$. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XX.

§. XXXI. *La formola Cardanica è reducibile a forma razionale in ogni caſo di* $\frac{p^3}{27} \gtrless \frac{q^2}{4}$, *purchè l' ultimo termine* q *abbia diviſore eſatto, che ſoddisfaccia all'equazione (F)*

$$(F) \;.\;.\;.\;.\;.\; x^3 - px - q = 0$$

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il binomio $\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)$ ha per radice cubica l'irrazionale miſto $M + \sqrt{\pm N}$, toſto che l'equazione *(F)* ammette per x un valore razionale $= 2M$ (§. §. *XV. XVI.*); cioè toſto che l'ultimo termine q ha diviſore eſatto, che ſoddisfà all' equazione, che è lo ſteſſo. Ma in tal caſo anche $\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ ha per radice cubica il binomio $M - \sqrt{\pm N}$. (*nello ſteſſo luogo*). Dunque la ſomma de' due radicali, cioè la formola Cardanica

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=2M=x$$

che è razionale. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XXI.

§. XXXII. *La formola Cardanica è reducibile alla forma irrazionale* x$\sqrt[3]{v}$ *in ogni caſo di* $\frac{p^3}{27}\gtrless\frac{q^4}{4}$, *purchè l'equazione* (F′)

$$(F') \;.\;.\;.\;.\;.\; x^3v-px\sqrt[3]{v}-q=0$$

ammetta per x *radice razionale, eſſendo* v *un razionale ad arbitrio, e* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale ſemplice.*

DIMOSTRAZIONE.

Toſto che l'equazione (F') ammette per x un valore razionale $2M$, il binomio $\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}$ ha per radice cubica il binomio irrazionale $M\sqrt[3]{v}\pm\sqrt[6]{(\pm v^2N^3)}$ (§. *XVIII.*). Dunque la ſomma de' due radicali, cioè la formola Cardanica

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=2M\sqrt[3]{v}$$

$=x\sqrt[3]{v}$, come s'aveva da dimoſtrare

PROPOSIZIONE XXII.

La formola Cardanica nel caſo irreducibile non è reducibile nè a forma razionale x, *nè a forma irrazionale miſta* x$+\sqrt{v}$ *eſſendo* $\sqrt{v}$ *irrazionale ſemplice reale,* *nè a forma irrazionale ſemplice* x$\sqrt[3]{v}$, *eſſendo* v *qualunque razionale ad arbitrio.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Parte. La prima parte della propoſizione è per sè evidente ſubito che l' equazione Cubica nel caſo irreducibile non ammette radici razionali.

II. Parte. Si ſupponga, ſe può eſſerlo,

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=x+\sqrt{v}$$

e ſi faccia $x+\sqrt{v}=r$, $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=T$. Poichè $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=\frac{p}{3}$, e per conſeguenza $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=p:\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$, ſarà $r=T+p:3\,T$, $T^2-r\,T+p:3=0$, e $T=\frac{r}{2}\pm\sqrt{\left(r^2-\frac{4p}{3}\right)}$ $=\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$, ove $\sqrt{\left(r^2-\frac{4p}{3}\right)}$ è un immaginario ſemplice (§. XXX.). Dovrà pertanto eſſere $\frac{r}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(r^2-\frac{4p}{3}\right)}=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{v}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left((x+\sqrt{v})^2-\frac{4p}{3}\right)}$ la radice cubica del binomio $\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}$. Ma queſto binomio nel caſo irreducibile non ha per radice cubica un irrazionale di queſta forma (§. XXVIII.). Dunque ecc.

III. Parte. Suppoſto, come nell' art. preced.

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=x\sqrt{v}=r,$$

e ſatte le ſteſſe operazioni, ſi perverrà all' equazione $\frac{r}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(r^2 - \frac{4p}{3}\right)} = \frac{x}{2}\sqrt[3]{v} \pm \sqrt{\left(x^2\sqrt[3]{v^2} - \frac{4p}{3}\right)}$, la quale dovrà eſſere la radice cubica del binomio $\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$. Ma $\frac{x}{2}\sqrt[3]{v} \pm \sqrt{\left(x^2\sqrt[3]{v^2} - \frac{4p}{3}\right)} = \frac{x}{2}\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{\left(x^2\sqrt[3]{v^2} - \frac{4p}{3}\right)^3}$; e il binomio $\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ non ammette nel caſo irreducibile per radice cubica un irrazionale di queſta forma (§. *XXIX.*). Dunque ecc. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XXIII.

§. XXXIV. *La formula Cardanica nel caſo irreducibile non ammette altra forma algebraica finita, fuorchè la propria ſotto aſpetto immaginario.*

DIMOSTRAZIONE.

Se può ammetterla, comunque ella ſiaſi funzione di p ſolo, o di q ſolo, o di p e q inſieme, la ſi rappreſenti generalmente per ϕ. Sarà pertanto $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = \phi$. Ma eſſendo $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = \frac{p}{3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}} = \frac{p}{3T}$, poſto $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = T$; ſarà $\phi = T + \frac{p}{3T}$, e però $T^2 - \phi T + \frac{p}{3} = 0$. Dunque $T = \sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}}$

$+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p3}{27})}\Big)=\frac{\phi}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\phi^2-\frac{4p}{3})}$; binomio in cui $\sqrt{(\phi^2-\frac{4p}{3})}$ è un immaginario ſemplice, per eſſere il quadrato di qualunque delle tre radici ϕ ſempre minore di $\frac{4p}{3}$ (§. XXX.). Perchè dunque la formula Cardanica poſſa ammettere la forma ϕ, biſogna che il binomio $\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}$ ammetta radice cubica, che ſia funzione di ϕ di queſta forma $\frac{\phi}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\phi^2-\frac{4p}{3})}$. Ma perchè ſia $\frac{\phi}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\phi^2-\frac{4p}{3})}$ la radice cubica del binomio $\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}$, eſſendo p q quantità razionali, è neceſſario, che ϕ ſia diviſore eſatto di q (§. IX.). Dunque in primo luogo la formula Cardanica ammetterà queſta forma ϕ, ſubito che ϕ poſſa eſſere parte aliquota di q. Ma dalla ſuppoſizione di $\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}$ $+\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}=\phi$, operando come nella XVI. Prop., riſulta l'equazione finale

$$(P)\ldots\ \phi^3-p\phi-q=0$$

E però la forma ϕ deve eſſere radice di queſt'equazione. Di nuovo pertanto la formula Cardanica ammetterà la forma ϕ, ſubito che ϕ ſia e diviſore eſatto di q, e radice dell'equazione (P). Ma l'equazione (P) è preciſamente l'equazione (F) del caſo irreducibile (§. *XXVI.*); e nel caſo irreducibile neſſun diviſore eſatto dell'ultimo termine q può eſſere radice dell'equazione

(*F*) (*ibid.*). Non può dunque eſſer ϕ parte aliquota di q, e radice dell' equazione (*P*). E perciò la formola Cardanica non può ammettere nel caſo irreducibile la forma ϕ. Ma ϕ rappreſenta qualſivoglia immaginabile forma. Per conſeguenza la formula Cardanica non ammette nel caſo irreducibile altra forma algebraica finita, ſuorchè la propria ſotto aſpetto immaginario. Il che dovea dimoſtrarſi.

PROPOSIZIONE XXIV.

§. XXXV. *Non è poſſibile di trovare per la radice* x *dell' equazione cubica* (*F*)

(*F*) .... $x^3 - px - q = 0$

nel caſo irreducibile un valore algebraico, finito, e libero da apparenza immaginaria.

DIMOSTRAZIONE.

Se è poſſibile, ſia ϕ queſto valore. Eſſendo la formula Cardanica in ogni caſo radice reale dell' equazione (*F*) (§. *XXV.*), ſarà neceſſariamente

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=\phi.$$

In conſeguenza la formula Cardanica ſarà reducibile a forma algebraica finita, libera da apparenza immaginaria. Ma ciò non può eſſere (§. *XXXIV.*). Dunque non è poſſibile ecc., come dovea dimoſtrarſi.

SCOLIO.

§. XXXVI. Non ſarà inutile, che ſieno qui per ultimo recapitolate, e poſte in ſerie le concluſioni capitali attinenti a queſto ſottile e difficile argomento, che non poſſono più revocarſi in dubbio ſenza offeſa della verità, e ſenza introdur cavillazioni, che facciano maniſeſto torto piuttoſto all' analiſta, che all' analiſi, alla quale non può ragionevolmente addoſſarſi il difetto di chi la maneggia. Poſſiamo pertanto tener per certo

I. Che la riſoluzione Cardanica è legittima; ſopra di che ragioneremo qui appreſſo.

II. Che la formula o il binomio Cardanico (D)

$$(D)\ldots\ldots\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

è ſempre la vera radice dell' equazione cubica generale (*F*)

$$(F)\ \ldots\ldots\ x^2 - px - q = 0$$

e radice ſempre reale (§. XXV.), cioè il vero valore di x in ogni caſo, tanto ſe l' equazione (*F*) non abbia che una ſola radice reale, quanto ſe le abbia tutte e tre reali, comunque poi eſſe ſi ſieno razionali o irrazionali, eſprimendole la medeſima formola tutte e tre, come ſi dimoſtra non difficilmente.

III. Che nel caſo poi denominato irreducibile, ſu cui non può naſcere equivoco (§. *XXVI*), ognuno de' termini del binomio (*D*) è quantità aſſolutamente immaginaria, la quale nè per trasformazioni, nè per artificioſe riduzioni potrà mai cangiar natura, e reſterà ſempre in fondo, ſe anche prendeſſe apparenza reale, quantità immaginaria. Ma preſi que' due termini inſieme la loro ſomma coſtituiſce una quantità reale, ed eſprime una vera e reale radice dell' equazione (*F*).

IV. Che è coſa ormai dimoſtrata a ſazietà, che quel binomio (*D*) nel caſo irreducibile non potrà mai conſeguire altra forma ugualmente algebraica, finita, e reale, la quale non implichi e involga aſpetto immaginario.

V. E che finalmente, dopo tutto queſto, reſta dimoſtrato, che non è poſſibile per alcun immaginabile metodo di trovare una radice dell' equazione (*F*), nel caſo irreducibile, algebraica finita e reale, la quale ſia nello ſteſſo tempo libera da aſpetto immaginario. In fatti ſe ciò è poſſibile, biſogna neceſſariamente, ch'ella coincida con la radice (D), e le ſia eguale, giacchè eſprimono entrambe una medeſima radice dell'equazione (F). Sarebbe dunque la radice (D) ridotta a forma algebraica finita e reale, nel caſo irreducibile, ſenza implicanza d'immaginarj; il che ſi è dimoſtrato impoſſibile.

E quanto alla legittimità del metodo Cardanico vo' dichiararla qui nel modo che potrò migliore; il che non ſarebbe neceſſario, ſe tutti poteſſero formarſi delle medeſime coſe le medeſime idee. Ma qualche volta certi articoli non riſchiarati ne' libri elementari danno luogo al germoglio di molti errori. Ed è ſtrano ſoprattutto, che la ſi metta in dubbio in grazia del ſolo caſo irreducibile. La formola eſprime, e dà le preciſe radici dell'equazione in tutti i caſi reducibili, ſenza ricorrere ad altri ſuſſidj, che a quello dell'eſtrazione della radice cubica da ognuno de' due termini della formula; e dee ella ceſſare di eſſere legittima nel ſolo caſo, che le radici dell'equazione (F) debbano eſſere tutte tre reali, diſeguali, e irrazionali? Il metodo è queſto.

Si faccia $x = z + y$. Soſtituendo queſto valore nell'equazione (F), prende ella queſta forma (G)

$$(G) \ldots\ldots z^3 + 3z^2y + 3zy^2 + y^3 - pz - py - q = 0$$

L'equazione (G) non è più determinata, come l'equazione (F), eſſendo due le indeterminate z y, delle quali biſogna definire il valore, onde conſeguire quello di x, a cui è poſto uguale l'aggregato $z + y$. Le due indeterminate z y non hanno certamente alcuna relazione neceſſaria tra di sè, fuorchè quella, che abbia da verificarſi l'equazione (G). Si traggano quante paja di equazioni ſi vuole dall'equazione (G), come ſarebbe

$$\left.\begin{array}{l} z^3 + 3z^2y = 0 \\ 3zy^2 + y^3 - pz - py - q = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (A)$$

$$\left.\begin{array}{l} z^3 + 3z^2y + 3zy^2 = 0 \\ y^3 - pz - py - q = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (B)$$

$$z^3 - q = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} z^3 - q = 0 \\ 3z^2y + 3yz^2 + y^3 - pz - py = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (C)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3z^2y + 3y^2z - py - pz = 0 \\ z^3 + y^3 - q = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (D)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3z^2y + 3y^2z - q = 0 \\ z^3 + y^3 - pz - py = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (E)$$

ecc.

Queſte combinazioni, e le altre che poſſono ſimilmente farſi, ſpezzando in due equazioni l' equazione (G), ſono tutte rigoroſamente legittime, perchè riſoluto qualſivoglia pajo di equazioni (A), (B) ecc. ſempre co' valori ritrovati di z ed y ſi ſoddisfa all' equazione (G), ch' è la ſola neceſſaria condizione da riempierſi, e verificarſi nella quiſtione.

La combinazione (D) pertanto non è men legittima di tutte le altre (A), (B), (C), (E) ecc. Ed è appunto dalla combinazione (D), ch' è tratto il valore di

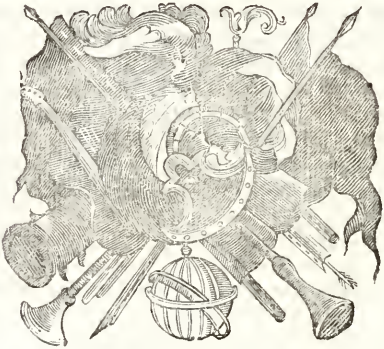
$$z+y = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{2} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)},$$

che è la formola Cardanica. Che non poſſa eſſere $3zy(z+y) = p(z+y)$, e nello ſteſſo tempo $z^3 + y^3 = q$, ciò appunto è quello che fa riſultare cosi z come y quantità aſſolutamente immaginarie, come è ſtato dimoſtrato da molti valentuomini, e l' ho dimoſtrato io ſteſſo nell' *Eſercitazione* citata qui innanzi. Ma $z+y$ è ſempre e neceſſariamente il vero valore di x, cioè la vera radice dell' equazione (F). Ed è irragionevole il pretendere, che il metodo per eſſere legittimo debba ſomminiſtrare non già il ſolo compleſſo $z+y$ reale, ma le parti eziandio z, y reali; mentre non altro è di aſſoluta neceſſità per natura della quiſtione, che ſia reale, fuorchè il valore di $x = z+y$, qualunque poſſa mai eſſere la forma delle parti.

Sarebbe lo ſteſſo ſe dalla combinazione (A), o da qualunque delle altre (B), (C) ecc. ſi traeſſe, ſe è poſſibile, il valore di z, e di y. Sempre la ſomma $z+y$ ſarebbe uguale ad x, cioè alla vera radice dell' equazione. Non ſarebbe z', tratto per eſempio dalla combinazione (A), lo ſteſſo z che s' è tratto dalla combinazione (D), nè y' lo ſteſſo che y; ma $z'+y'$ ſarebbe ſempre l' identica ſomma e quantità $z+y$, cioè la ſteſſa radice x dell' equazione.

Quindi è manifeſto, che da qualunque di quelle combinazioni ſi arrivaſſe a ricavare il valore di z', e di y', ſempre la ſomma $z'+y'$ involgerà neceſſariamente degl' immaginarj; altrimenti, dovendo ella indentificarſi colla ſomma $z+y$ tratta dalla combinazione (D), cioè colla Cardanica, potrebbe queſta eſſere liberata dall' aſpetto immaginario, contro ciò che s' è ſolennemente dimoſtrato.

Ma queſto baſti a compiuta dilucidazione della materia.



ESPOSIZIONE ANATOMICA

DELLE PARTI RELATIVE ALL' ENCEFALO DEGLI UCCELLI.

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acqueſi, e Chirurgo Maggiore del Reale Preſidio di Torino

Al Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. il Duca di Parma, Preſidente al Gabinetto di Storia Naturale, Profeſſore primario della medeſima, e di Notomia in quella Regia Univerſità.

SIGNORE.

MOſtrerei d' eſſer privo del bene dell' intelletto, ſe non mi aveſſe dolcemente commoſſo la generoſità, che voi manifeſtaſte nell' analizzare le mie oſſervazioni ſull' *Encefalo Umano*, e nell' additare ai numeroſi voſtri uditori dalla Cattedra in coteſta famoſa e dotta Univerſità da voi così degnamente occupata gli articoli delle opere del ſommo Notomiſta, e Fiſiologo *Alberto Allero*, nei quali di quella mia debole fatica ſi fa corteſe ed onorata menzione; e ſe dall' altra parte la cognizione, che ho già da parecchi anni della vaſtità dell' erudizione voſtra, e della felicità delle profonde voſtre ricerche nella Notomia, e nella Storia naturale, non mi aveſſe indotto a ſperare, che voi non isdegnerete ch' io ricorra a voi per lume, e per conſiglio intorno a quella parte dell' *Encefalotomia univerſale* da me abbozzata, che riſguarda gli uccelli, dintorno alla quale s' impiegarono dopo di *Tommaſo Willis* gli Accademici Parigini ſenza condurla però a plauſibile chiarezza ed eſtenſione infino a tanto che il lodato infaticabile *Allero* non ebbe creduto lo ſviluppamento del cerebro nella menzionata claſſe d'animali occupazione degna di sè, e della attenzione dei veri Filoſofi.

Vi è noto, eruditiſſimo Signore, che deſideroſo queſti di rendere vie più manifeſti al mondo i nodi, con i quali piacque all' *eterno* ſempre *adorabile Artefice* di concatenare la porzione animata delle ſoſtanze abitatrici del noſtro globo, ſi lagnava di non aver ancora trovato adequatamente deſcritto * il cerebro degli uccelli, ed avea riunite in una diſſertazione quelle verità, che l'eſame anatomico più attento gli avea rivelate ſu viſcera così eſſenziale in queſta claſſe d'animali, acciocchè ſerviſſero di ſtimolo agli altri Anatomici per dilatare anche da queſto canto i limiti delle noſtre cognizioni.

Non v'ha dubbio, che molti fra queſti vi abbiano fatto laudevoli progreſſi calcando le veſtigia di *Allero*, dietro alle quali oſai pure di muovere anch' io, di modo che l'anno MDCCLXXVI ſembrandomi già d'avere incontrato aſſai buona ventura nello ſpigolare per queſto campo, aveva penſato di traſmettere al promotore di tali ricerche i manipoli, che me n'erano toccati, riducendoli a foggia di comenti allo ſcritto *Alleriano*; ma non aveva condotto ancora il mio lavoro al termine prefiſſo, quando fui colpito dall' acerbiſſimo annunzio della perdita irreparabile, che per la morte di *Allero* la repubblica filoſofica ha fatto.

Privo così degli utili avviſi, che da uomo sì grande per ogni titolo avrei ottenuti, eſitai nel determina-

---

(*) *Avium cerebra nondum deſcripta hic recenſere viſum eſt, ut continuus ille tranſitus etiam hoc exemplo innoteſcat, qui eſt ex fabrica quadrupedum per aves in piſces, inve quadrupeda frigida, quæ multa piſcium habent ſimilia.*

v. Opera Minora Alb. *Halleri* Vol. III. ſect. XXXVI.

re a chi comunicare i menzionati comenti affine di ricavarne e correzione ed ammaeſtramento, ſin che non venni favorito da voi con quelle lettere, le quali m' incoraggiano a proſeguire nella carriera anatomica, e con il prezioſo dono dell' opera voſtra celebratiſſima intorno alle tavole poſtume del *Santorini*, la quale mi ſervirà d' eſemplare, e di guida, maſſime in quello, che concerne le voſtre utiliſſime ſcoperte.

Tanta benignità voſtra a favor mio non ſolo mi vi lega con vincoli indiſſolubili d' amicizia, e di gratitudine, ma sbandiſce dall' animo mio ogni irreſoluzione; e mi conferma nella ſicurezza, che queſte oſſervazioni ſull' *Encefalo degli Uccelli* non potrebbono eſſer indirizzate ad uomo, che con più bel nodo vanti in ſuo cuore unite dottrina ed urbanità, ſchiettezza e diſcrezione, erudizione e modeſtia, tutte prerogative altrettanto rare quanto deſiderate in chi dev' eſſer giudice e maeſtro in coſe di Fiſica, e di letteratura.

Eccovi pertanto in queſto ſcritto compendiato, oltre alle oſſervazioni Alleriane, tutto quello, che ſe ne legge nelle opere del *Willis* ſul cerebro e ſui nervi, le quali ſe per non ſo quale ſventura della Notomia non foſſero grate troppo ſuperficialmente lette, per non dire troppo vergognoſamente neglette, queſti organi ſarebbero aſſai meglio ſviluppati e conoſciuti.

Vi riuniſco altresì quello, che la lettura va ſomminiſtrandomi di relativo all' oggetto principale acciò che la mia ſpoſizione acquiſti maggior chiarezza, accennando i fonti dai quali è ricavato perchè odio appropriarmi le ricchezze altrui. Anzi vi ſcongiuro di non aſcondermi il nome, nè le opere di coloro, che avranno già deſcritte quelle parti, che v' accorgerete immaginarm' io d' avere prima di neſſun altro ſviluppato ed eſpoſto acciocchè loro non venga involato l' onore della ſcoperta; perciocchè non ſono abbaſtanza perſuaſo della ſolidità del penſiere di quel Letterato Franzeſe, che pretende tutto eſſere già ſtato detto.

La natura è un fondo ineſauribile, nel quale quanto ſi cerca più profondamente, tanto maggior dovizia trovaſi di coſe novelle: nè vogliam eſſere così ingiuſti verſo i noſtri coetanei, nè verſo i poſteri con ſuppor e gli uni, e gli altri incapaci di trovare nel fondo ſuddetto nuove ricchezze: onde eziandio che mi riconoſca inabile a fare ſcoperte importanti, pur ſo che lo ſpirito dell'uomo ha fecondità pari alla inſaziabilità del ſuo cuore, e che quando quello non può eſſer inventore, aggiunge e perfeziona valendoſi dei lumi altrui e facendo naſcere nuovi penſieri, nuovi metodi di oſſervare da quelli, che gli vengono altronde preſentati.

Così vo tentando io, e ſe non mi rieſcirà d'eſporre coſe nuove, proccurerò almeno di riunire le già conoſciute ſotto que' differenti punti di viſta, che potranno ſembrare più naturali; perciò troverete diviſa queſt' operetta in cinque trattati, nel primo de' quali verranno compreſe in due parti le notizie indiſpenſabili ſulle pareti tanto eſterne, quanto interne del cranio, che hanno relazione con il cerebro, e con i nervi cerebrali degli uccelli; nel ſecondo ſi deſcriveranno le meningi; nel terzo il cervello; nel quarto il cervelletto, e la midolla allungata; nell' ultimo i nervi, che eſcono dalle pareti del cranio.

Comprenderovvi pur anco le oſſervazioni anatomiche fatte da me ſu gli organi dei ſenſi in queſta claſſe d'animali, non ancora da altri pubblicate, o non arrivate a mia notizia, o eſpoſte differentemente da quel modo nel quale io le ritrovai.

In queſto caſo le mie oſſervazioni ſerviranno almeno per confermare la verità di quelle degli autori a me ſconoſciuti, verità ſempre accette a coloro, che coltivano la gloria naturale con il genio, col quale la coltivate voi, e agli ingegni elevati, depoſitarj delle cognizioni più prezioſe, e dei fondamenti più ſtabili del ſapere umano. Sicchè nè a voi, nè agli altri Filoſofi pari voſtri diſgradiranno, come alla ſteſſa Maeſtà dei regnanti non diſgradiſce l'umile ma cordiale offerta di fiori odoroſi e di ſaporite frutta in mezzo ai ricchi tributi delle più ubertoſe provincie.

Confeſsò il chiariſſimo *Allero* di non avere notomizzati molti uccelli, * e le oſſervazioni principali che ci laſciò dintorno ai cerebri loro diſſe di averle tratte dall' eſame di ſei oche ſole. * Su queſte mi eſercitai lungo tempo tenendo ſcrupoloſamente dietro a sì gran Maeſtro, e quando ne ebbi notomizzate varie dozzine m' avvidi, che anche nelle oche s' incontrano moltiſſime parti eſſenziali non eſpoſte nella diſſertazione Alleriana, o differenti da quanto vi ſi legge; perciò mi ſono invogliato di cercare ſe altre ſpezie di pennuti ne vadano provvedute, e ſe vi ſe ne poteſſe meglio ſcorgere la varietà.

Nè male mi appoſi, perciocchè in quaſi tutte le ſpecie notai differenze eſſenziali nella direzione, nella figura, nel ſito, e nel numero delle medeſime; onde mi vidi obbligato di ripetere più e più volte le oſſervazioni ſu quanti individui di quella ſpecie mi fu permeſſo; e degli individui ſteſſi vi preſento il catalogo adoperando la nomenclatura del celebre *Linneo*, giacchè le opere di sì diligente Naturaliſta facendo le delizie dei Profeſſori, più facilmente ſi capirà quale uccello vi nomini; e caſo che sbagliaſſi nel dargli il nome italiano, lo sbaglio mio verrà dalla corteſia voſtra corretto.

(*) *Non numeroſas aves incidi, vera erunt tamen quæ ex adverſariis meis hic repeto V. Loc. citat.*

(*) *Anſeris cerebrum ex ſex animalibus V. L. citat.* per quello che ha riſguardo al cerebro di queſta ſpecie d'uccelli.

Catalogo.

Degli individui delle diverſe ſpecie d' uccelli ſtati notomizzati da me per verificare le oſſervazioni Alleriane, ed eſporne l' encefalotomia.

		Numero degl'individui da me notomizzati.
	42. Falco	
Nibbio da noi Piemonteſi detto *la Pondrà*.	Milvus 12. *Falco cera flava, cauda forficata, corpore ferrugineo, capite albidiore*	2.
Falcon gentile.	Gentilis 13. *F. cera, pedibuſque flavis, corpore cinereo, maculis fuſcis, cauda faſciis quatuor nigricantibus.*	3.
Gheppio, o Smeriglio da noi Piemonteſi detto *la Crivella*.	Tinnunculus 16. *F. cera, pedibuſque flavis, dorſo rufo punctis nigris, pectore ſtriis fuſcis, cauda rotunda.*	8.
Sparviere.	Sparverius 20. *F. cera lutea, capite fuſco, vertice, abdomineque rubro, alis cæruleſcentibus.*	1.
	43. Strix	
Gufo.	Bubo 1. *Strix capite auriculato, corpore rufo.*	2.
Due ſpecie di Civette.	Otus 4. 5. *capite auriculato pennis ſenis.* Scops 5. 5. *capite auriculato penna ſolitaria*	4.
La Dama de' Piemonteſi.	Stridula 8. 5. *capite lævi, corpore ferrugineo, remige tertia longiore.*	2.
	45. Pſittacus	
Papagallo.	Æſtivus 32. *Pſittacus brachyurus viridis luteo ſubmaculatus, fronte cærulea, humeris ſanguineis, orbitis incarnatis.*	1.
	50. Corvus	
Corvo.	Corax 2. *Corvus ater, dorſo atro-cæruleſcente, cauda ſubrotunda,*	3.
Cornacchia.	Corone 3. *C. atro-cæruleſcens totus, cauda rotundata, rectricibus acutis.*	5.
	51. Coracias	
Io la credetti una ſpecie delle *Meropi* ſegnate 63. da *Linneo*.	Bengalenſis 5. *Coracias ſubfulva ſubtus cæruleſcens, collo ſubtus violaceo* (non ſtriato nec pallido) *cauda integra*	1.

37. Cuculus

2. Canorus 1. *Cuculus cauda rotundata nigricante, albo punctata.* Cucolo.

58. Yunx

2. Torquilla. Torcicollo.

59. Picus

3. Viridis 12. *Picus vertice coccineo.* Picchio.

64. Upupa

3. Epops 1. *Upupa criſtata variegata.*

67. Anas

Anſer 9. *Anas roſtro ſemicilindrico, corpore ſupra cinereo, ſubtus pallidiore, collo ſtriato.*

Più di cento. { Strepera 20. *A. ſpeculo alarum rufo, nigro, albo.*
Clangula 23. *A. nigro, alboque varia, capite tumido, violaceo, ſinu oris macula alba.*
Boſchas 40. *A. rectricibus intermediis (maris) recurvatis, roſtro recto.*
Domeſtica *B.* } Oche ed Anitre

72. Pelecanus

3. Piſcator 6. *Pelecanus cauda cuneiformi, roſtro ſerrato, corpore albo, remigibus omnibus, facieque nigris.* Domenicano in val di Bormia.

84. Ardea

2. Grus 4. *occipite nudo papilloſo, pileo, remigibuſque nigris, corpore cinereo, rectricibus intimis laceris* Gru.

1. Cinerea 11. *A. occipite nigro lævi, dorſo cæruleſcente, ſubtus albida, pectore maculis oblongis nigris.*
2. Major. 12. *A. occipite criſta nigra dependente, corpore cinereo, collo ſubtus linea, faſciaque pectorali nigris.* } Aghironi.
2. Alba 24. *A. capite lævi, corpore albo, roſtro fulvo, pedibus nigris.*

86. Scolopax

6. Ruſticola 6. *Scolopax roſtro recto, baſi rufeſcen-* Beccaccia.

	te, pedibus cinereis, femoribus tectis, faſcia capitis nigra.	
Beccaccino.	Gallinago 7. *S. roſtro recto, tuberculato, pedibus fuſcis, frontis lineis fuſcis quaternis.*	8.
	98. Pavo.	
Pavone	Criſtatus 1. *Pavo capite criſta compreſſa, calcaribus ſolitariis.*	1.
	99. Meleagris.	
Gallo d' India.	Gallopavo 1. *Meleagris capite caruncula frontali, gularique, maris pectore barbato.*	20.
	101. Phaſianus.	
Galli, Galline, e Fagiani.	Gallus 1. *Phaſianus caruncula compreſſa verticis, geminaque gulæ, auribus nudis, cauda compreſſa adſcendente.*	50.
	102. Numida	
Gallina detta di Faraone.	Meleagris.	1.
	103. Tetrao	
Pernice.	Perdix 13. *Tetrao pedibus nudis calcaratis macula nuda coccinea ſub oculis, cauda ferruginea, pectore brunneo.*	12.
Quaglia.	Coturnix 20. *T. pedibus nudis, corpore griſeo maculato, ſuperciliis albis, rectricibus margine, lunulaque ferruginea.*	16.
	104. Columba	
Piccione.	Domeſtica 1.	20.
Colombo Selvatico.	Palumbus 19. *C. rectricibus poſtice atris, remigibus primoribus margine exteriore albidis, collo utrinque albo.*	4.
Tortorelle	Turtur 32. *C. rectricibus apice albis, dorſo griſeo, pectore incarnato, macula laterali colli nigra lineolis albis.*	4.
	Riſoria 33. *C. ſupra luteſcens, lunula cervicali nigra.*	6.
	105. Alauda	
Allodola.	Arvenſis 1. *Alauda rectricibus extimis duabus extrorſum longitudinaliter albis, intermediis interiori latere ferrugineis.*	6.

106. Sturnus

8.	Vulgaris 5. *Sturnus roſtro flaveſcente, corpore nigro, punctis albis.*	Storno.

107. Turdus

10.	Viſcivorus 1. *Turdus dorſo fuſco, collo maculis albis, roſtro flaveſcente.*	Tordo.
4.	Merula 22. *T. ater roſtro, palpebriſque fulvis.*	Merlo.

109. Loxia

8.	Coccothrauſtes 2. *Loxia linea alarum alba, remigibus mediis apice rhombeis, rectricibus latere tenuiore baſeos nigris.*	Froſone, da noi detto *Becco-duro*
3.	Chloris 27. *L. flavicanti-vireſcens, remigibus primoribus antice luteis, rectricibus lateralibus quatuor baſi luteis.*	Se è il noſtro Verdòne.

110. Emberiza.

18.	Hortulana 4. *Emberiza remigibus nigris, primis tribus margine albidis, rectricibus nigris, lateralibus extrorſum nigris.*	Ortolano.
2.	Citrinella 5. *E. rectricibus nigricantibus, extimis duabus latere interiore macula alba acuta.*	Zivolo.

112. Fringilla

1.	Cœlebs 3. *Fring. artubus nigris, remigibus utrinq. albis, tribus primis immaculatis, rectricibus duabus oblique albis.*	Paſſera Solitaria.
3.	Montifringilla 4. *alarum baſi ſubtus flaviſſima.*	
1.	Julenſis 5. *F. fuſca, pectore humeriſque rufis, alis nigris, macula rufa.*	
6.	Carduelis 7. *F. remigibus antrorſum luteis extima immaculata, rectricibus duabus extimis medio, reliquiſque apice albis.*	Cardellini.
2.	Serinus 17. *F. ſubvireſcens, mandibula inferiore albida, dorſo lateribus fuſco maculatis, faſcia alarum alba.*	
6.	Canaria 27. *F. roſtro, corporeque albo-flavicante, rectricibus, remigibuſque vireſcentibus, roſtro albido.*	Canarino

Paſſeri da muro e da Salcio.	Domeſtica 36. *F. remigibus, rectricibusque fuſcis corpore griſeo nigroque, faſcia alarum alba ſolitaria.*	30.
	104. Motacilla	
Uſſignuolo.	Luſcinia 1. *Motacilla rufo-cinerea armillis cinereis.*	2.
Cannavarola.	Curruca 6. *M. ſupra fuſca, ſubtus albida, rectricibus fuſcis, extimo margine tenuiore alba.*	2.
Beccafico.	Ficedula 10. *M. ſubfuſca, ſubtus alba, pectore cinereo-maculato.*	6.
Cutretta da noi detta *Ballerina.*	Alba 11. *M. pectore nigro, rectricibus duabus lateralibus dimidiato oblique albis.*	8.
Capinero.	Atricapilla 18. *M. teſtacea ſubtus cinerea, pileo obſcuro*	2.
Reattino.	Trochilus 49. *M. cinereo-virens, alis ſubtus rectricibus flaveſcentibus, ſuperciliis luteis.*	6.
	117. Hirundo	
Rondinella:	Ruſtica 1. *Hirundo rectricibus, exceptis duabus intermediis, macula alba notatis.*	10.
Gul-bianco preſſo i Piemonteſi.	Urbica 3. *H. rectricibus immaculatis, dorſo nigro cæruleſcente, tota ſubtus alba.*	3.
Rondone.	Apus 6. *H. nigricans, gula alba, digitis omnibus quatuor anticis.*	7.

La ſerie delle mie oſſervazioni ſulle teſte degli uccelli è dunque ſondata ſull' eſame di più di quattrocento individui. Felice me ſe tutte queſte vittime ſacrificate alla ricerca della verità, e all' aumento delle cognizioni noſtre intorno alla più importante tra le viſcere mi guideranno al conſeguimento del fine principale, che mi ſono propoſto, il quale ſi è di rendere me ſteſſo e i Lettori miei ſempre più riconoſcenti verſo l' *ineffabile Increata Sapienza*, la quale tutto che abbia voluto provvedere d'organi in apparenza analoghi il cranio di moltiſſimi dei viventi, ha però in diverſiſſima guiſa coſtrutti nelle diverſe ſpecie gli organi medeſimi a tenor dei loro biſogni, e ſi compiacque di fiſſare nel ſolo cerebro umano la ſede principale di quella incomprenſibile maravigliosa ſoſtanza, che ci fa ragionevoli, e capaci di adorarne (per quanto alla umana debolezze è conceſſo) la Maeſtà, e di ammirarne gl'immenſi a noi favorevoli attributi in qualſivoglia delle di Lei creature.

Con queſti ſentimenti do fine alla mia lettera di nuovo ſupplicando V. S. di non riſparmiare quanto ſtimerà opportuno a rendere meno difettoſa la mia operetta, la quale ſervirà di teſtimonianza al mondo della amicizia onde voi mi onorate, e della ſtima inalterabile, che fo e farò ſempre dei voſtri meriti, e del ſaper voſtro.

TRATTATO I.

Delle oſſa del Cranio degli uccelli in generale, e particolarmente delle Oche e delle Anitre.

TESTO ALLERIANO *

„ Le preſenti oſſervazioni ſul cervello dell' Oca le
„ ho fatte ſopra ſei individui di queſta ſpecie d' uccel-
„ li, le oſſa del cranio de' quali ſono ſpeſſe, maſſime
„ all' occipite, e celluloſe.

PARTE PRIMA.

Eſpoſizione delle parti eſterne della teſta degli Uccelli.

CAPITOLO PRIMO.

Deſcrizion generale della teſta degli uccelli.

L'Eſatta cognizione delle parti contenute nella cavità del cranio di qualſivoglia animale ſoltanto allora ſi ottiene quando ſe ne conoſce la diſpoſizione e la ſtruttura delle contenenti, mancando la quale tanto men giuſta idea ſi avrà dell'entrare e dell'uſcire dei vaſi e dei nervi nella cavità medeſima; perciò reſta indiſpenſabile, che ſi faccia precedere la ſerie delle notizie più opportune a determinare il numero delle regioni, e i limiti delle oſſa, che le occupano.

---

* *Anſeris cerebrum ex ſex animalibus. Cranium craſſum, maxime ad occiput, & celluloſum.*

ARTICOLO I.

Parti eſteriori della teſta, e prima il Cranio degli Uccelli.

1. La teſta degli uccelli ſi divide in *cranio*, ed in *Becco* oſſia *Roſtro*.

2. Il *cranio*, che in quaſi tutte le ſpecie ne fa la porzione più eſſenziale, ſe in tutti non ne fa la più eſteſa, occupa la region ſuperiore e poſteriore della teſta, e vi ſi diſtinguono il *vertice* coperto di piume, i *lati* dove ſono prominenti gli *occhi*, ed incavate le *orecchie*, e ſi attaccano molti muſcoli deſtinati al movimento degli organi attigui; la *baſe* corriſpondente alle *radici* del *becco*, e alla ſommità anteriore carnoſa del lungo fleſſibiliſſimo collo; la *fronte*, cioè la parte anteriore ſtretta e piana della teſta, che diſcende leggiermente fra le *orbite;* l'*occipite*, che ne è la parte poſteriore larga e gibboſa.

ARTICOLO II.

Il Becco.

1. Il Becco o roſtro è differente nelle diverſe ſpecie volatili tanto in figura e in conſiſtenza, quanto in lunghezza, in larghezza, e in direzione, poichè ſe ne vedono dritti, inarcati, ritorti, ſottili, compreſſi ai lati, appiattiti, conici, angolati, ſolcati, ſatti a ſoggia di leſina, di coltello, a volta, uncinati, adunchi, cilindrici, brevi, mezzani, lunghiſſimi, e groſſiſſimi ecc.

2. Divideſi il becco in porzioni ſuperiore ed inferiore, alle quali nelle Oche e nelle Anitre potrebbe darſi il nome di maſcelle.

3. Vi ſi conſidera prima di tutto la corona del bec-

co, oſſia il ceppo comune a tutte e due le porzioni, che è appunto nel ſito dove le piume ſono come una ſpecie di peluria detta dai Naturaliſti il *capeſtro*, il quale conſiſte in una linea ſtretta riguardo ad alcune ſpecie, riguardo ad altre in un largo collare; havvene pure, che hanno la peluria del *capeſtro* rivolta in alto e indietro a ſeconda della direzione delle altre penne del capo; alcune lo hanno ſcarmigliato, altre roveſciato in giù ſul becco come i Corvi, le Gazze, le Strigi; altre poi hanno il ceppo del becco coperto di pelle morbida e ſgombra di penne, la quale ha preſſo *Linneo* il nome di *cera*.

4. Vi ſi nota il *corpo*, che riguardo alla porzione o maſcella ſuperiore ſi divide in *dorſo*, nel quale ſono ſcolpite le *narici* eſteriori guarnite di peli nominati *vibriſſe*, e in ale, o margini deſtro e ſiniſtro, riguardo alla inferiore in lati, e in baſe.

5. Vi ſi oſſerva finalmente l'eſtremità oſſia punta in molti uccelli retta ed acuta, in altri ottuſa, tuberculoſa, adunca, ricurva.

6. Nelle Oche e nelle Anitre l'eſtremità del becco è larga, arcata, munita d'un'unghia, in queſte bruna forbita, e più larga verſo l'orlo delle maſcelle, nelle Oche bianca, liſcia più larga, più conveſſa, quaſi ovale, ſodiſſima, e aſſai più aderente.

ARTICOLO III.

Dimenſion generale della teſta delle Oche.

Spogliato degl'integumenti, e dei muſcoli il cranio delle Oche, diviſo da tutto quello, che s'appartiene al becco e al collo, trovaſi comunemente lungo dalle 28 alle 30 linee parigine; e ſe fingaſi una linea raſente la ſuperficie eſteriore conveſſa del cranio dalla apofiſi naſale di mezzo alla occipitale, queſta batterà fra le 46 linee, e i quattro pollici.

CAPITOLO

CAPITOLO II.

Diviſione delle parti eſteriori del cranio delle Oche.

Non diſcoprendoſi facilmente nelle Oche adulte le diviſioni naturali delle oſſa del cranio, e non eſſendone contraſſegnati i margini da ſutura, nè da apparenti armonie; e per altra parte vedendoviſi la figura in parecchi luoghi diſtinta, oltre che con le differenti porzioni delle oſſa medeſime vengono formate regioni pur differenti, mi ſembra indiſpenſabile, che per chiarezza maggiore vengano indicate le porzioni principali per dividerle all'uopo in altre ſubalterne.

ARTICOLO I.

Porzioni principali della conveſſità del cranio delle Oche.

1. Su queſta conveſſità ſi oſſervano tre porzioni principali per lato, le naſali, le frontali, e le parietali.

2. Le *porzioni naſali* quadrilunghe aſcendono fino ad un forame ſcolpito nel vertice diſtante linee 9 dalla apofiſi *naſale di mezzo*, e trovaſi proprio nel centro di quella linea, che trar ſi potrebbe in traverſo dalla *apofiſi orbitaria ſuperior deſtra* alla *apofiſi orbitaria ſuperior ſiniſtra*.

3. Quel *foro* è alcune volte doppio ſenza però, che il deſtro ſia parallelo, nè coſtantemente ſimmetrico con il ſiniſtro, e che tuttedue comunichino con il *ſeno longitudinale* della *dura madre*.

4. Fra l'accennato forame, e quell'*arco* rilevato che è tanto apparente ſulla ſommità poſteriore del cranio v'è uno ſpazio lungo lin. 20 circa, delle quali venti linee le dieci anteriori ſervono per miſurare l'eſtenſion delle *porzioni frontali*.

5. Queſte finiſcono in alto dirimpetto alla ſommità delle *orbite*.

6. Da tale altezza all'*arco* già menzionato ſi ſtendono per lo ſpazio delle altre dieci linee le *porzioni parietali*.

7. Tanto le porzioni naſali quanto le frontali e le parietali ſono diviſe in deſtra e ſiniſtra mediante una *linea incavata*, che dalla apofiſi *naſale di mezzo* aſcende fino alla ſommità dell'*arco*.

8. L'*arco* ſi curva ſui lati della ſommità e della faccia poſteriore del cranio, la quale diceſi *porzione occipitale*, che in alto in avanti e ai lati è circoſcritta dal medeſimo arco.

9. In baſſo ſtendeſi fino alla radice di due apofiſi paragonabili per la ſituazione più che per la figura loro alle *apofiſi maſtoidee* umane, e fino al *gran foro occipitale*.

10. Dalla ſommità dell'arco diſcende fino al *gran foro* ſuddetto una *ſpina piramidale*, oſſia *creſta oſſoſa*, che con la ſua baſe appoggia ſull' orlo ſuperiore di queſto foro.

ARTICOLO II.

Eminenze più conſiderabili alla baſe del cranio delle Oche.

I. Alla baſe del cranio delle Oche ſi vedono parecchie eminenze oltre a molte foſſe ed incavature, a numeroſi ſolchi e forami. Alcune delle eminenze ſono ai lati, altre ſull'aſſe maggiore della baſe iſteſſa, onde cominceremo a deſcrivere le ſimmetriche o laterali prima di numerar quelle di mezzo.

2. Al davanti ve ne ha due brevi, e piatte, dal ſito e dalle funzioni loro dette *apofiſi naſali* deſtra e ſiniſtra.

3. Dietro e ſotto queſte ſi allungano le due *orbitarie inferiori* una per lato alla parte anteriore delle orbite.

4. Ai lati della ſommità delle *porzioni naſali* ſi veggono le poco elevate apofiſi *orbitarie ſuperiori* diviſe dalle predette mediante una mediocre *incavatura*.

5. Dico poco elevate parlando delle Oche e delle Anitre; ma nel Nibbio, nello Sparviere, nel Gheppio, e nello Smeriglio, che noi Piemonteſi nominiamo *Crivella*, le apofiſi orbitarie ſuperiori ſono prolungate per due lamine piatte e ſottili, che ſi ſcoſtano alquanto dal margine dell' orbita, e per eſempio nel Nibbio traſcorrendo lo ſpazio d' un pollice laſciano un voto fra il margine loro interno, e la porzion naſale, occupato da una membrana ligamentoſa forte ed elaſtica, la quale unitamente all' accennato prolungamento di queſte apofiſi forma la parte anterior principale degli *archi delle orbite*, che ne terminano eſteriormente la *volta*.

6. Seguono alla parte poſteriore delle *orbite* le lunghe, obblique, ed acute *apofiſi orbitarie poſteriori*.

7. Finalmente alla parte inferior poſteriore dei lati del cranio ſi vedono le apofiſi *maſtoidee*, concave al davanti per dar ricetto ad uno dei capi del mobile *oſſo intermaſcellare*, e più ampiamente incavate all' indietro per dar luogo alla *lunata membrana del timpano*, per contenere alcuni degli organi appartenenti all' udito, e per dare uſcita ad alcune groſſe vene diſcendenti dall'encefalo.

8. Fra quelle, che occupano l' aſſe della baſe del cranio, v'è anteriormente la piatta e breve *apofiſi naſale di mezzo*,

9. La *parete oſſoſa obbliqua*, che ſoſtiene in alto e indietro il *tramezzo delle orbite*, e

10. La *creſta ſottile dentata*, ſoſtegno del *tramezzo delle narici*.

11. Alla eſtremità poſteriore dell' accennato *parete* ſi vedono elevate ſu due ſpecie di apofiſi due *faccette articolari* deſtinate ad agevolare i movimenti della *maſcella ſuperiore*, apparentiſſime nelle Oche e nelle Anitre

perchè vi ſi appoggiano due ſimili *faccette ovali* coperte di liſcia cartilagine, proprie delle *appendici dei fucili interni* della medeſima *porzion ſuperiore del becco*.

12. Dietro alle *faccette articolari* dopo un breve intervallo vi è l' angolo anteriore della *tuberoſità baſilare*, eminenza conſiderabiliſſima fatta a guiſa di triangolo, gli angoli poſteriori della quale ſono tronchi.

13. Tale *tuberoſità* è longitudinalmente diviſa per una *creſta* aſſai diſuguale e ſcabra deſtinata all' attacco di varj muſculi, ed occupa un ampio ſito fra le *faccette articolari*, le *apoſiſi maſtoidee*, e la *occipitale*.

14. L' *apoſiſi occipitale* è liſcia, pulita, quaſi ſimile ad un *capezzolo oſſoſo*, coperta di cartilagine: ſembra affiſſa al margine inferiore del *gran foro occipitale*, e alla baſe della *tuberoſità occipitale* con la quale confina per mezzo d' una ſpecie di *collo*.

15. Il *collo* della *apoſiſi occipitale* conſiſte in un *ſolco ſemilunare*, le corna del quale ſono rivolte in ſu: vi ſi pianta un robuſto *ligamento capſulare*, che uniſce a tale apoſiſi la prima *vertebra*.

16. E' anche neceſſario, che vengano notate due piccole *ſpine oſſoſe* ſulla ſteſſa linea delle *faccette articolari*, alquanto più verſo la ſommità della parte poſteriore del *tramezzo*, fra queſto e la faccia interna della radice delle *apoſiſi orbitarie poſteriori*.

ARTICOLO III.

Cavità eſteriori della faccia ſuperiore del cranio.

1. Tra le cavità della faccia ſuperiore del cranio delle Anitre ſi contano due grandi e profonde *incavature naſali* ſcolpite nella faccia inferiore delle porzioni naſali fra le apoſiſi dello ſteſſo nome, le orbitarie inferiori anteriori, le orbitarie ſuperiori, e la parte obbliqua, che le ſepara.

2. Due *foſſe naſali* ſulla parte anterior ſuperiore interna del tramezo delle narici ſotto la porzion naſale.

3. Due grandi foſſe dette le *orbite* ovali, profonde, ſeparate mediante il proprio loro tramezzo.

4. Le *incavature ſemilunari* tra le apofiſi orbitarie anteriori ſull' orlo delle orbite medeſime.

5. Seguono le *incavature traverſali* fra le apofiſi orbitarie poſteriori, e le faccette articolari.

6. Le *incavature temporali* tra le apofiſi orbitarie poſteriori, e le maſtoidee.

7. Le *articolari*, e

8. Le *auricolari*, *incavature* ſcolpite nella faccia concava delle apofiſi maſtoidee.

9. Le *incavature maſtoidee* tra le apofiſi di queſto nome, e i lati dell' ampia tuberoſità baſilare.

10. Vi ſono di [illegible] due ſtrette e lunghe *ſcanalature* con l'orlo eſterio[illegible]bro, le quali cominciano tra le apofiſi naſali dei lati, e la naſal di mezzo, e ſi ſtendono ſulla volta delle foſſe naſali ſino tra le apofiſi orbitarie ſuperiori, e il margine vicino anterior ſuperiore delle orbite.

ARTICOLO IV.

Cavità delle parti inferiori eſterne del cranio.

1. Alla faccia inferiore del cranio dei ſuddetti uccelli ſi veggono le *foſſe maſtoidee*, cioè due depreſſioni larghe e profonde che al davanti finiſcono in un angolo, laſciate da due *linee aſpre* aſſai rilevate, le quali partendo da una *creſta longitudinale tuberoſa*, regnante nel mezzo della tuberoſità baſilare, vengono ad unirſi con il lembo interno, ed anteriore delle apofiſi maſtoidee.

2. Queſte foſſe danno attacco a diverſi muſculi, e comunicano con la cavità del cranio mediante un *foro bipartito*, per la apertura anteriore del quale eſce il ner-

vo del *par vago* , per la diretana un groſſo ramo delle *vene jugulari* .

3. Le *aperture* diſtinte di due canaletti orizzontali deſtinati a dar uſcita dal cranio cadono ad un ramo principale del nervo del nono paro: aperture, che sboccano all' angolo anteriore della *tuberoſità baſilare*, e che poſſono prendere il nome dal nervo, che vi paſſa.

4. I *condotti* delle *carotidi* fatti a guiſa di corna: principiano al fianco eſterno dei canaletti ora deſcritti, e ſi circonflettono indentro , e in alto verſo la *foſſa pituitaria* . Guidano un ramo conſiderabile di tali arterie , che paſſando ſui fianchi della *glandula pituitaria* ſcorre obbliquamente indietro, e in alto per diramarſi nella baſe del cervello dietro all' *unione* dei *nervi ottici* .

5. La faccia poſteriore del cranio dietro dell' *arco oſſoſo* preſenta all' occhio un *triangolo* quaſi rettilineo, i lati del quale ſono fatti da due creſte, che dalla *ſpina occipitale* vengono a terminare nel lembo poſteriore delle *apofiſi maſtoidee* .

6. Le parti poſteriori inferiori dei lati del triangolo radono il *foro occipitale*, il margine inferiore del quale è fatto dal *capezzolo occipitale* già mentovato.

7. Tra la *ſpina occipitale*, l' arco, e la radice delle *apofiſi maſtoidee* vi ſono due larghe impronte muſculari aſſai incavate.

CAPITOLO III.

Soſtanza delle oſſa del cranio .

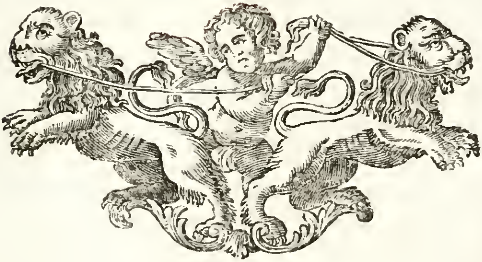
In tutte le deſcritte porzioni delle oſſa del cranio delle Oche, delle Anitre e degli altri uccelli in generale ſi diſtinguono due *tavole* ſode, fragili, bianche, e tra le medeſime un abbondante *meditullio* , eccetto nel centro del *tramezzo delle orbite* .

Il *meditullio* , detto pur *Diploe* dagli Anatomici , è negli uccelli un teſſuto ſpugnoſo più abbondante, e più raro alla *tuberoſità baſilare*, alla radice di tutte la apofiſi , ſu per tutta la *colonna* , che ſoſtiene il *tramezzo* delle *orbite*, maſſime dietro la *porzion naſale*.

Notabile altresì ne è l' abbondanza all' *arco* , dove (oltre che dà maggior leggierezza al cranio) ſerve anche a dare maggior energia all' organo dell' *udito* ampliandone i *labirinti* , e multiplicandone le concavità.

FINE

Della prima parte del I. Tratt. dell' eſpoſizione anatomica delle parti relative all' Enceſalo degli uccelli , la quale tratta delle parti eſteriori oſſoſe del cranio dei medeſimi .



ESAME CRITICO

Di un Problema di probabilità del Sig. DANIELE BERNOULLI, *e ſoluzione d' un altro Problema analogo al Bernulliano.*

Del Sig. GIO: FRANCESCO MALFATTI Profeſſore di Matematica nell' Univerſità di Ferrara.

1 DAppoichè i Matematici han conoſciuto il diritto, che ha la lor facoltà di eſtendere i ſuoi calcoli fin ſu la ſorte, e di preſagirne in qualche maniera gli eventi, aſſegnando a ciaſcuno il correſpettivo grado di probabilità, e dando un certo e determinato valore alla ſperanza e al timore, che l' uom dee avere ſu d'eſſi, non è mancato tra loro chi ſi applichi con tutta l' attenzione a queſta parte utiliſſima dell' umano ſapere; e noi ſiam debitori ai *Moivre*, ai *Monmort*, agli *Hugenj*, ai *Bernoullj*, e ad altri eccellenti ingegni de' veri principj, ſui quali eſſa è fondata, e delle regole, che coſtituiſcono l' equità in que' contratti, ne' quali entra il riſico e la dipendenza da ciò che ſi chiama caſo fortuito, accidentalità, fortuna. Di queſta ſpecie ſono i giuochi, maſſimamente d' azzardo, le aſſicurazioni, i vitalizj, le tontine, ed altre ſpeculazioni di ſimil tempera, che gli uomini ſi ſon tratte dal capo per non laſciar via intentata di migliorar le loro circoſtanze, e render più comodo il loro ſtato.

2. Avvegnachè però e molti ſiano ſtati i problemi di tal fatta che hanno ſciolto gli Autori, e parecchi ſian già i canoni che abbiamo, dotati di qualche generalità, ſotto cui tant' altri riduconſi che hanno affinità

nità con quelli, de' quali è ſtata data la ſoluzione; sì è lontano che al dì d'oggi ſi poſſa dir la materia eſaurita, che non ſi ceſſa di conſiderar gli eventi della ſorte ſotto nuovi aſpetti, e s' immaginan nuovi contratti, e s' inventano nuovi giuochi, ſoventi volte pel ſol piacere d' indagar le leggi, con cui dovrebbero eſſere regolati in tale e tal caſo i depoſiti de' giocatori e i patti de' contraenti, affinchè ſi ſalvi interamente la giuſtizia e non intervenga alcuna leſione. Proporzionandoſi per sì fatto modo le corriſpoſte alle aſpettative degli eventi utili, ſi pareggiano di qua e di là le partite, e ſi coſtringe, dirò così, la fortuna ad eſſer giuſta nella diſtribuzione de' ſuoi favori.

3. Tra queſti inventori di nuovi problemi di probabilità ha voluto eſſere ancora annoverato il gran Geometra e Medico Sig. *Daniele Bernoulli*, ultimo de' tre illuſtri Fratelli, che hanno tanto arricchito le Matematiche colle ſublimi loro ſcoperte, del quale, tre meſi fa, l' Europa letteraria ha pianto la morte ſeguita dopo una lunga carriera di meriti, e dopo ch' egli avea già sì doviziosamente provveduto colle ſue opere alla immortalità del ſuo nome. Il Problema, ch' ei ſi propone nel Tomo XIV. de' Comentarj della nuova Accademia di *Pietroburgo*, è uno de' più compoſti, ſe ſi conſidera in tutta la ſua eſtenſione, ma divien ſemplice, ſe ci fermiamo alla prima ipoteſi. Sentiam lui medeſimo, il quale così ci parla.

4. *Sint duæ, tres, pluresve urnæ, in quibus ſingulis ſchedulæ certo & æquali numero repoſitæ putentur, ſchedulæ autem uniuſcujuſque urnæ ſuo peculiari colore a ſchedulis reliquarum urnarum ab initio diſtinctæ ſint; tum porrò ſchedulæ ſucceſſive, ſorte tamen permutentur hac lege, ut quavis vice ex ſingulis urnis ſchedula una extrahatur, & deinde in urnam ordine ſequentem translocetur, illa autem, quæ ex urna ultimo loco poſita extracta ſit, in in primam reponatur: his ita poſitis, datoque permutatio-*

num præfato modo factarum numero, quæritur numerus ſchedularum cujuſvis coloris, quæ probabiliter in quavis urna continebuntur. Quoties autem extractio ex ſingulis urnis ſimul facta fuit, ſimulque eo, quo dixi, modo in urnam ſequentem ſchedula quævis tranſpoſita, integram iſtam operationem permutationis nomine indico. . . .

5. *Quamvis obvius ſit calculus pro duabus urnis, eum tamen ob nexum, quem habebit cum ſequentibus, apponam. Sint igitur in prima urna ſchedulæ albæ* n, *totidemque nigræ in urna altera. Erit ſecundum notas combinationum, atque probabilitatum regulas poſt primam permutationem numerus ſchedularum albarum in prima urna reſiduarum* $= n - 1$; *poſt ſecundam permutationem* $= \frac{(n-1)\,(n-2)}{n} + 1$; *poſt tertiam permutationem habebitur* $\frac{(n-1)\,(n-2)^2}{nn} + \frac{n-2}{n} + 1$; *poſt quartam* $\frac{(n-1)\,(n-2)^3}{n^3} + \frac{(n-2)^2}{n^2} + \frac{n-2}{n} + 1$; *poſt quintam* $\frac{(n-1)\,(n-2)^4}{n^4} + \frac{(n-2)^3}{n^3} + \frac{(n-2)^2}{n^2} + \frac{n-2}{n} + 1$, *& ſic porro: inde colligitur, ſi generaliter numerus factarum permutationum fuerit* r, *atque ponatur brevitatis gratia* $\frac{n-2}{n} = m$, *fore numerum ſchedularum albarum in prima urna reliquarum* $= \frac{1 - m^{r-1}}{1 - m} + (n-1)\,m^{r-1} = \frac{1}{2}\,n\,(1 + m^r)$. *Debinc reliquarum ſchedularum diſtributio per ſe intelligitur.* Da queſta prima ipoteſi paſſa poi alle altre più compoſte, e trova per queſte pure le formole corriſpondenti, nelle quali ſcopre infine una legge di progreſſo che gli fa ſtabilire il canone generale

per determinare il numero delle ſchedule colorate che rimangon nelle urne dopo qualſiſia numero di permutazioni.

6. Non dipartendomi dalla prima ſuppoſizione delle due urne, ſiccome l' Autore non accenna, per quale ſtrada ſia giunto a ritrovar le ſue formole, confeſſo di eſſermivi fermato ſopra alcun tempo, ſenza potere indovinare da qual raziocinio e da qual calcolo gli veniſſero ſomminiſtrate. Finalmente e' mi venne in capo, che poteſſe avere qualche analogia col ſuo problema delle ſchedole e delle due urne un altro problema di due botti A, B eguali di capacità, la prima delle quali ſia piena di vino e l'altra d'acqua. Levando dalla prima, e dalla ſeconda eguali miſure, poi fatta la permutazione, è chiaro che, ove la miſura ſi chiami 1, e n la quantità del fluido in ciaſcuna botte, riman nella botte A $n-1$ di vino e 1 d' acqua, accadendo preciſamente il contrario nella botte B. Per la ſeconda permutazione poi riflettendo, che nella miſura 1 di miſto, che cavo dal vaſo A, deve ſtare tutto il miſto al vino in quella proporzione medeſima, che oſſerva l'intero miſto al vino nella botte, trovo, che $\frac{n-1}{n}$ eſprime la quantità di vino tratto da A la ſeconda volta, onde il vin reſiduo in A alla metà dell'operazione diventa $n-1-\frac{(n-1)}{n}=\frac{(n-1)^2}{n}$. Paſſando poi al vaſo B, ſiccome in eſſo il vino è 1, l'analogia $n:1::1:\frac{1}{n}$ ci fa conoſcere, che $\frac{1}{n}$ è la quantità di vino tratto da B, il quale per terminare l' intera operazione va verſato in A. Dunque, eſeguita la ſeconda permutazione, avrò in A quantità di vino $\frac{(n-1)^2}{n}+\frac{1}{n}$, ovvero

$\frac{n^2 + (n-2)^2}{2n}$, formola equivalente alla Bernulliana $\frac{(n-1)\ (n-2)}{n} + 1$.

1. Replicando un ſimile raziocinio per la terza, quarta ecc. permutazione, ſi troverà per la terza il vino in $A = n^3 + \frac{(n-2)^3}{2nn}$; per la $4^a = \frac{n^4 + (-2)^4}{2n^3}$ ecc., onde pel num. indefinito r di permutazioni, ſarà il vino reſiduo in $A = \frac{n^r + (n-2)^r}{n2^{r-1}}$, cioè (ſoſtituito m in vece di $\frac{n-2}{n}$) $= \frac{n}{2}(1+m^r)$, che è appunto il canone del noſtro Ch. Autore.

8. Aſſicuratomi per tal modo della identicità delle mie formole con quelle del num. 5., ho ſoſpettato, che il Bernullio ſciogliendo prima il problema delle botti, e appreſſo rivolgendoſi all' altro delle ſchedole, abbia argomentato così. Diſtribuiſcanſi le ſchedole bianche e nere, che ſon nelle urne A, B dopo la prima permutazione, in tal maniera

A
bianche $n-1$: nere 1
B
nere $n-1$: bianche 1

E intraprendaſi la ſeconda. Poichè in A ſono le bianche $n-1$, e le nere 1, la parte probabile delle bianche che prendo è $\frac{n-1}{n}$, e la parte probabile delle nere è $\frac{1}{n}$, perchè queſte due parti unite inſieme fanno l'unica ſchedola che eſtraggo; e il quanto probabile delle bianche deve ſtare al quanto probabile delle nere, come il numero delle bianche al numero delle nere che ſon nell' urna, nella qual ragione ſtanno appunto le parti $\frac{n-1}{n}$, $\frac{1}{n}$. Il perchè, ſottratto $\frac{n-1}{n}$ dal numero $n-1$ di bianche che eran nell' urna dopo la metà della 2ª operazione, ſarà probabile che reſtino in A ſchedole bianche $n-1-\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Con ſimile raziocinio, per l' altra metà dell' operazione, egli trova, che probabilmente ſi cava dall' urna B la parte $\frac{1}{n}$ di bianche, la quale meſſa in A coſtituiſce il numero probabile di ſchedole bianche in A, eſeguita che ſia la 2ª permutazione, $=n-1-\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{n}=\left(\frac{(n-1)(n-2)}{n}\right)+1$.

9. Proſeguendo poi alle permutazioni conſecutive, riſultano le altre formole e il canone del Bernullio, coſicchè altra differenza non vi ſarà tra il problema de' due fluidi e queſto delle ſchedole, che le formole nel primo rappreſentano le quantità certe e neceſſarie di vino che riman nella botte, laddove nel ſecondo colle medeſime formole ſi eſprime ſolo il quanto probabile delle ſchedole bianche che rimangon nell' urna.

10. Della giuſtezza di queſto o ſomigliante ragionamento, che poſſa aver fatto il Bernullio, fecemi dubitare un Corollario che ne diſcendeva, e ch' egli ſteſſo nota nel decorſo della ſua diſſertazione con queſte parole. *Quia* m *ſemper eſt unitate minor*, *evaneſcit terminus* m^r, *ſi* r *ſit numerus admodum magnus* (cioè infinito); *atque tum ſit numerus ſchedularum albarum in prima urna reſiduarum ſimpliciter* $=\frac{n}{2}$. *Status is eſt aſymptotos*, *ad quem*, *dum permutationes fiunt*, *magis magiſque pervenitur*..... . Dunque, diceva io, ſe le ſchedole bianche nella prim' urna ſaran tre, ed una la ne-

ra ; e nella ſeconda abbianvi tre nere ed una bianca , vi vorranno infinite permutazioni, perchè io poſſa ſperare di aver nella prim' urna due bianche, che ſono precisamente la metà di tutte le bianche che abbiamo . Queſta conſeguenza mi parea duro di dover ammettere nel tempo che atteſa la facilità di trar' una delle tre bianche dalla prim' urna , e ſimultaneamente una delle tre nere dalla ſeconda, non avrei dubitato di ſcommettere, che mi ſarei ridotto alla metà dopo una ſola permutazione.

11. S' accrebbe poi il mio dubbio , anzi terminai di convincermi della diverſa indole de' due problemi , e dell' errore in che era caduto il Bernullio con queſta ſemplice riflеſſione. Il problema de' due fluidi eſige, che ſeguitando a permutare , il vino della prima botte vada neceſſariamente diminuendo; ed eſeguita la prima permutazione , non ſon mai poſſibili i caſi , che colle ſuſſeguenti ſi ritorni ad avere in eſſa quantità di vino $n-1$, e molto men tutto vino : al contrario nel problema delle ſchedole è poſſibile che nelle diverſe permutazioni ora creſca , ora cali il numero delle ſchedole bianche , e dopo alcune operazioni potrebb' anche riuſcir probabile, che rimaneſſero nella prim' urna ſchedole bianche $n-1$, o ad eſſa tutte le bianche veniſſero reſtituite. Ora tutti queſti caſi non potendo eſſere abbracciati, com' è evidente, dalla formola de' fluidi, perchè il problema li eſclude, può mai darſi, che un' iſteſſa formola regoli ambidue i queſiti, e mentr' eſſa eſprime giuſtamente i reſidui di vino nella prima botte, poſſa valere eziandio ad eſprimere gli avanzi probabili delle ſchedole bianche nella prim' urna?

12. L' uſo del generale e incontraſtabil principio, che regola ſiffatti problemi di probabilità farà anche veder più chiaramente l' inapplicabilità della ſuddetta formola. Egli è certiſſimo, per conſenſo di tutti i Geometri, che a ſtabilire il grado di probabilità competente a un

tale e determinato evento, voglionſi aver prima di tutto ſotto l'occhio tutti gli eventi poſſibili che appartengono al problema; ed aſſegnare poi a ciaſcun evento il numero delle combinazioni, che lo conducono. La proporzione, che paſſerà tra le combinazioni del dato evento, e la ſomma di quelle che appartengono agli altri, ſervirà a determinarne il grado di probabilità, coſicchè ſe eguali rieſcano queſti numeri di combinazioni, ſi potrà ſcommettere in pari e dir del tutto probabile quell'evento che s'è chiamato.

13. Ciò poſto, ſoſtituendo nel problema del Bernullio le palle alle ſchedole, che è il medeſimo, trattiamo il problema inverſo, e cerchiam quante combinazioni favorevoli, e quante contrarie ſi abbiano per laſciare nell'urna *A* un dato numero di palle bianche dopo aver compiuto qualſiſia dato numero di permutazioni; delle quali per me ſarà ſempre prima quella che ſi fa, quand'abbiam già nell'urna *A* palle bianche $n - 1$ con una nera, e palle nere $n - 1$ con una bianca nell'urna *B*.

14. Prima di tutto però premetto il ſeguente generaliſſimo

LEMMA.

Siano in *A* palle bianche $n - p$, palle nere p; e in *B* palle nere $n - p$, palle bianche p. Cavando una palla da *A*, un' altra da *B* e permutando una volta alla maniera Bernulliana, può avvenire, che ſi trovino in *A* palle bianche $n - p - 1$, ovvero $n - p$, o finalmente $n - p + 1$. Fuori di queſti tre caſi, neſſun altro è poſſibile, ſiccome è chiaro. Ora io dico, che per ottenere in *A* palle bianche $n - p - 1$, avrò combinazioni favorevoli $(n - p)^2$; per palle bianche $n - p$, combinazioni favorevoli $2p(n - p)$; finalmente combinazioni favorevoli p^2 per palle bianche $n - p + 1$. Si diſpongan così le palle delle urne.

A
palle bianche $n-p$ nere p
B
nere $n-p$ bianche p.

Se da A cavo una bianca, e da B una nera, alla fine della permutazione io ho in A palle bianche $n-p-1$. Ma ciò ſi può ottenere, ove qualunque delle bianche $n-p$ di A ſi combini con qualunque delle nere $n-p$ di B; e il numero di queſte combinazioni favorevoli è $(n-p)^2$. Dunque ecc. Similmente perchè in A rimangano palle bianche $n-p$, anche fatta la permutazione, è neceſſario o ch' io levi una nera da A, e un' altra nera da B, o una bianca da A e un' altra bianca da B. Ma per ciò abbiamo tante maniere, quante naſcono dal combinare il numero di bianche $n-p$ che ſono in A col numero di bianche p che ſono in B, e dal combinare le nere p di A colle nere $n-p$ di B. Dunque $p(n-p)+p(n-p)$ cioè $2p(n-p)$ ſarà il numero delle combinazioni utili per l' evento di bianche $n-p$ nell' urna A. Da ultimo ad aver palle bianche $n-p+1$, fa di meſtieri che una delle nere p di A ſi aſſocj con una delle bianche p di B; il che ſi può fare in numero p^2 di maniere. Dunque p^2 ſaranno i caſi favorevoli a queſto terzo avvenimento; e reſta compiuta la dimoſtrazione.

15. Raccoglieremo dal preſente Lemma, che chiamato un de' tre caſi di palle bianche, che poſſono aver luogo nella permutazione, mi ſaranno contrarie tutte le combinazioni, che favoriſcono gli altri due eventi. Avanti di permutare io chiamo, per eſempio, in A palle bianche $n-p$, caſo che ha di combinazioni utili $2p(n-p)$. Dunque le combinazioni, che mi ſono contrarie, ſono $(n-p)^2$, e p^2, le quali menano gli altri due caſi $n-p-1$, $n-p+1$, e la probabilità, che ho d' indovinar l' evento nominato, alla oppoſta ſta come $2p(n-p) : (n-p)^2+p^2$; la qual proporzione troverem pure con queſt' altro ſempliciſſimo raziocinio.

Poichè

Poichè n è l' intero numero delle palle bianche, e parimente n l' intero numero delle nere nelle due urne, ſarà n^2 il numero di tutte le poſſibili combinazioni. Sottratte pertanto da n^2 le combinazioni favorevoli a un dato caſo di bianche, ſi avran le contrarie. Onde le contrarie al caſo di bianche $n-p$, che ne ha di utili $2p(n-p)$, ſarà $n^2-2p(n-p)$, formola identica coll' anzidetta $(n-p)^2+p^2$. Sicchè dato il numero delle combinazioni favorevoli, ſi ha toſto il numero delle avverſe; e così al contrario.

16. Queſt' ultima maniera di trovare il numero delle combinazioni contrarie, dato quel delle favorevoli a un certo evento, per una ſola permutazione, può eſtenderſi ancora al caſo di qualſivoglia numero di permutazioni, ragionando così. Sono n^2 tutte le combinazioni di palle che appartengono a ciaſcuna permutazione in particolare; e ciaſcuna delle combinazioni, che ammette la prima permutazione, può combinarſi con ciaſcuna combinazione ricevuta dalla ſeconda permutazione. Dunque il numero totale delle combinazioni, che riſguardano due permutazioni, ſarà $n^2 \times n^2 = n^4$. Andando innanzi col diſcorſo, per tre permutazioni, troveremo eſſere il numero delle combinazioni $= n^2 \times n^2 \times n^2 = n^6$; per quattro, n^8, e generalmente n^{2m} per numero m di permutazioni. Quindi poſto che ſia N il numero v. g. delle combinazioni contrarie all' evento ϕ in permutazioni m, ſarà $n^{2m}-N$ il numero delle favorevoli; e ſe N ſarà il numero delle ſavorevoli, $n^{2m}-N$ ſarà quello delle contrarie.

17. Un altro vantaggio trarrem dal Lemma, e da' ſuſſeguenti §§, che conſiſte nella maniera di rintracciare i numeri delle combinazioni o favorevoli o contrarie a un evento per un dato numero di permutazioni $= m$. Siano gli eventi poſſibili α, β, $\gamma \ldots \phi$. Conſideriamo in due diverſe maniere il Problema delle due urne. O ſi ſcommette, che almeno in una delle permutazioni m

ſi avrà in A l' evento ϕ, o ſi chiama lo ſteſſo evento ϕ dopo aver eſeguite tutte le permutazioni. Nel primo caſo, le combinazioni di ciaſcun evento α, β, γ.... per tutte le poſſibili ſucceſſioni di uno all' altro dovran combinarſi con quelle dell' evento ϕ, poſto in tutti quei luoghi di prima, ſeconda, terza ecc. permutazione, ne' quali può entrare: e l' aggregato de' prodotti di queſte ſteſſe combinazioni darà il numero delle favorevoli a ϕ. Ecco un eſempio. Suppoſte in A palle bianche $n-1$, nere 1, e al contrario in B, domando due permutazioni per avere in A o alla prima o alla ſeconda palle bianche $n-2$, e cerco, quanto ſia probabile queſto avvenimento.

18. Fatto nel Lemma $p=1$, ſi vedrà a un tratto, che gli eventi della prima permutazione non poſſon eſſer che tre

palle bianche in A $\begin{matrix} 1.^\circ\ n-2 \\ 2.^\circ\ n-1 \\ 3.^\circ\ n \end{matrix}$. Se nella ipoteſi del riſultato $n-2$, alla ſeconda permutazione ſi cava bianca, e ſi mette bianca, anche dopo la ſeconda permutazione ſi ha di bianche $n-2$. Devonſi pertanto accoppiare queſti due eventi e ſcrivere $\begin{matrix} n-2 \\ n-2 \end{matrix}$. Il primo appartiene alla prima permutazione e l' altro alla ſeconda. Mantenuta l' ipoteſi del primo evento $n-2$, può accadere, che nella ſeconda permutazione io levi nera, e metta bianca. In tal caſo le bianche dallo ſtato $n-2$ paſſano allo ſtato $n-1$, e dovran così ſcriverſi $\begin{matrix} n-2 \\ n-1 \end{matrix}$; e con ciò l' ipoteſi del primo evento $n-2$ reſta eſaurita, perchè a $n-2$ non può ſuccedere nè n nè qualunque altro numero ſuperi o manchi di due unità, riſpetto allo ſteſſo numero $n-2$

19. Accettiam' ora l' altra ipoteſi del primo evento $n-1$. Per ciò che s'è detto, è chiaro, che può eſſe-

re ſuſſeguito e dall' evento $n-2$, e dall' evento n, e dal nuovo evento $n-1$. Queſti due ultimi caſi non fan per noi, perchè, non trovandoſi nè nella prima, nè nella ſeconda permutazione, il numero $n-2$, ci ſono eſſi contrarj. Si dovrà quindi tener conto della ſola union degli eventi $n-1$, $n-2$, e ſcrivere $\begin{matrix} n-1 \\ n-2 \end{matrix}$.

20. La terza ipoteſi ſuppone il primo evento n, cui non può mai tener dietro $n-2$ eſſendo neceſſariamente il ſecondo evento $n-1$. Dunque tre ſoli ſono gli accoppiamenti utili che riſultar poſſono dalle due permutazioni; $\begin{matrix} n-2 \\ n-2 \end{matrix}$; $\begin{matrix} n-2 \\ n-1 \end{matrix}$; $\begin{matrix} n-1 \\ n-2 \end{matrix}$.

Reſta ora che troviamo i numeri delle combinazioni. Per far queſto, ci dobbiam ricordare, che lo ſtato primitivo delle palle bianche in A era $n-1$. Dunque volendoſi, che dopo la prima permutazione diventin le bianche $n-2$, in vigore del Lemma avrem combinazioni favorevoli $(n-1)^2$. Dallo ſtato $n-2$ paſſino le bianche nella ſeconda permutazione al novello ſtato $n-2$. Poichè il Lemma c' inſtruiſce che per averſi replicatamente in A palle bianche $n-p$ abbiam combinazioni propizie $2p(n-p)$, ſi fa chiaro, che $4(n-2)$ eſprimerà il numero delle maniere diverſe, con cui può ritornare lo ſtato $n-2$ nella ſeconda permutazione. Ai due ſucceſſivi eventi $n-2$ uniamo lateralmente in colonna i numeri delle combinazioni corriſpondenti
$\begin{matrix} n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & 4(n-2) \end{matrix}$, e argomentiamo così. In numero di maniere $(n-1)^2$ ſi può far tranſito dallo ſtato primitivo di palle bianche $n-1$ allo ſtato $n-2$. Ma a ciaſcuna delle maniere $(n-1)^2$ corriſponde un numero di maniere $4(n-2)$, per paſſare dallo ſtato $n-2$ della prima permutazione al nuovo ſtato $n-2$ della ſeconda. Dunque, componendo, per paſſare dallo ſtato primitivo $n-1$ ai due ſtati ſucceſſivi $n-2$, $n-2$, avrem

maniere o combinazioni utili, che ſi eſprimeranno col prodotto delle combinazioni riſpettive cioè con $4(n-1)^2 (n-2)$. Un ſimile raziocinio ci farà conoſcere, che al ſecondo accoppiamento $\begin{matrix} n-2 \\ n-1 \end{matrix}$ corriſpondono combinazioni utili $4(n-1)^2$; e al terzo $\begin{matrix} n-1 \\ n-2 \end{matrix}$ combinazioni utili $2(n-1)^3$. Sarà quindi il numero totale delle combinazioni che menano l'evento $n-2$ o nella prima o nella ſeconda permutazione $= 4(n-1)^2 (n-2) + 4(n-1)^2 + 2(n-1)^3$; e la probabilità del ſuddetto evento alla probabilità contraria ſarà come $4(n-1)^2 (n-2) + 4(n-1)^2 + 2(n-1)^3 : n^4 - 4(n-1)^2 (n-2) - 4(n-1)^2 - 2(n-1)^3$.

21. Ciò che s'è detto per due permutazioni può eſtenderſi a tre, quattro ecc. fino al numero indefinito m. Si ſcriveranno pertanto in colonna tanti eventi ſucceſſivi quanti porta il numero m, e in altra lateral colonna ſi porran per ordine i riſpettivi numeri delle combinazioni, che conducono ciaſcuno de' ſuddetti eventi: ſi farà quindi il prodotto di queſti numeri, e ciò che ne riſulta, eſprimerà le combinazioni favorevoli ad averſi i dati eventi ſecondo l'ordine con cui ſon poſti per le ſucceſſive permutazioni. All'ordine d'eventi $\alpha, \beta, \gamma \ldots \phi$ corriſpondano le combinazioni $a, b, c \ldots p$; ſi formeran le colonne di queſti numeri così

$$\begin{array}{cc} \alpha & a \\ \beta & b \\ \gamma & c \\ \vdots & \vdots \\ \phi & p \end{array}$$

, e il prodotto $abc \ldots p$ darà il numero delle combinazioni, che menano la ſucceſſione degli eventi $\alpha, \beta, \gamma \ldots \phi$.

22. Ove poi ſi domandi di aver l'evento ϕ alla fine dell'intero numero m delle richieſte permutazioni; che è la ſeconda maniera di conſiderare il problema delle due urne da noi accennata nel §. 17. ed è quella ap-

punto del Bernullio, converrà avvertire, che ad adempire queſta condizione più anguſta, nella formazione delle colonne talmente debbonſi aſſociare i ϕ o con sè ſteſſi, o cogli altri eventi α, β, γ ...., che un ϕ rimanga ſempre nell' ultima ſede che corriſponde all' ultima permutazione. Diſpoſti così gli eventi, le colonne laterali ci ſomminiſtreranno i numeri delle combinazioni favorevoli all' evento ϕ nell' urna *A* dopo che ſi ſon terminate tutte le permutazioni. E ſe piace di aver le combinazioni contrarie, prima di aver trovate le favorevoli, il che qualche volta è più comodo, talmente ſi formeran le colonne degli eventi, che non ſi trovi mai all' ultima ſede l' evento ϕ. Tutto ciò è chiariſſimo, nè ha biſogno che vi ci fermiam ſopra più lungamente.

23. Si domandi ora il numero delle combinazioni favorevoli ad averſi l' evento $n-2$ di bianche nell' urna *A* dopo che ſi ſono eſeguite due permutazioni. Scritte le colonne degli eventi ſucceſſivi coll' avvertimento del §. precedente, e anneſſevi le laterali delle combinazioni, abbiamo

$$\begin{array}{ll|ll} n-2 & (n-1)^3 & n-1 & 2.(n-1) \\ n-2 & 4(n-2) & n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & (n-1)^2 & & \\ n-1 & 4 & & \end{array}$$

La terza colonna, che ci era utile quando il problema era eſpoſto nella prima maniera, qui ci è contraria, perchè non ci giova che ſia riuſcito $n-2$ nella prima permutazione, e ci fa danno il trovarſi l' evento $n-1$ alla fine della ſeconda. Dunque le combinazioni favorevoli all' evento $n-2$ dopo due permutazioni saranno $= 4(n-1)^2(n-2) + 2(n-1)^3$, e in conſeguenza le contrarie $= n^4 - 4(n-1)^2(n-2) - 2(n-1)^3$ $= n^4 - 6n^3 + 22n^2 - 26n + 10$.

24. Vogliaſi lo ſteſſo evento $n-2$ dopo tre permutazioni. Per ſaper le combinazioni favorevoli che menano queſto avvenimento, ſcriverem le colonne degli even-

ti a tre a tre con $n-2$ all' ultima ſede, e le corriſpondenti colonne laterali.

Queſte ſono
$$\begin{array}{ll|ll|ll|ll} n & 1 & n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) & n-2 & (n-1)^2 \\ n-1 & n^2 & n-1 & 2(n-1) & n-2 & (n-1)^2 & n-1 & 4 \\ n-2 & (n-1)^2 & n-2 & (n-1)^2 & n-2 & 4(n-2) & n-2 & (n-1)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|ll|} n-2 & (n-1)^2 & n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & 4(n-2) & n-3 & (n-2)^2 \\ n-2 & 4(n-2) & n-2 & 9 \end{array}$$
. Onde le combinazioni favorevoli ſono in tutto $n^2(n-1)^2 + 4(n-1)^4 + 8(n-1)^3$ $+4$ $(n-2) + 16(n-1)^2 (n-2)^2 = 42n^4 + 9 - 224n^3 + 446n^2 - 388n + 124$; e le contrarie $= n^6 - 42n^4 + 224n^3 - 446n^2 + 388n - 124$.

25. Chi avrà la pazienza di rintracciare i numeri delle combinazioni contrarie all' evento $n-2$ dopo 4, 5 ecc. permutazioni, cominciando da $2n-1$, che denota le combinazioni contrarie per una ſola permutazione, troverà la ſeguente ſerie;

perm. 1; perm. 2 perm. 3

$2n-1$; $n^4-6n^3+22n^2-26n+10$; $n^6-42n^4+224n^3-446n^2+388n-124$;

perm. 4 perm. 5

$n^8-320n^5+2360n^4-6968n^3+10192n^2-7320n+2056$; $n^{10}-2715n^6+26410n^5$ $-107591.n^4+232780.n^3-279700n^2+175664n-44848$; ecc.

26. Queſta ſerie diventa una ricorrente di ſecondo grado, ove pongaſi $n=2$; i ſuoi termini ſono 3, 14, 52, 216, 848 ecc. i moltiplicatori, che la producono, 8, 2; e il termine generale $\frac{2^{m-1}}{3}(5.2^m + (-1)^m)$, ſignificando m il numero de' termini, oſſia delle permutazioni. Sicchè il numero generale delle combinazioni favorevoli ad averſi in A palle bianche $n-2$, cioè neſſuna bianca, ſarà $2^{2m} - \frac{2^m - 1}{3}(5.2^m + (-1)^m)$. Per qualunque numero di permutazioni non può mai eſſer probabile il caſo, che non reſti in A alcuna palla bianca,

perchè ſarebbe d'uopo, che uguagliandoſi i numeri generali delle combinazioni favorevoli ed avverſe, poteſſe riſultare m reale e poſitivo. Con tale adeguamento ſiami guidati alla equazione $2^{m+1}+(-1)^m=0$, che è impoſſibile ed aſſurda, nella ſuppoſizione che m ſia un numero poſitivo o intero o rotto, o finito o infinito. Dunque ecc.

27. In genere però la noſtra ſerie è una ricorrente di grado ſicuramente ſuperiore al quarto, atteſo l'eſperimento che ne ho fatto, e in conſeguenza di difficil maneggio. Nondimeno eſſa, anzi il ſuo primo termine ſolo può baſtare a far conoſcere l'error Bernulliano. Si faccia l'ipoteſi di $n=4$, che dà $n-2=2$. Poichè 2 è la metà delle palle bianche, che abbiamo, per la Teoria Bernulliana, partendoſi dallo ſtato primitivo delle 3 bianche e 1 nera nell' urna A, ſarà neceſſario permutare infinite volte, affinchè ſi renda probabile, che rimangano in A due bianche; ed ogni numero finito di permutazioni renderà improbabile queſto avvenimento. Ma la probabilità d'un evento induce l'eguaglianza tra il numero delle combinazioni, che menano quell' evento, e il numero delle contrarie; e l'improbabilità dello ſteſſo evento importa che il numero delle ſue combinazioni favorevoli ſia ſempre minore del numero delle avverſe. Dunque per qualunque finito numero di permutazioni, le combinazioni favorevoli ad averſi 2 bianche ſaranno meno delle contrarie. Veggaſi ora che riſulti dall' anzidetta ſerie. Fatto, come ſi è detto, $n=4$, avremo per la prima permutazione combinazioni contrarie 7; per 2 permutazioni, 130; per 3 permutazioni, 1972 ecc. Ora eſſendo l' intero numero delle combinazioni di tutte le palle, per una permutazione $=16$, per 2 permutazioni $=256$, per 3 permutazioni $=4096$ ecc., ſaranno le favorevoli per una permutazione $=16-7=9$; per 2 permutazioni $=256-130=126$; per 3 permutazioni $=4096-1972$

$=2124$ ecc. Dunque tanto è lontano, che ſi eſigano per la probabilità delle due bianche infinite permutazioni, che anzi, eſeguita ſolo la prima, è più che probabile, che mi rimangano in *A* queſte due bianche, avendo per me 9 combinazioni propizie contro 7 contrarie. Queſto vantaggio di maggior probabilità, che mi manca in due permutazioni, perchè ho 126 combinazioni a favore, e 130 contro, mi ritorna nelle 3 permutazioni, e mi ſeguita per tutta la ſerie. Dunque ad indurre la probabilità per l'evento di due bianche, cioè a far naſcere l'eguaglianza tra le combinazioni proſpere e ſiniſtre, vi vorrà un numero di permutazioni che ſia medio o tra l' 1 e il 2, o tra il 2 e il 3, ma non già un numero infinito, come pretende il *Bernullio*.

28. Da tutto ciò parmi di poter concludere legittimamente, che il principio, di cui ſi ſerve il *Bernullio*, non è quello che dee preſiedere alla ſoluzione del ſuo problema; che le altre ſue formole eziandio, le quali dipendono dallo ſteſſo principio, e corriſpondono alle ſuſſeguenti ipoteſi di più di due urne, debbono eſſere conſiderate come illegittime, e inducenti ad errore; in una parola, che il problema delle ſchedole è di una natura ben differente da quello de' fluidi, e va trattato in una maniera molto diverſa dalla Bernulliana.

29. Ricuſata come inſuſſiſtente la riſoluzione del Geometra di Baſilea, potrebbe parere ad alcuno, che io non poteſſi diſpenſarmi dal ſoſtituirvi la vera; ed io pur veggo, che ciò ſarebbe aſſai conveniente; ma nè le mie occupazioni, nè il tempo preſcritto dall' illuſtre Raccoglitore delle preſenti Memorie alla edizione di queſto primo Tomo mi han permeſſo di applicarmi col comodo neceſſario ad una indagine, che debb'eſſere d'un' eſtrema difficoltà. Potrebbeſi però valutare come opera in qualche maniera ſatisfattoria dell' obbligo ch' m' impone la critica fatta al noſtro celebre Autore, il preſentarmi in queſto Libro colla ſoluzione del problema accennato

accennato al §. 17, il quale con poca differenza dal Bernulliano è ſtato da me immaginato anche prima di leggere il Tomo XIV. de' *Comm. di Pietroburgo*; dimenticato poi ne' miei quaderni ſtava aſpettando la mia reminiſcenza e l' occaſione di veder la pubblica luce. Queſt' è quello che or m' accingo di fare, ſperando che il metodo, di cui mi ſervo, poſſa eſſer utile a chi prendeſſe per le mani o il problema del *Bernoulli*, od altri che gli ſian ſimili. Se queſto metodo non è sì ſemplice, come avrei deſiderato, varrà a ſcuſarmene la difficoltà d' un queſito, che è del numero di que' problemi di probabilità, che ſi chiamano di eventi dipendenti, ordinariamente aſſai più ſcabroſi e intralciati de' problemi di eventi indipendenti, i quali ſpeſſo ſomminiſtran formole elegantiſſime e non ſperabili in quelli dell'altra claſſe.

30. Siano dunque due urne A, B, ciaſcuna delle quali abbia palle n, la prima bianche, la ſeconda nere. Ridotto lo ſtato delle palle colla prima operazione ad eſſer queſto che chiamerem primitivo; bianche in $A = n-1$; nere $= 1$, e al contrario in B, ſi cercano le combinazioni favorevoli e contrarie ad averſi nell' urna A un dato numero di palle bianche dentro un dato numero di permutazioni. Per procedere con ordine, comincio dal

PROBLEMA I.

31. *Si cerca il numero delle combinazioni contrarie ad averſi in* A *con una ſola permutazione palle bianche* $n-2$.

Poichè ſon tre ſoli i caſi di bianche in A, che poſſono aver luogo; primo che torni $n-1$; ſecondo che ſi rimetta n; terzo che rimangano $n-2$; i caſi contrarj ſaranno i due primi; $n-1$, n. Ma pel Lemma, fatto in eſſo $p=1$, all' evento $n-1$ corriſpondono combinazioni $2(n-1)$, e all' evento n combinazioni 1. Dunque il numero delle combinazioni contrarie all'evento $n-2$ in una ſola permutazione ſarà $2(n-1)+1$.

PROBLEMA II.

32. *Si cerca il numero delle combinazioni contrarie ad averſi in* A *palle bianche* n—2 *o nell' una o nell' altra di due conſecutive permutazioni.*

Notiamo le colonne degli eventi contrarj e delle riſpettive combinazioni, com'è ſtato avvertito al §. 23.

$$\begin{array}{cc|cc|cc|} n & 1 & n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) \\ n-1 & n^2 & n & 1 & n-1 & 2(n-1) \end{array} .$$

Fatti perciò i prodotti de' numeri delle combinazioni in ciaſcuna colonna, ſaprem ſubito, eſſere il numero totale delle combinazioni contrarie; $n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$.

PROBLEMA III.

33. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *palle bianche* n—2 *nel caſo di tre conſecutive permutazioni.*

Tutto ſi riduce a notar le doppie colonne per gli eventi infauſti, ſenza ommetterne alcuna. Pel noſtro problema eſſe ſon le ſeguenti;

$$\begin{array}{cc|cc|cc} n & 1 & n & 1 & n-1 & 2(n-1) \\ n-1 & n^2 & n-1 & n^2 & n-1 & 2(n-1) \\ n & 1 & n-1 & 2(n-1) & n & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) \\ n & 1 & n-1 & 2(n-1) \\ n-1 & n^2 & n-1 & 2(n-1) \end{array} .$$

Dunque il numero delle combinazioni contrarie è $n^2+4n^2(n-1)+4(n-1)^2+8(n-1)^3$.

PROBLEMA IV.

34. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *palle bianche* n—2 *nel corſo di quattro conſecutive permutazioni.*

Fatte al ſolito le colonne per gli avvenimenti ſiniſtri, eſſe riſultano così.

n	1	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1
n	1	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2

$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	$n-1$	$2(n-1)$

dalle quali ſi rileva, eſſere il numero delle combinazioni contrarie; $n^4 + 4n^2(n-1) + 12n^2(n-1)^2 + 8(n-1)^3 + 16(n-1)^4$.

PROBLEMA V.

35. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *palle bianche* n — 2 *nel corſo di cinque conſecutive permutazioni.*

Ecco le 13 colonne inſiem colle laterali, che ci preſentano la ſoluzione di queſto Problema.

n	1	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	n	1	n	1	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	n	1
n	1	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2
$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	n	1	$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	n	1

$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1

$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$

I prodotti de' numeri delle laterali ſomminiſtrano le combinazioni contrarie con queſta formola; $n^4+6n^4(n-1) + 12n^2(n-1)^2 + 32n^2(n-1)^3 + 16(n-1)^4 + 32(n-1)^5$.

36. Ponghiam per ordine le combinazioni contrarie dalla prima ſino alla quinta permutazione, e ci naſcerà queſta ſerie; $1+2(n-1)$; $n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$; $n^2+4n^2(n-1)+4(n-1)^2+8(n-1)^3$; $n^4+4n^2(n-1)+12n^2(n-1)^2+8(n-1)^3+16(n-1)^4$; $n^4+6n^4(n-1)+12n^2(n-1)^2+32n^2(n-1)^3+16(n-1)^4+32(n-1)^5$; ecc., la quale è una ricorrente di ſecondo grado; e i ſuoi moltiplicatori ſono $2(n-1)$; n^2, coſicchè il primo $2(n-1)$ ſia quello che moltiplica il termine antecedente al termine ricercato. Intendendo che la ſuddetta ſerie ſia continuata anteriormente, ſupponiamo che ſiano u, t due termini innanzi al primo $1+2(n-1)$. Sarà dunque $n^2t+2(n-1)+4(n-1)^2 = n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$, ovvero, eliminate le quantità che ſi diſtruggono; $n^2t = n^2$, cioè $t=1$. In oltre avremo $n^2u+2(n-1) = 1+2(n-1)$, ovvero $u=\frac{1}{n^2}$. Onde i due termini innanzi al primo ſono $\frac{1}{n^2}$; 1; e queſti ſi denomineranno in appreſſo l' appendice della ſerie.

37. Divien facile in queſta ſerie il paſſar dai moltiplicatori al termine generale. Poichè ella è di ſecondo grado, chiamato m il numero de' termini o delle permutazioni, il ſuo termine generale veſte queſta forma; ap^m+bq^m. Ora la teoria delle ricorrenti c' inſegna, che vagliono queſte due equazioni; $p+q=2(n-1)$; $-pq=n^2$, dalle quali ſi trae $p=n-1+\sqrt{\left((n-1)^2+n^2\right)}$; $q=n-1-\sqrt{\left((n-1)^2+n^2\right)}$. Soſtituiti pertanto queſti valori nel termine generale, ſi fa eſſo

$$a\left(n-1+\sqrt{\left((n-1)^2+n^2\right)}\right)^m + b\left(n-1-\sqrt{\left((n-1)^2+n^2\right)}\right)^m.$$

Per la determinazione poi delle ſpecie a, b, ſarem ſucceſſivamente le due ipoteſi di $m = 1$, e di $m = 2$. Colla prima dovrà eſſere $a\left(n - 1 + \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right) + b\left(n - 1 - \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right) = 1 + 2(n-1)$; e colla ſeconda; $a\left(n - 1 + \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right)^2 + b\left(n - 1 - \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right)^2 = n^2 + 2(n-1) + 4(n-1)^2$. Queſte due equazioni ci fanno conoſcere i valori delle due ſpecie a, b, e ſi trova

$$a = \frac{\sqrt{((n-1)^2 + n^2)} + n}{2\sqrt{((n-1)^2 + n^2)}}\,;\; b = \frac{\sqrt{((n-1)^2 + n^2)} - n}{2\sqrt{((n-1)^2 + n^2)}},$$

così che il numero indefinito delle combinazioni contrarie ad averſi in A palle bianche $n - 2$ almeno in una delle permutazioni m diverrà

$$= \frac{\left(\sqrt{((n-1)^2+n^2)}+n\right)\left(n-1+\sqrt{((n-1)^2+n^2)}\right)^m}{2\sqrt{((n-1)^2+n^2)}} + \frac{\left(\sqrt{((n-1)^2+n^2)}-n\right)\left(n-1-\sqrt{((n-1)^2+n^2)}\right)^m}{2\sqrt{((n-1)^2+n^2)})}.$$

Se queſto per comodo ſi chiami P, ſi avrà a un tratto il numero indefinito delle combinazioni ſavorevoli, che ſarà $n^{2m} - \Upsilon$, onde inſtituita l' equazione $n^{2m} - \Upsilon = \Upsilon$, oſſia $n^{2m} = 2\Upsilon$, il valore di m eſatto o proſſimo eſprimerà il numero delle permutazioni che domandar ſi debbono, affinchè ſi poſſa ſcommettere eſattamente o proſſimamente in pari, che almeno in una di eſſe avrà luogo l' evento $n - 2$.

38. Ciò però ſi può ancora ottenere nelle diverſe ipoteſi numeriche de' valori di n collo ſcrivere una ſotto l' altra le ſerie delle combinazioni favorevoli e contrarie, ſenza ricorrere ai termini generali. Sia $n = 2$; in tale ipoteſi ſono i quattro primi termini delle combinazioni contrarie; 3, 10, 32, 104 ecc. e i corriſpondenti delle favorevoli 1, 6, 32, 152 ecc. In queſte due ſerie i terzi termini ſono eguali. Dunque ſono eſattamente tre le permutazioni, che menano probabilmente una volta l' evento di bianche $n - 2$, oſſia di

bianche zero nell' urna A. Sia $n=3$. Le due ſerie per queſta ipoteſi ſono 5, 29, 161 ecc.
4, 52, 568 ecc.
Per una ſola permutazione ho 5 combinazioni contrarie e 4 favorevoli; per due ne ho 52 di favorevoli e 29 di contrarie; conſeguentemente giocando in pari, ho danno ſe domando una ſola permutazione, e vantaggio ſe ne domando due; il che vuol dire, che il numero di permutazioni atto a render probabile l' evento $n-2$ oſſia 1 di bianche è medio tra l' uno e il due.

PROBLEMA VI.

39. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi in* A *palle bianche* n — 3 *in una ſola permutazione*.

Poichè lo ſtato primitivo dell' urna A è di racchiuder bianche $n-1$, ſi vede ſubito, che in una ſola permutazione non è poſſibile di paſſare allo ſtato di bianche $n-3$; e però tutte le combinazioni delle palle, che ſono n^2, ci diventan contrarie, e il numero delle favorevoli ſarà $=0$.

PROBLEMA VII.

40. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *palle bianche* n — 3 *o nell' una o nell' altra di due permutazioni*.

Tutti gli accoppiamenti degli eventi contrarj all' evento $n-2$ di bianche in due permutazioni ſono anche contrarj all' evento $n-3$. In oltre tutti gli accoppiamenti favorevoli ad ottener bianche $n-2$ in due permutazioni, detratti quelli, ne' quali entra l' evento $n-3$, ſon pur contrarj a queſt' ultimo avvenimento. Ma in una ſola maniera può aſſociarſi $n-2$ con $n-3$, che è queſta: $n-2$, cui corriſponde di combinazioni
$n-3$

$(n-1)^2$. Dunque la ſomma delle combinazioni contrarie e favorevoli pel caſo di bianche $n-2$ in due permutazioni, meno il prodotto $(n-1)^2(n-2)^2$ darà la ſomma delle contrarie all' avvenimento $n-3$. Ma la ſomma delle contrarie e favorevoli per bianche $n-2$ in due permutazioni è n^4. Dunque le contrarie pel caſo di $n-3$ ſono $n^4-(n-1)^2(n-2)^2$, ovvero $6n^3-13n^2+12n-4$.

$(n-2)^2$

P R O B L E M A VIII.

41. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *bianche* n — 3 *nel corſo di tre permutazioni.*

Ragionando, come abbiam fatto pel precedente Problema, concluderemo, che il numero delle combinazioni contrarie da noi ricercato ſarà eguale a n^6 meno i prodotti delle combinazioni, che corriſpondono alle colonne degli eventi, ne' quali entra $n-3$; le quali unite alle laterali ſon le ſeguenti;

$$\begin{array}{ll|ll|ll|ll|ll}
n-1 & 2(n-1) & n-2 & (n-1)^2 & n-2 & (n-1)^2 & n-2 & (n-1)^2 & n-2 & (n-1)^2 \\
n-2 & (n-1)^2 & n-2 & 4(n-2) & n-3 & (n-2)^2 & n-3 & (n-2)^2 & n-3 & (n-2)^2 \\
n-3 & (n-2)^2 & n-3 & (n-2)^2 & n-2 & 9 & n-3 & 6(n-3) & n-4 & (n-3)^2 .
\end{array}$$

Il perchè le combinazioni contrarie diventano in tutto
$$n^6-2(n-1)^3(n-2)^2-4(n-1)^2(n-2)^3-9(n-1)^2(n-2)^2$$
$$-6(n-1)^2(n-2)^2(n-3)-(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2,$$
ovvero $33n^4-126n^3+198n^2-144n+40$.

P R O B L E M A IX.

42. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *bianche* n — 3 *nel corſo di quattro permutazioni.*

Sono 20 le colonne laterali a quelle degli eventi, in cui entra $n-3$, le quali ci ſomminiſtrano i prodotti che ſi debbon ſottrarre da n^8 per determinare le combinazioni contrarie richieſte dal preſente problema. Eccole per ordine:

n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-1$	4	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	9
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-1$	4
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-2$	$4(n-2)$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$(n-1)^2$
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-4$	$(n-3)^2$
$n-2$	9	$n-3$	$6(n-3)$	$n-4$	$(n-3)^2$	$n-4$	$(n-3)^2$	$n-4$	$(n-3)^2$	$n-3$	16
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-2)^2$								
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$								
$n-4$	$(n-3)^2$	$n-4$	$(n-3)^2$								
$n-4$	$8(n-4)$	$n-5$	$(n-4)^2$								

Si trarrà quindi, dopo la riduzione de' termini, il numero delle combinazioni contrarie $= 176n^5 - 943n^4 + 2132n^3 - 2484n^2 + 1472n - 352$.

43. Andando innanzi colla ricerca, ci verrà fatto di ſcoprire, che preſo cominciamento dalla prima del Problema VI., le quattro formole ritrovate; n^2; $6n^3 - 13n^2 + 12n - 4$; $33n^4 - 126n^3 + 198n^2 - 144n + 40$; $176n^5 - 943n^4 + 2132n^3 - 2484n^2 + 1472n - 352$; ſono i 4 primi termini di una ricorrente di terzo grado, i cui moltiplicatori poſti ordinatamente ſono; $6n - 10$; $-3n^2 + 16n - 12$; $-4n^3 + 8n^2$. Queſta ſerie pure avrà l'appendice de' due termini $\frac{1}{n^2}$, 1 innanzi al primo così che la ſerie coll' appendice ſarà $\frac{1}{n^2}$; 1; n^2; $6n^3 - 13n^2 + 12n - 4$. ecc.

PROBLEMA

PROBLEMA X.

43. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *bianche* n — 4 *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni.*

Conſidero queſto Problema in tutta la ſua generalità, non potendoſi più ignorare dopo gli eſempj de' ſuperiori Problemi, come ſi debba procedere anche qui per inveſtigare le combinazioni contrarie che ſpettano alle ipoteſi di 1, 2, 3 ecc. permutazioni. Io le ho partitamente eſaminate ſino a quel ſegno che mi faceva conoſcere la legge della ſerie, della quale noto i primi 4 termini.

1; n^2
2; n^4
per permut. 3; $12n^5 - 58n^4 + 144n^3 - 193n^2 + 132n - 36$
4; $114n^6 - 888n^5 + 3159n^4 - 6216n^3 + 6952n^2 - 4128n + 1008$.

Queſta ſerie è una ricorrente di 4.° grado, i ſuoi moltiplicatori ſono; $12n - 28$: $-30n^2 + 148n - 156$; $-4n^3 - 52n^2 + 216n - 144$; $15n^4 - 84n^3 + 108n^2$; ed ammette l' appendice de' due termini $\frac{1}{n^2}$, 1, che vanno avanti al primo termine n^2.

PROBLEMA XI.

44. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *bianche* n — 5 *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni.*

Se ſi farà l'eſame di queſta ipoteſi colle regole ſopra indicate, ſi troverà una ſerie di combinazioni contrarie, che è una ricorrente di quinto grado, di cui queſti ſono per ordine i cinque moltiplicatori.

$20n - 60$; $-110n^2 + 660n - 908$; $140n^3 - 1460n^2 + 4376n - 3696$; $95n^4 - 340n^3 - 1124n^2 + 4608n - 2880$; $-56n^5 + 640n^4 - 2208n^3 + 2304n^2$: e i cinque primi termini; n^2; n^4; n^6; $20n^7 - 170n^6 + 800n^5 - 2273n^4 + 3980n^3 - 4180n^2 + 2400n - 576$; $290n^8 - 3800n^7 + 23927n^6 - 89480n^5 + 211800n^4 - 320000n^3 + 298224n^2 - 155520n + 34560$ ecc. Qui pure ha luogo la ſolita appendice $\frac{1}{n^2}$, 1.

45. Riandando quel che s'è detto dal §.31. ſino ad ora ſi raccoglie primo, che tanto è il grado della ricorrente delle combinazioni contrarie, quanto, principiando da 2, è il numero delle bianche, che ſi vogliono eſtratte dalla prim' urna nel decorſo di qualſiſia numero di permutazioni; ſecondo, che avendo tutte queſte ſerie al principio alcuni termini che ſi ſuccedono in ſerie geometrica continua, ſe vi aggiungerem l'appendice, tanti ſaranno i termini geometricamente proporzionali, quanto è il grado della ſerie delle combinazioni contrarie, vale a dire quanti ſono i ſuoi moltiplicatori. Onde, conoſciuta che foſſe la legge generale de' moltiplicatori per la ipoteſi indeterminata di palle bianche reſidue $n - z - 1$, ſiccome il numero de' moltiplicatori ſpettanti alla ricorrente di queſto evento indefinito è appunto $z + 1$, e i termini della ſerie geometrica dal primo $\frac{1}{n^2}$ dell' appendice ſino all' ultimo n^{2z-2} ſon pur eſſi $z + 1$, non vi ſarebbe biſogno di formar colonna alcuna degli eventi (la qual coſa è moleſtiſſima; e atteſo il numero grandiſſimo di queſte colonne, quando creſce il numero delle permutazioni, fa ſempre rimaner col dubbio di averle notate tutte), e baſterebbero i moltiplicatori inſiem coi termini della ſerie geometrica per inveſtigare i ſuſſeguenti termini delle noſtre ſerie. Laonde a queſto ſcopo dobbiam dirigere le noſtre

meditazioni ; e il Problema che c' importa di ſcioglie-re è il ſeguente.

PROBLEMA XII.

46. *Dato il numero* $n - z - 1$ *di palle bianche, che ſi vogliono almeno una volta rimaſte nell' urna* A *pel corſo di qualſiſia numero di permutazioni, trovar la ſerie generale delle combinazioni contrarie, ovvero determinare i ſuoi moltiplicatori, che ſono* $z + 1$ *di numero, e unitamente alla parte geometrica* $\frac{1}{n^2}, 1, n^2, n^4 \ldots\ldots n^{2z-2}$ *della ſerie generale ſervono a far naſcere tutti i ſuoi termini ſuſſeguenti.*

Per darne la ſoluzione, fa di meſtieri metterſi ſott'occhio i moltiplicatori che corriſpondono alle ipoteſi de' precedenti problemi, onde agevolarſi l' indagine della legge, con cui procedono. Eccoli qui diſpoſti con ordine.

Per bianche reſidue $n - 2$; 1.° moltip. $2n - 2$; 2.° n^2
b. r. $n - 3$; 1.° m. $6n - 10$; 2.° $- 3n^2 + 16n - 12$; 3.° $- 4n^3 + 8n^2$
b. r. $n - 4$; 1.° m. $12n - 28$; 2.° $- 30n^2 + 148n - 156$;
3.° $- 4n^3 - 52n^2 + 216n - 144$; 4.° $15n^4 - 84n^3 + 108n^2$
b. r. $n - 5$; 1.° m. $20n - 60$; 2.° $- 110n^2 + 660n - 908$;
3.° $140n^3 - 1460n^2 + 4376n - 3696$;
4.° $95n^4 - 340n^3 - 1124n^2 + 4608n - 2880$;
5.° $56n^5 + 640n4 - 2208n^3 + 2304n^2$.

47. Diamo a queſti moltiplicatori un' altra forma equivalente, che riſulta dal laſciare le formole de' prodotti nati dalle colonne laterali così come ſtanno, ſenza ridurle al netto; del che ſi vede un eſempio ne' primi cinque problemi. La nuova forma è queſta.

Per bianche reſidue $n-2$ 1° moltip. $2(n-1)$
2° n^2
b.r. $n-3$ 1.° m. $2(n-1) + 4(n-2)$
2.° $-S(n-1)(n-2) + 4(n-1)^2 + n^2$

3.° $-4n^2(n-2)$

b.r. $n-4$. 1.° m. $2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)$

2.° $-24(n-2)(n-3)-12(n-1)(n-3)+9(n-2)^2-8(n-1)$
$(n-2)+4(n-1)^2+n^2$

3.° $-6n^2(n-3)-24(n-1)^2(n-3)+48(n-1)(n-2)(n-3)-18$
$(n-1)(n-2)^2-4n^2(n-2)$

4.° $24n^2(n-2)(n-3)-9n^2(n-2)^2$

b.r. $n-5$. 1.° m. $2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)+8(n-4)$

2.° $-48(n-3)(n-4)-32(n-2)(n-4)-16(n-1)(n-4)+16$
$(n-3)^2-24(n-2)(n-3)-12(n-1)(n-3)--8(n-1)(n-2)$
$+9(n-2)^2+4(n-1)^2+n^2$

3.° $192(n-2)(n-3)(n-4)+96(n-1)(n-3)(n-4)-72$
$(n-2)^2(n-4)+64(n-1)(n-2)(n-4)--32(n-1)^2(n-4)$
$-8n^2(n-4)-64(n-2)(n-3)^2-32(n-1)(n-3)^2$
$+48(n-1)(n-2)(n-3)-24(n-1)^2(n-3)-6n^2(n-3)$
$-18(n-1)(n-2)^2-4n^2(n-2)$.

4.° $48n^2(n-3)(n-4)+192(n-1)^2(n-3)(n-4)-$
$384(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+144(n-1)(n-2)^2(n-4)$
$+32n^2(n-2)(n-4)(n-4)+128(n-1)(n-2(n-3)^2$
$-64(n-1)^2(n-3)^2-16n^2(n-3)^2+24n^2(n-2)(n-3)$
$-9n^2(n-2)^2$

5.° $-192n^2(n-2)(n-3)(n-4)+72n^2(n-2)^2(n-4)$
$+64n^2(n-2)(n-3)^2$.

48. Le ſuddette formole col porre a maggior comodo $n-1=a$; $2(n-2)=b$; $3(n-3)=c$; $4(n-4)=d$, ecc.; $n^2=p^2$; $4(n-1)^2=q^2$; $9(n-2)^2=r^2$; $16(n-3)^2=t^2$, ecc. ſi trasformano in queſt' altre.

Per bianche reſidue $n-2$; 1.° moltip. $2a$
2.° p^2

---

b. r. $n-3$; 1.° m. $2a+2b$
2.° $-2b(2a)+p^2+q^2$
3.° $-2bp^2$

---

b. r. $n-4$; 1.° m. $2a+2b+2c$
2.° $-2c(2a+2b)-4ab+p^2+q^2+r^2$
3.° $2c(4ab-p^2-q^2)-2bp^2-2ar^2$
4.° $2c(2bp^2)-p^2r^2$

---

b. r. $n-5$; 1.° m. $2a+2b+2c+2d$

2.° $-2d(2a+2b+2c)-4bc-4ac-4ab+p^2+q^2+r^2+t^2$

3.° $2d(4bc+4ac+4ab-p^2-q^2-r^2)+8abc-2cp^2$
$-2cq^2-2bp^2-2ar^2-2at^2-2bt^2$

4.° $2d(-8abc+2cp^2+2cq^2+2bp^2+2ar^2)+4bcp^2$
$-p^2r^2-p^2t^2-q^2t^2+4abt^2$

5.° $2d(-4bcp^2+p^2r^2)+2bp^2t^2$.

49. La legge, con cui procedono i primi moltiplicatori, è per sè chiariſſima, dovendo ciaſcun d'eſſi comprendere tanti termini della ſerie $2a$, $2b$, $2c$ ecc., ovver della ſerie $2\big(n-1+2(n-2)+3(n-3)$ ecc. $\big)$, quanto è il grado della ricorrente che appartiene alla data ipoteſi diminuito di un'unità. Volendoſi pertanto il primo moltiplicatore per l'evento di b. r. $n-6$, ci verrà eſſo ſomminiſtrato dalla formola $2\big(n-1+2(n-2)+3(n-3)+4(n-4)+5(n-5)\big)$. Così per b. r. $n-7$ ſarà $=2\big(n-1+2(n-2)+3(n-3)+4(n-4)+5(n-5)+6(n-6)\big)$; e generalmente per l'ipoteſi di b. r. $n-z-1$ avremo il primo moltiplicatore $=$ $2\big(n-1+2(n-2)+3(n-3)\ldots z(n-z)\big)$.

50. Riſpetto ai ſecondi moltiplicatori, di ciaſcun di eſſi ne faremo due parti: la prima verrà compoſta dall' aggregato di tutti que' termini, ne' quali entra l'ultimo termine del primo moltiplicatore corriſpondente; la ſeconda parte formeraſſi da tutti i termini rimanenti. Voglionſi per eſempio b. r. $n-3$? La prima parte del ſecondo moltiplicatore notato al §. 48. ſarà $-2b(2a)$; l'altra p^2+q^2. Così per l'ipoteſi di bianche $n-4$, queſta prima parte ſarà $-2c(2a+2b)$, e la ſeconda $-4ab+p^2+q^2+r^2$. Un leggiero eſame poi di queſte prime parti per le 4 ipoteſi del §. 48. ci ſarà conoſcere, che s'uguagliano eſſe al prodotto negativo dell' ultimo termine del primo moltiplicatore moltiplicato nel primo moltiplicatore dell' ipoteſi immediatamente precedente. Onde, chiamato il primo general moltiplicatore $2\big(n-1+2(n-2)+3(n-3)\ldots z(n-z)\big)$

$= \alpha$, e quello della proſſima antecedente ipoteſi, cioè $2(0 + n - 1 + 2(n - 2) \ldots (z - 1)(n - z + 1)) = \alpha'$, ſi potrà eſprimere queſta prima parte in genere colla ſeguente formola; $- 2z(n - z)(\alpha')$.

51. Per le ſeconde parti rifletteremo, che la ſerie de' quadrati p^2, q^2, r^2, t^2 ecc., ovvero n^2, $4(n - 1)^2$, $9(n - 2)^2$, $16(n - 3)^2$, $25(n - 4)^2$ ecc., ha per termine generale $z^2(n - z + 1)^2$; in oltre, che ciaſcuna di queſte ſeconde parti è compoſta di tutto il ſecondo moltiplicatore, che conviene all' ipoteſi del proſſimo evento anteriore e del quadrato, che immediatamente ſuccede nella ſerie de' quadrati $p^2 + q^2$ ecc., che entrano nella formazione dello ſteſſo precedente ſecondo moltiplicatore. Così al §. 48. per l' evento $n - 3$, la noſtra ſeconda parte è $p^2 + q^2$, cioè tutto il ſecondo moltiplicatore per l' evento $n - 2$ con di più il quadrato q^2, che nella ſerie de' quadrati tien dietro immediatamente a p^2. Per l' evento $n - 4$, la ſeconda parte è $- 4ab + p^2 + q^2 + r^2$, i tre primi termini della quale ſono preciſamente il ſecondo moltiplicatore $- 2b(2a) + p^2$ q^2 per l' ipoteſi $n - 3$, e l' ultimo r^2 è il quadrato che ſeguita in ordine q^2; e lo ſteſſo dicaſi per gli altri eventi. Sicchè chiamando generalmente γ il ſecondo moltiplicatore, che compete all' evento $n - z - 1$, e γ' il ſecondo moltiplicatore, che ſpetta al precedente evento $n - z$, ſarà queſta ſeconda parte $= \gamma' + z^2(n - z + 1)^2$; e tutto il ſecondo moltiplicatore

$$\gamma = - 2z(n - z)\alpha' + \gamma' + z^2(n - z + 1)^2.$$

52. Vengo ai terzi moltiplicatori, pei quali ſtabiliſco la ſeguente regola cavata dall' eſame delle quattro ipoteſi ordinate nel §. 48, e da altre di più ſulle quali ho inſtituito i miei calcoli. Sia α il primo moltiplicatore generale, che corriſponde all' ipoteſi dell' evento $n - z - 1$; β il ſecondo, e γ ſia il terzo che domandiamo. Oltracciò rappreſenti α' il primo moltiplicatore, che appartiene all' ipoteſi dell' evento immediatamen-

te precedente $n-z$, e α'' il primo moltiplicatore che riſguarda l' evento antepenultimo $n-z+1$. Così eſprima β' il ſecondo moltiplicatore ſpettante ai penultimo evento $n-z$; e per lo ſteſſo evento $n-z$ ſia γ' il terzo moltiplicatore. Dico che ſarà $\gamma=-2z(n-z)\beta'+\gamma'-z^2(n-z+1)^2(\alpha'')$. Prendiamo in mano l' ipoteſi del ſecondo evento $n-3$, che ha per terzo moltiplicatore $-2bp^2$. Poichè in tale ſuppoſizione il primo moltiplicatore è $2a+2b$; il ſecondo, $-4ab+p^2+q^2$, ſarà $\alpha=2a+2b$; $\alpha'=2a$; $\alpha''=0$. Similmente $\beta=-4ab+p^2+q^2$; $\beta'=p^2$, e $\gamma'=0$, perchè appunto nell' ipoteſi precedente $n-2$ non abbiam terzo moltiplicatore. Soſtituendo pertanto nel ſuperior canone queſti valori, avrem $\gamma=-2(n-2).2p^2+0-4(n-1)^2(0)$, cioè, ſurrogando b invece di $2(n-2)$; $\gamma=-2bp^2$. Per l' evento $n-4$ diventa $\alpha=2a+2b+2c$; $\beta=-4ab-4ac-4bc+p^2+q^2+r^2$, onde $\alpha'=2a+2b$; $\alpha''=2a$; $\beta'=-4ab+p^2+q^2$, e $\gamma'=-2bp^2$, tale eſſendo appunto il terzo moltiplicatore per la precedente ipoteſi dell' evento $n-3$. Quindi ſarà $\gamma=-3(n-3)(-8ab+2p^2+2q^2)-2bp^2-9(n-2)^2(2a)$, ovvero (ponendo c in luogo di $3(n-3)$, e r^2 in luogo di $9(n-2)^2$) $\gamma=8abc-2cp^2-2cq^2-2bp^2-2ar^2$, come s' è ritrovato.

53. Queſta corta ed elegante regola ha il vantaggio della maſſima generalità; ed ove α, β rappreſentino i moltiplicatori che per ordine precedono γ, ſerve non ſolo per l' inveſtigazione de' terzi, ma eziandio de' quarti, quinti ecc. moltiplicatori. Si voglia il quarto moltiplicatore γ, che corriſponde all' evento $n-4$. Dovendo eſſere α, β i due moltiplicatori antecedenti, ſarà pel §. 48. $\alpha=-4bc-4ac-4ab+p^2+q^2+r^2$; $\beta=8abc-2cp^2-2cq^2-2bp^2-2ar^2$; $\alpha'=-4ab+p^2+q^2$; $\alpha''=p^2$; $\beta'=-2bp^2$; $\gamma'=0$. Quindi $\gamma=-3(n-3)(-4bp^2)-9(n-2)^2p^2$, oſſia $\gamma=4bcp^2-p^2r^2$. Si domandi il quinto moltiplicatore γ, che ap-

partiene all' evento $n - 5$. In tal caſo ſarà $\alpha = 8bcd + 8acd + 8abd - 2dp^2 - 2dq^2 - 2dr^2 + 8abc - 2cp^2 - 2cq^2 - 2bp^2 - 2ar^2 - 2bt^2 - 2at^2$; $\beta = -16abcd + 4cdp^2 + 4cdq^2 + 4bdp^2 + 4adr^2 + 4bcp^2 - p^2r^2 - p^2t^2 - q^2t^2 + 4abt^2$; $\alpha' = 8abc - 2cp^2 - 2cq^2 - 2bp^2 - 2ar^2$; $\alpha'' = -2bp^2$; $\beta' = 4bcp^2 - p^2r^2$, e $\gamma' = 0$. Onde in virtù della regola $\gamma = -4(n-4)(8bcp^2 - 2p^2r^2) - 16(n-3)^2(-2bp^2)$, cioè $\gamma = -8bcdp^2 + 2dp^2r^2 + 2bp^2t^2$, come debbe eſſere.

54. Adattiamo la teoría ad un eſempio, e facciam vedere in pratica, come dato il numero totale delle palle bianche, e domandato un certo evento di bianche che deon rimanere nell' urna, ſi poſſano per mezzo della noſtra regola rintracciare con ſufficiente ſpeditezza i moltiplicatori della ricorrente delle combinazioni contrarie, e determinar quindi il numero delle permutazioni, che ſono neceſſarie per render probabile l' evento dato. Sia il numero delle palle bianche $n = 8$, e ſi cerchino i moltiplicatori della ricorrente, che compete all' evento nell' urna di bianche reſidue 4. In queſto caſo conviene eſaurire i tre eventi $n - 2 = 6$, $n - 3 = 5$, $n - 4 = 4$. Cominciando dal primo $n - 2$, e richiamando alla memoria, che $a = n - 1$, $b = 2(n-2)$, $c = 3(n-3)$, cioè $a = 7$, $b = 12$, $c = 15$; e che $2a$ è il primo moltiplicatore per l' evento $n - 2 = 6$; $2a + 2b$ pel ſecondo evento $n - 3 = 5$; $2a + 2b + 2c$ pel terzo $n - 4 = 4$, ſaprem toſto aſſegnare a ciaſcuno di queſti eventi il primo reſpettivo moltiplicatore, e tutti e tre per ordine ſaranno, come nell' anneſſa figura, 7.2, 19.2, 17.2^2.

b.r.6.1.° molt.	7.2	b.r.5.1.° m.	19.2	b.r. 4. 1.° m.	17.2^2
2.°	2^6	2.°	-19.2^2	2.°	-223.2^2
		3.°	-3.2^9	3.°	-237.2^4
				4.°	99.2^8

Ripigliati poi i canoni $\gamma = -2z(n-z).\alpha' + \gamma' + z^2(n-z+1)^2$ $\gamma = -2z(n-z).\beta' + \gamma' - z^2(n-z+1)^2.\alpha''$, il il primo de' quali ſerve per ritrovare i ſecondi moltiplicatori, e il ſecondo per ritrovar gli altri, diſcorreremo così. Pel primo evento di b. r. 6 abbiam $z = 1$, $\alpha = 7.2$, $\alpha' = 0$, $\gamma' = 0$. Dunque il ſecondo moltiplicatore γ ſarà ridotto alla formola $z^2(n - z + 1)^2$, oſſia coi valori di $n = 8$, $z = 1$; $\gamma = 2^6$. Pel ſecondo evento di b. r. 5 diventa $z = 2$, $\alpha = 19.2$, $\alpha' = 7.2$, $\gamma' = 2^6$; e però il ſecondo moltiplicatore γ ſi fa $= - 4.6.7.2 + 2^6 + 4.49 = - 19.2^2$. Pel terzo evento poi di b. r. 4 divien $z = 3$, $\alpha = 17.2^2$; $\alpha' = 19.2$; $\gamma' = - 19.2^2$; onde il ſecondo moltiplicatore $\gamma = - 6.5.19.2 - 19.2^2 + 9.36 = - 223.2^2$. Si paſſi ora ai terzi moltiplicatori, e ſi dia principio dalla ſeconda ipoteſi, giacchè la prima ne è priva. Poichè α, β deon eſſere i due moltiplicatori immediatamente precedenti al terzo che cerchiamo, ſarà $\alpha = 19.2$, $\beta = - 19.2^2$; per conſeguenza $\alpha' = 7.2$, e (non avendovi ipoteſi ſuperiore alla prima di b. r. 6) $\alpha'' = 0$. Di più $\beta' = 2^6$; $\gamma' = 0$. Laonde, introdotti queſti valori nel ſecondo de' ſuddetti canoni, riſulterà il terzo moltiplicatore $\gamma = - 4.6.2^6 = - 3.2^9$. Alla terza ipoteſi di b. r. 4 corriſpondono queſti valori; $z = 3$, $\alpha = 17.2^2$; $\beta = - 223.2^2$; $\alpha' = 19.2$; $\alpha'' = 7.2$; $\beta' = - 19.2^2$; $\gamma' = - 3.2^9$, che fanno naſcere il terzo moltiplicatore $\gamma = 6.5.19.2^2 - 3.2^9 - 9.36.7.2$, ovvero $\gamma = - 237.2^4$. Non reſtando preſentemente altro che il quarto moltiplicatore della terza ipoteſi, perchè eſſo manca nelle altre due, ſarà, per queſt'ultima indagine, $\alpha = - 223.2^2$; $\alpha' = - 19.2^2$; $\alpha'' = 2^6$; $\beta = 237.2^4$; $\beta' = - 3.2^9$; $\gamma' = 0$, e $z = 3$. Dunque il quarto moltiplicatore $\gamma = 6.5.3.2^9 - 9.36.2^6 = 99.2^8$.

55. Conoſciuti i quattro moltiplicatori per l' evento di b. r. 4, rimane che ſi trovino i termini della ſerie contraria, di cui coll'ajuto dell'appendice ci ſon noti i quattro primi termini $\frac{1}{2^6}$, 1, 2^6, 2^{12}, che oſſervano

la proporzione geometrica. Ponghiam ſotto ad eſſi i quattro moltiplicatori, come nella preſente figura;

$$\frac{1}{2^6},\ 1,\ 2^6,\ 2^{12}\ \ 54511.2^2, 684751.2^4, 38988839.2^4, 498813699.2^6$$

$$0,\ 0,\ 11025.2^2, 363825.2^4, 28120025.2^4, 574928125.2^6.$$

$$99.2^8, -237.2^4, -223.2^2, 17.2^2$$

E facciam poi giuſta la regola delle ricorrenti le ſolite moltiplicazioni. Eſſe ci daranno il quinto termine $=$ 54511.2^2, il ſeſto $= 684751.2^4$, il ſettimo $= 38988839.2^4$, l'ottavo $= 498813699.2^6$ ecc. Per non andare innanzi ſenza propoſito, ſarà bene aver preſente ciò che abbiamo avvertito al §. 15. ſul numero totale delle combinazioni di tutte le palle nelle diverſe permutazioni per potere, ad ogni termine della ricorrente delle combinazioni contrarie, ſcriver ſotto di mano in mano l'analogo nella ſerie delle favorevoli. Così nel caſo noſtro ſi vedrà, che ai termini della ſerie contraria, principiando da 2^6 che è realmente il primo fino al termine 498813699.2^6 corriſpondono nella favorevole i termini 0; 0; 11025.2^2; 363825.2^4; 28120025.2^4; 574928125.2^6. Ora ne' termini antecedenti al ſeſto le combinazioni avverſe ſon ſempre in numero maggiore delle propizie, ma queſte nel ſeſto eccedon le prime, e queſt' eccesſo, come ſe ne può far l'eſperienza, va ſempre più creſcendo ne' termini ſuſſeguenti. Dunque ſarebbe coſa inutile l'andar più oltre nelle ſerie, avendoſi già tanto che baſta per concludere, che il numero delle permutazioni neceſſarie a render probabile l'evento di ridurſi nella prim' urna alla metà di tutte le palle bianche, è un numero medio tra il 5 e il 6, non contando già, come abbiam fatto ſempre, la prima operazione, che di 8 bianche che erano ne fa rimaner ſette. Io mi accoſterò più al giuſto, ſe domando ſei permutazioni piuttoſto che cinque, perchè le combinazioni ſiniſtre, e le utili in cinque permutazioni ſtanno fra loro :: 38988839 : 28120025, cioè :: 1.38 : 1 proſſimamente; laddove in ſei permutazioni la proporzione delle ſiniſtre alle utili è quella di 498813699 : 574928125, ovvero di 1 : 1.15 a un dipreſſo; e s'accoſtan più all'eguaglianza i due numeri 1, 1.15 di quel che faccian gli altri 1.38, 1.

56. Non poſſo diſſimular l'incomodo, che reca al calcolatore il metodo che ho preſentato per il ritrovamento de' moltiplicatori, perchè a determinar qualunque moltiplicatore relativamente ad una qualche ipoteſi, è neceſſario che ſi ſappia il moltiplicatore analogo dell'ipoteſi precedente; queſto ſuppone noto l'analogo della ipoteſi, che va avanti a queſt'ultima, e così via via ſinchè con paſſo retrogrado ſi arrivi alla prima ipoteſi dell'evento $n-2$. Onde ſe, per eſempio, dati i due moltiplicatori pel primo evento, ſi vogliano determinare i ſette moltiplicatori, che ſon richieſti dalla ipoteſi dell'evento $n-7$, ſarà d'uopo coll'ajuto de' due primi trovare i tre moltiplicatori per l'evento $n-3$, poi i quattro per l'evento $n-4$ ecc. ſino ai ſette moltiplicatori per l'ultimo che domandiamo. Queſt' incomodo però reſta di molto diminuito, ove diaſi un valor numerico alla ſpecie n, come ſi ſuol fare all' occaſione che vengano in pratica ſimili queſiti; e in tal caſo, quando non ſiano aſſai grandi il numero di tutte le palle bianche, e quel delle bianche, che ſi voglion tolte dall'urna, con poche operazioni numeriche ſi fanno naſcere i moltiplicatori di tutte le ipoteſi che precedon queſt'ultima, e ſi aſſegnano a queſta ſteſſa i competenti moltiplicatori. Anche l'uſo de' logaritmi, maſſime nelle moltiplicazioni che far ſi debbono per trovare i termini delle ſerie delle combinazioni, potrà contribuire a facilitar vie più la faccenda; e conſiderando inſieme ogni coſa, ſi dovrà per avventura concludere, che in un problema di non mediocre difficoltà, come il noſtro, l'eſpoſto metodo ſia effettivamente un de' più ſemplici e de' men laborioſi.

57. Per ſoddisfar nondimeno chi amaſſe una maggior generalità anche a coſto della ſpeditezza, e per la determinazione de' moltiplicatori che eſige un evento dato non voleſſe aver biſogno di ſcorrere per le ipoteſi di tutti gli eventi anteriori, ci riman da ultimo di trovar la maniera di generalizzare queſti moltiplicatori medeſimi, e di racchiudere in tante formole uniche i moltiplicatori che ſpettano a tutti i poſſibili eventi. Queſt'è ciò che noi eſeguiremo ne' ſuſſeguenti paragrafi; premeſſa però la ſoluzione del preſente.

PROBLEMA XIII.

58. *Sia la formola generale* (*M*) $\phi = az^m + bz^{m-1} + cz^{m-2} + dz^{m-3} + ez^{m-4} + fz^{m-5} + gz^{m-6}$ ecc., *indi un' altra formola* (*N*) $\gamma = pz^{m+1} + qz^m + rz^{m-1} + ſz^{m-2} + tz^{m-3} + uz^{m-4} + xz^{m-5}$ ecc. *Stabilito che* z *vada calando dell' unità poſitiva, onde, ſervendoſi della maniera di ſcrivere le differenze finite, ſia* $z - z' = \delta z = 1$; *e ſuppoſto che ſia* $\gamma - \gamma' = \delta\gamma = \phi$, *ſi cerca* γ, *cioè ſi domandano i valori delle indeterminate* p, q, r, $ſ$ ecc. *dati per* m, *e per le altre cognite* a, b, c, d ecc.

La ſoluzione di queſto problema è facile, ſe farem uſo del teorema notiſſimo compreſo in queſta equazione;

$$\delta\gamma = d\gamma - \frac{d^2\gamma}{2} + \frac{d^3\gamma}{2.3} - \frac{d^4\gamma}{2.3.4} + \frac{d^5\gamma}{2.3.4.5} \text{ ecc.}$$

in cui i d rappreſentano le differenziazioni ordinarie, ciaſcuna delle quali eſeguita, conviene cangiare la differenza dz, che ha ciaſcun termine in δz, cioè in 1. Imperocchè, in virtù di queſto teorema, avremo

$$d\gamma = (m+1).pz^m + mqz^{m-1} + (m-1)rz^{m-2} + (m-2)ſz^{m-3} + (m-3)tz^{m-4} + (m-4)uz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^2\gamma = m(m+1)pz^{m-1} + (m-1)mqz^{m-2} + (m-2)(m-1)rz^{m-3} + (m-3)(m-2)ſz^{m-4} + (m-4)(m-3)tz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^3\gamma = (m-1)(m)(m+1).pz^{m-2} + (m-2)(m-1)(m)qz^{m-3} + (m-3)(m-2)(m-1)rz^{m-4} + (m-4)(m-3)(m-2)ſz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^4y = (m-2)(m-1)(m)(m+1)pz^{m-3} + (m-3)(m-2)(m-1)(m)qz^{m-4}$$
$$+ (m-4)(m-3)(m-2)(m-1)\,rz^{m-5} \text{ ecc.}$$
$$d^5y = (m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)\,pz^{m-4}$$
$$+ (m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)\,qz^{m-5} \text{ ecc.}$$
$$d^6y = (m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)\,pz^{m-5} \text{ ecc.,}$$

e quindi ecc.

$$\begin{aligned}
(O)\ \delta y = {} & (m+1)pz^m + \left(-\frac{m.(m+1)}{2}p + mq\right)z^{m-1} \\
& + \left(\frac{(m-1)(m)(m+1)}{2.3}p - \frac{(m-1)(m)}{2}q + (m-1)r\right)z^{m-2} \\
& + \left(-\frac{(m-2)(m-1)(m)(m+1)}{2.3.4}p + \frac{(m-2)(m-1)(m)q}{2.3}\right. \\
& \left. - \frac{(m-2)(m-1)r}{2} + (m-2)s\right)z^{m-3} + \left(\frac{(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)p}{2.3.4.5}\right. \\
& - \frac{(m-3)(m-2)(m-1)(m)q}{2.3.4} + \frac{(m-3)(m-2)(m-1)r}{2.3} \\
& \left. - \frac{(m-3)(m-2)s}{2} + (m-3)t\right)z^{m-4} \\
& + \left(-\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)p}{2.3.4.5.6}\right. \\
& + \frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)q}{2.3.4.5} - \frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)r}{2.3.4} \\
& \left. + \frac{(m-4)(m-3)(m-2)s}{2.3} - \frac{(m-4)(m-3)t}{2} + (m-4)u\right)z^{m-5}.\text{ecc.}
\end{aligned}$$

Altro pertanto non reſta da fare che confrontare i termini di queſta equazione colla equazione $\phi =$ ecc., e troveremo i valori delle ſuddette indeterminate p, q, ecc. Il confronto de' primi termini ci offre l'equazione $(m+1)p = a$, che dà $p = \frac{a}{m+1}$. Dal confronto de' ſecondi riſulta $-\frac{(m)(m+1)}{2}p + mq = b$, o, ſoſtituito il valore di p, e fatte le dovute operazioni, $q=\frac{b}{m}+\frac{a}{2}$. Coi confronti poi de' termini ſuſſeguenti ci verran date le altre indeterminate, le quali io diſpongo per ordine, principiando dalla prima;

$$p=\frac{a}{m+1};\ q=\frac{b}{m}+\frac{a}{2};\ r=\frac{c}{m-1}+\frac{b}{2}+\frac{ma}{2.2.3};$$

$$s=\frac{d}{m-2}+\frac{c}{2}+\frac{(m-1)b}{2.2.3}+a.0;\ t=\frac{e}{m-2}+\frac{d}{2}+\frac{(m-2)c}{2.2.3}+b.0-\frac{(m-2)(m-1)(m)a}{2.3.\,2.3.4.5};\ u=\frac{f}{m-4}+\frac{e}{2}+\frac{(m-3)d}{2.2.3}+c.0-\frac{(m-3)(m-2)(m-1)}{2.3.2.3.4.5}.b+a.0;$$

$$x=\frac{g}{m-5}+\frac{f}{2}+\frac{(m-4)e}{2.2.3}+d.0-\frac{(m-4)(m-3)(m-2)c}{2.3.2.3.4.5}+b.0+\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)a}{2.3.2.3.4.5.6.7.}\ \text{ecc.}$$

La legge de' due primi termini in tutti i valori di queſte indeterminate è chiara. Cominciando poi la ſerie de' rimanenti dai terzi termini, veggiamo, che i termini nelle ſedi pari ſon nulli, che quelli delle ſedi diſpari progrediſcono coi ſegni alterni, e che il numero de' fattori, ne' quali entra la m pei termini delle ſedi diſpari ſeguita la legge de' numeri diſpari 1, 3, 5, 7 ecc. Quanto alla legge de' coefficienti numerici, non biſogna laſciarſi ingannare da que' pochi valori delle ſpecie p, q, r ecc. che abbiamo determinato, coi quali potrebbe parere, che i numeratori de' termini non aveſſero altro coefficiente numerico che l' unità. Se ſi va avanti ſino al nono termine delle equazioni generali, coſicchè ſia $\phi=az^{m}\ldots\ldots+hz^{m-7}+iz^{m-8}$ ecc., $\gamma=pz^{m+1}\ldots\ldots+yz^{m-6}+\pi z^{m-7}$, ſi trova $\pi=\frac{i}{m-7}+\frac{h}{2}+\frac{(m-6)g}{2.2.3}$

$$+f.o - \frac{(m-6)(m-3)(m-4).e}{2.3.2.3.4.5.}$$

$$+d.o + \frac{(m-6)(m-5)(m-4)(m-3)(m-2).c}{2.3.2.3.4.5.6.7} + b.o$$

$$-\frac{3(m-6)(m-5)(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)a}{2.5.2.3.4.5.6.7.8.9};$$

ove ſi vede che appariſce il 3 nel numeratore dell' ultimo termine. La vera regola, colla quale ſi determinano queſti coefficienti, è la ſeguente, come ciaſcuno può verificare. Si ponga per comodo $\frac{1}{2.2.3} = \omega$, e ſarà $\frac{1}{2.3.2.3.4.5} = \frac{-3}{2.2.3.4.5} + \frac{\omega}{2.3}$. Queſt' omogeneo di comparazione ſi faccia $= \omega'$, e riſulta $\frac{1}{2.3.2.3.4.5.6.7} = \frac{5}{2.2.3.4.5.6.7} - \frac{\omega}{2.3.4.5} + \frac{\omega'}{2.3}$, cui ſia $= \omega''$; ed avremo $\frac{3}{2.5.2.3.4.5.6.7.8.9} = \frac{-7}{2.2.3.4.5.6.7.8.9} + \frac{\omega}{2.3.4.5.6.7} - \frac{\omega'}{2.3.4.5} + \frac{\omega''}{2.3}$ ecc. colla legge, che è manifeſta.

PROBLEMA XIV.

59. *Dato il generale evento di bianche* $n - z - 1$, *determinare il primo moltiplicatore generale della ſerie ricorrente contraria di grado* $z + 1$, *che al dato evento conviene.*

Abbiam veduto al §. 49, che il primo moltiplicatore generale è eguale alla ſomma della ſerie $2(n-2) + 4(n-2) + 6(n-3) + \ldots\ldots + 2(z-1)(n-z+1) + 2z(n-z)$, che ſuppongo $= \gamma$. Or poichè queſta ſerie diminuita dell' ultimo termine $2z(n-z)$ è quel che

diventa γ, ſe in eſſo in vece di z ſi pone $z-1$, ſarà $2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)\ldots 2(z-1)(n-z+1)=\gamma'$, pel precedente Problema, e quindi $\gamma-\gamma'$, oſſia $\delta\gamma=2z(n-z)=-2z^2+2nz$. S' inſtituiſca il paragone di queſta equazione col canone (O) del §.58, ed avremo $m=2$; $(m+1)p=-2$, ovvero $p=-\frac{2}{3}$ col confronto de' primi termini. Quel de' ſecondi ci ſomminiſtra l' equazione $-3p+2q=2n$, da cui colla ſoſtituzione del valore di p ſi trae $q=n-1$. Perchè poi manca il termine coſtante nella noſtra formola, ſarà col paragone de' termini $p-q+r=0$, cioè $r=-p+q=n-1+\frac{2}{3}=\frac{3n-1}{3}$. Introducanſi ora queſti valori nella formola generale (N) del §. 58, e ſi avrà la ſomma della ſerie $\gamma=\frac{-2z^3}{3}+(n-1)z^2+\frac{(3n-1)z}{3}+s$. La ſpecie s verrà determinata dalla condizione, che, quando $z=1$, ſia la ſomma della noſtra ſerie eguale al primo termine $2(n-1)$; onde naſce $-\frac{2}{3}+n-1+\frac{3n-1}{3}+s=2n-2$, oſſia
$-\frac{2+3n-3+3n-1}{3}+s=2n-2$ cioè $\frac{6n-6}{3}+s=2n-2$, che dà $s=0$. Poichè $\delta\gamma=\phi$, poteaſi pure fare il confronto del noſtro termine generale $-2z^2+2nz$ colla formola (M) del §. 58, e trarne quindi i valori de' ſimboli m, a, b, ecc. Ecco ciò che ne ſarebbe riſultato; $m=2$, $a=-2$, $b=2n$, $c=0$. Dunque, per le generali determinazioni delle ſpecie p, q ecc., $p=-\frac{2}{3}$, $q=n-1$, $r=\frac{3n-1}{3}$, come s'è già trovato.

trovato. Da ciò ſi deduce, che il primo moltiplicatore della ricorrente contraria pel generale evento di bianche $n - z - 1$, ſarà $= \frac{-2z^3 + 3nz^2 - 3z^2 + 3nz - z}{3}$ $= (z + 1)\left(zn - \frac{2z^2 + z}{3}\right)$.

PROBLEMA XV.

60. *Dato il generale evento di bianche* $n - z - 1$, *determinare il ſecondo moltiplicatore della ſerie contraria di grado* $z + 1$, *che al dato evento conviene.*

Sia θ una funzione qualunque di z; θ' quel che diventa θ, ſe in eſſo ſi pone $z - 1$ in vece di z; θ'' ciò che divien θ', ſe in θ ſi mette un'altra volta $z - 1$ in luogo di z; ecc. La teoria delle differenze finite ci ſomminiſtra altrettante ſerie quanti ſono i θ', θ'' ecc., per mezzo delle quali vengon dati gl'iſteſſi θ', θ'' ecc. pel primo ſimbolo θ; e ſi ha.

$$(P)\ \theta' = \theta - d\theta + \frac{d^2\theta}{2} - \frac{d^3\theta}{2.3} + \frac{d^4\theta}{2.3.4} - \frac{d^5\theta}{2.3.4.5} + \frac{d^6\theta}{2.3.4.5.6} \text{ ecc.}$$

$$(\mathcal{Q})\ \theta'' = \theta - 2d\theta + \frac{2^2 d^2\theta}{2} - \frac{2^3 d^3\theta}{2.3} + \frac{2^4 d^4\theta}{2.3.4} - \frac{2^5 d^5\theta}{2.3.4.5} \text{ ecc.}$$

ove i d ſignificano le differenziazioni ordinarie. Delle due ſerie notate, la prima ci è utile per trovare il noſtro ſecondo moltiplicatore; tutte e due per trovare i ſeguenti. Si richiami a tal fine la formola del §. 51. che è $\gamma = -2z(n - z)\alpha' + \gamma' + z^2(n - z + 1)^2$, in cui γ rappreſenta il ſecondo moltiplicatore, α il primo, e α' ciò che diventa α ſe in eſſo in vece di z ſi pone $z - 1$. Sarà $\gamma - \gamma' = \delta\gamma = -2z(n - z)\alpha' + z^2(n - z + 1)^2$. Or poichè $\alpha = \frac{-2z^3 + 3nz^2 - 3z^2 + 3nz - z}{3}$, fatto $\theta = \alpha$, e ſoſtituito 1 in vece di dz, avrem pel canone (P)

$$\alpha' = \frac{-2z^3+3nz^2-3z^2+3nz-z}{3} + \frac{6z^2-6nz+6z-3n+1}{3}$$

$$+ \frac{-6z+3n-3}{3} + \frac{2}{3};\text{ ovvero } \alpha' = \frac{-2z^3+(3n+3)z^2-(3n+1)z}{3};$$

e perciò $\delta\gamma = 2z(n-z)\frac{(2z^3-(3n-3)z^2+(3n+1)z}{3} + z^2(n-z+1)^2 =$

$$\frac{-4z^5+(10n+9)z^4-(6n^2-18n-)z^3+(9n^2+8n+3)z^2.}{3}$$

Paragonisi questa formola colla generale (M), e risulterà $m=5$, $a=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{10n+9}{3}$, $c=\frac{-6n^2-18n-8}{3}$, $d=\frac{9n^2+8n+3}{3}$, $e=0$, $f=0$, perchè manca il termine, in cui z sia alla prima dimensione, e il termine costante. Sostituendo poi questi valori di m, a, b ecc. nelle generali determinazioni de' simboli p, q ecc., si ha $p=-\frac{2}{3^2}$, $q=\frac{10n-1}{3.5}$, $r=\frac{-9n^2+3n+5}{2.3^2}$, $s=-n$, $t=\frac{18n^2-3n-1}{2.3^2}$, $u=\frac{15n^2+10n+2}{2.3.5}$;

onde

$$\gamma = \frac{-20z^6+\overline{60n-6}z^5-\overline{45n^2+15n+25}z^4-90nz^3+\overline{90n^2-15n-5}z^2+\overline{45n^2+30n+6}z.}{2.3.3.5}$$

Non aggiungo alcun termine costante, perchè essendo la differenza finita $\delta\gamma$ un aggregato di termini moltiplicato per z^2, e annullandosi essa quando $z=0$, nella stessa ipotesi anche l'integrale γ debb'esser zero. Sicchè sarà noto il secondo moltiplicatore generale, che compete alla nostra serie, e noi l'esprimeremo in quest'altra forma equivalente;

$$\frac{z(z+1)}{2}\left(-(z^2+z+1)n^2+\frac{(4z^3-3z^2-3z+2)}{3}n+\frac{-20z^4+14z^3+11z^2-11z+6}{3.3.5}\right).$$

PROBLEMA XVI.

61. *Dato il generale evento di bianche* $n-z-1$, *determinare il terzo moltiplicatore della ſerie contraria di grado* $z+1$, *che al dato evento conviene.*

Pel §. 51. abbiamo il terzo moltiplicatore $\gamma = -2z(n-z)\beta' + \gamma' - z^2(n-z+1)^2.\alpha''$, i ſimboli α, β denotando il primo e il ſecondo moltiplicatore già ritrovati: e quindi $\gamma-\gamma'=\delta\gamma=-2z(n-z)\beta'-z^2(n-z+)^2\,\alpha''$. Dal valore di $\beta =$

$$\frac{-20z^6+\overline{60n-6}.z^5-\overline{45n^2+15n+25}.z^4-90nz^3+\overline{90n^2-15n-5}.z^2+\overline{45n^2+30n+6}\times z}{2.3.3.5}$$

ſi deduce col mezzo del canone (P)

$$\beta' = \frac{-20z^6+\overline{60n+114}.z^5-\overline{45n^2-285n-245}.z^4+\overline{180n^2+450n+240}.z^3-\overline{180n^2+255n-95}.z^2+\overline{45n^2+30n+6}.z}{2.3.3.5};$$

e dal valore di $\alpha = \dfrac{-2z^3+(3n-3)z^2+(3n-1)z}{3}$ col ſecondo canone (E) ſi trae

$$\alpha'' = \frac{-2z^3+(3n+9)z^2+(-9n-13)z+6n+6}{3}.$$

Colla introduzione poi di queſti valori nella ſuperior formola $\delta\gamma = -2z(n-z)\,\beta' - z^2(n-z+1)^2\alpha''$ ſi otterrà dopo le neceſſarie riduzioni

$$\delta\gamma = \frac{1}{3.3.5}\Big(-20z^8+(80n+144)z^7+(-105n^2-504n-440)z^6+(45n^3+585n^2+1250n+735)z^5$$
$$+(-225n^3-1125n^2-1560n-710)z^4+(315n^3+945n^2+1010n+381)z^3+(-135n^3-300n^2-276n-90)z^2\Big)$$

Queſta formola dovrà eſſere confrontata col canone (M) per le determinazioni delle ſpecie m, a, b ecc., onde ſi rendano anche noti gli altri ſimboli p, q, r ecc. e ſi abbia finalmente il ſuo integrale che ſarà il terzo moltiplicatore ricercato. Ma ſe a motivo de' coefficienti delle podeſtà di z molto compleſſi ſi trovaſſe più comodo d' integrar per parti la ſuddetta formola differenziale, biſognerebbe in tal caſo trasformarla in queſt' altra equivalente

$$\delta\gamma = (z^5-5z^4+7z^3-3z^2)n^3 + \frac{(-7z^6+39z^5-75z^4+63z^3-20z^2)n^2}{3}$$
$$+\frac{(80z^7-504z^6+1250z^5-1560z^4+1010z^3-276z^2)n}{3\cdot3\cdot5\cdot}$$
$$+\frac{-20z^8+144z^7-440z^6+735z^5-710z^4+381z^3-90z^2}{3\cdot3\cdot5}, \text{ e}$$

conſiderare che ogni fattore delle podeſtà di n ſia una formola di differenze finite. Integrato pertanto ciaſcuno di queſti fattori coll' ajuto del canone (M), ſenza aggiunger coſtante, che non ha luogo, ſi troverà il terzo moltiplicatore domandato dal Problema $=$

$$\frac{(z-1)z(z+1)}{2\cdot3}\Big((z^3-3z^2-z+2)n^3+\frac{(-6z^4-18z^3-15z+6)n^2}{3}$$
$$+\frac{(60z^5-192z^4+78z^3+174z^2-102z+36)n}{3\cdot3\cdot5}$$
$$+\frac{-280z^6+1008z^5-808z^4-693z^3+1061z^2-126z+144}{3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7}\Big).$$

PROBLEMA XVII.

62. *Dato il generale evento di bianche* $n-z-1$, *determinare il quarto moltiplicatore della ſerie contraria di grado* $z+1$, *che al dato evento conviene.*

Rappreſentando γ ſecondo il ſolito queſto quarto moltiplicatore, ſarà α il ſecondo moltiplicatore, e β il terzo, che ſon già noti. Si paſſi dunque col canone $(\mathfrak{Q})$ dal valore di α a quello di α'', e dal valore di β a quello di β', e ſi ſoſtituiſcano queſti nuovi valori nella formola generale $\delta\gamma = -2z(n-z)\beta'-z^2(n-z+1)^2\alpha''$. Si avrà $\delta\gamma$ dato per z e per n; e l' integrazione di queſta formola o tutt' a un tratto, o per parti, eſeguita alla maniera de' precedenti Problemi ci farà conoſcere il quarto moltiplicatore, che domandiamo, e ſarà eſſo

$$= \frac{(z-2)(z-1)z(z+1)}{2.3.4}\Big\{(-z^4+6z^3-5z^2-8z+3)n^4$$

$$+(8z^5-50z^4+64z^3+36z^2-70z+12)\frac{n^3}{3}+$$

$$(-120z^6+804z^5-1437z^4+78z^3+1503z-792z+108)\frac{n^2}{3.3.5}+$$

$$(1120z^7-8232z^6+19108z^5-10212z^4-15476z^3+18228z^2-3816z+864)\frac{n}{3.3.3.5.5.7}-$$

$$\frac{1}{3.3.3.3.5.5.7}(2800z^8-22960z^7+65836z^6-64288z^5-30305z^4+83310z^3-37251z^2+198z-3240)\Big\}.$$

Si tenga lo ſteſſo metodo pel 5.°, 6.° ecc. moltiplicatori, e ciaſcun d' eſſi ſarà in noſtra mano, ſenza che per averli ſia d' uopo dalla ipoteſi dell' evento $n-z-1$ aſcendere a tutte le precedenti ſino all' ultima dell' evento $n-2$.

63. Faremo la rifleſſione, che il terzo moltiplicatore ha il fattore $z-1$, e divien zero, quando $z=1$; il che debb' eſſere neceſſariamente, perchè in tale ipoteſi la ſerie ricorrente delle combinazioni è appunto di ſecondo grado, e non ammette per conſeguenza che due ſoli moltiplicatori. Così il quarto moltiplicatore riceve il fattore $z-2$, e perciò ſi fa nullo nell' ipoteſi di $z=2$, perchè in tal caſo la ricorrente, che gli corriſponde, è ſolo di terzo grado, e dee realmente mancare queſto quarto moltiplicatore. Onde, adattato un ſimil diſcorſo ai moltiplicatori ſuſſeguenti, ſi raccoglierà, che chiamato m il numero de' moltiplicatori, l' ultimo denominato dal numero m avrà il fattore $z-m+2$. Oſſerviſi in oltre, che i fattori de' noſtri generali moltiplicatori coſtituiſcono una ſerie aritmetica, e che ſon tanti, quanto è l' eſponente maſſimo di n per ciaſcun

d' eſſi, ovvero quanto è l' eſponente maſſimo di z nella formola, che moltiplica la podeſtà maſſima di n. Di più, che l' unico fattore del primo moltiplicatore è diviſo per 1, i due del ſecondo per 1.2, i tre del terzo per 1.2.3; i quattro del quarto per 1.2.3.4; per conſeguenza i fattori numero m del moltiplicatore denominato da m ſaranno diviſi da $1.2.3.4....(m-1)m$: Finalmente che creſce ſucceſſivamente di un' unità l'eſponente maſſimo di z nelle formole moltiplicatrici delle podeſtà di n decreſcenti ſucceſſivamente d' un' unità in ciaſcun moltiplicatore; e medeſimamente creſce di un' unità l' eſponente maſſimo di z nelle formole che moltiplicano la podeſtà maſſima di n, ove ſi paſſi da un moltiplicatore al ſuo immediatamente ſuſſeguente.

64. Queſte coſe poſte, per evitare di far tante diviſioni ne' moltiplicatori trovati coll' anzidetto metodo, quanti ſono i loro fattori, onde ridurli a forma più comoda, potrebbe cadere opportuna la ſoluzione del preſente

PROBLEMA XVIII.

65. *Ritrovare per ciaſcun moltiplicatore le formole moltiplicatrici delle podeſtà di* n, *che unitamente coſtituiſcono il quoziente dell' intero moltiplicatore diviſo pe' ſuoi reſpettivi fattori.*

A queſto fine ſtabiliſco tre qualunque moltiplicatori generali, che ſi ſuccedono l'un dopo l'altro. L'antepenultimo ſia

$$A = \frac{(z+1)z(z-1)..(z-m+4)}{1.2.3...(m-2)}\left(an^{m-2}+bn^{m-3}+cn^{m-4}+en^{m-5}+fn^{m-6}...\text{ecc.}\right).$$

Il penultimo

$$B = \frac{(z+1)z(z-1)..(z-m+3)}{1.2.3...(m-1)}\left(\alpha n^{m-1}+\beta n^{m-2}+\gamma n^{m-3}+\varepsilon n^{m-4}+\phi n^{m-5}..\text{ecc.}\right).$$

L' ultimo, che ſi cerca

$$C=\frac{(z+1)z(z-1)..(z-m+2)}{1.2.3...m}\left(sn^{m}+tn^{m-1}+un^{m-2}+xn^{m-3}+yn^{m-4}...\text{ecc.}\right).$$

Le ſpecie a, b, c ecc., α, β, γ ecc., s, t, u ecc. ſono funzioni di z. Siano in oltre A', B', C', a', b', c' ecc., α', β' ecc., s', t' ecc. ciò che diventano A, B, C, a ecc., ſe in queſte ſi pone $z-1$ in vece di z; ed A'', B'', C'', a'' ecc. ciò che diventano A', B', C', a' ecc. ſe in eſſe ſi pone un' altra volta $z-1$ in vece di z. Sarà

$$A'=\frac{z(z-1)..(z-m+3)}{1.2.3...(m-2)}\left(a'n^{m-2}+b'n^{m-3}+c'n^{m-4}+e'n^{m-5}+fn^{m-6}..\text{ecc.}\right);$$

$$A''=\frac{(z-1)(z-2)..(z-m+2)}{1.2.3..(m-2)}\left(a''n^{m-2}+b''n^{m-3}+c''n^{m-4}+e''n^{m-5}+f''n^{m-6}..\text{ecc.}\right);$$

$$B'=\frac{z(z-1)..(-m+2)}{1.2.3..(m-1)}\left(\alpha'n^{m-1}+\beta'n^{m-2}+\gamma'n^{m-3}+\varepsilon'n^{m-4}+\phi'n^{m-5}..\text{ecc.}\right);$$

$$C'=\frac{z(z-)..(z-m+1)}{1.2.3...m}\left(s'n^{m}+t'n^{m-1}+u'n^{m-2}+x'n^{m-3}+y'n^{m-4}..\text{ecc.}\right).$$

Dunque $C-C'=\delta C=$

$$\frac{z(z-1)..(z-m+2)}{1.2.3...m}\Big(\big((z+1)(s-s')+ms'\big)\times n^{m}+\big((z+1)(t-t')+mt'\big)\times$$
$$n^{m-1}+\big((z+1)(u-u')+mu'\big)\times n^{m-2}+\big((z+1)(x-x')+mx'\big)\times n^{m-3}$$
$$+\big((z+1)(y-y')+my'\big)\times n^{m-4}\text{ ecc.}\Big).$$

Ma, per la formola determinatrice de' noſtri moltiplicatori abbiamo anche $\delta C=-2z(n-z)B'-z^{2}(n-z+1)^{2}A''$, cioè, dopo la ſoſtituzione de' valori di B', A'', e l' opportuna riduzione;

$$\delta C=\frac{z(z-1)..(z-m+2)}{1.2.3...m}\Big(-\big(m(m-1)za''+2mz\alpha'\big)\times n^{m}$$
$$+\big(2m(m-1)(z-1)za''-m(m-1)zb''+2mz^{2}\alpha'-2mz\beta'\big)\times n^{m-1}$$
$$-\big(m(m-1)(z-1)^{2}za''+2m(m-1)(z-1)zb''-m(m-1)zc''+$$
$$2mz^{2}\beta'-2mz\gamma'\big)\times n^{m-2}$$
$$-\big(m(m-1)(z-1)^{2}zb''+2m(m-1)(z-1)zc''-m(m-1)ze''+$$
$$2mz^{2}\gamma'-2mz\varepsilon'\big)\times n^{m-3}\text{ ecc.}\Big)$$

con ordine pe' ſeguenti termini ſimile a quello, che comincia nel terzo termine. Poſto pertanto δs, δt, δu ecc. in vece di $s - s'$, $t - t'$, $u - u'$ ecc., e di più $s - \delta s$, $t - \delta t$, $u - \delta u$ in vece di s', t', u'; ed agguagliati i due valori di δC, col levare gli eguali fattori riſulta l' equazione;

$$\left((z-(m-1))\delta s+ms\right)\times n^{m}+\left((z-(m-1))\delta t+mt\right)\times n^{m-1}$$
$$+((z-(m-1)(\times\delta u+mu)\times n^{m-2}+((z-(m-1))\times\delta x+mx)\times n^{m-3}\text{ecc.}$$
$$=\left(-m(m-1)za''-2mz\alpha'\right)\times n^{m}$$
$$+\left(2m(m-1)(z-1(za''-m)m-1)zb''+2mz^{2}\alpha'-2mz\beta'\right)\times n^{m-1}$$
$$+\left(-m(m-1)(z-1)^{2}za''+2m(m-1)(z-1)zb''-m(m-1)zc''\right.$$
$$\left.+2mz^{2}\beta'-2mz\gamma'\right)\times n^{m-2}+\left(-m(m-1)(z-1)^{2}zb''\right.$$
$$\left.+2m(m-1)(z-1)zc''-m(m-1)ze''+2mz^{2}\gamma'-2mz\varepsilon'\right)\times n^{m-3}\text{ ecc.}$$

ove le formole, che nel primo membro moltiplicano le podeſtà di n debbono eſſere identiche colle formole, che moltiplicano le podeſtà analoghe di n nell' omogeneo di comparazione. Ora, ſiccome m è quantità nota, e ſon pur note le ſpecie a, b, c ecc. α, β, γ ecc., perchè appartengono ai due cogniti moltiplicatori i quali immediatamente precedono il moltiplicatore C; e quindi, pei canoni (P) (Q) le altre, che ne derivano, a'', b'', c'' ecc. α', β', γ' ecc., non reſterà a far altro, che dar per queſte i ſimboli incogniti s, t, u ecc., onde eſibire il ricercato quoziente del moltiplicatore C, e in conſeguenza lo ſteſſo moltiplicatore.

66. Ad ottener ciò, ſtabiliſco in genere

$$S=Fz^{r}+Gz^{r-1}+Hz^{r-2}+Iz^{r-3}+Lz^{r-4}\text{ ecc.},$$

Sarà pel canone (O) del §. 58.

$$\delta S=rFz^{r-1}+\left(\frac{-r(r-1)F}{2}+(r-1)G\right)\times z^{r-2}$$
$$+\left(\frac{r(r-1)(r-2)F}{2.3}-\frac{(r-1)(r-2)}{2}G+(r-2)H\right)\times z^{r-3}\ldots\text{ecc.},$$

da che ſi ricava, eſſere

$$(z-(m-1))\delta S+mS=\left((r+m-1)F+F\right)\times z^{r}$$

$$+\left(\frac{-r(r+2m-3)}{2}F+(r+m-2)G+G\right)z^{r-1}+$$

$$\left(\frac{r(r-1)(r+3m-5)}{2.3}F-\frac{(r-1)(r+2m-4)}{2}G+(r+m-3)H+H\right)z^{r-2}$$

$$+\left(\frac{-r(r-1)(r-2)(r+4m-7)}{2.3.4}F+\frac{(r-1)(r-2)(r+3m-6)}{2.3}G\right.$$

$$\left.-\frac{(r-2)(r+2m-5)}{2}H+(r+m-4)I+I\right)z^{r-3} \text{ ecc.}$$

La legge di queſta ſerie è di per sè manifeſta, e quando uopo il voglia, ſi potrà produrla ſino a quel numero di termini che eſigerà la natura delle formole, e il numero de' termini, dai quali vengono coſtituite.

67. Domandiſi ora pel moltiplicatore C denominato da m la formola che moltiplica n^m, ſarà $r=m$, $S=s$, e però $s=Fz^m+Gz^{m-1}+Hz^{m-2}+Iz^{m-3}$ ecc., ed avraſſi $(z-(m-1))\,\delta s+ms$, ovvero

$$\left((2m-1)F+F\right)\times z^m+\left(\frac{-m(3m-3)}{2}F+(2m-2)G+G\right)\times z^{m-1}$$

$$+\left(\frac{m(m-1)(4m-5)}{2.3.}F-\frac{(m-1)(3m-4)}{2}G+(2m-3)H+H\right)\times z^{m-2}$$

$$+\left(\frac{-m(m-1)(m-2)(5m-7)}{2.3.4}F+\frac{(m-1)(m-2)(4m-6)}{2.3}G\right.$$

$$\left.-\frac{(m-2)(3m-5)}{2}H+(2m-4)I+I\right)\times z^{m-3} \text{ ecc.}=$$

$-m(m-1)z\,a''-2mz\,\alpha'$. Eſſendo note in queſto ſecondo membro le funzioni a'', α', che appartengono ai moltiplicatori precedenti, ſe ſi ſoſtituiranno i loro valori dati per z, naſcerà nell'omogeneo una formola, in cui ſarà m il maſſimo eſponente di z; e confrontando i termini che ne riſultano cogli analoghi del primo membro, ſi determineranno i valori di F, G, H ecc. onde reſterà nota la formola, che nel moltiplicatore C denominato da m moltiplica n^m.

68. Compiuta queſt' operazione, ſi dee procedere a trovar la formola t, che in C moltiplica n^{m-1}. Rammentiamci, aver noi detto al §. 63, che il maſſimo eſponente di z in t diventa $m+1$, e vedremo che ſi dovrà por $r=m+1$. Fatto poi $S=t$, è neceſſario che ſi verifichi queſta equazione: $(z-(m-1))\,\delta t+mt$, oſſia

$$(2mF+F)\times z^{m+1}+\left(\frac{-(m+1)(3m-2)}{2}F+(2m-1)G+G\right)\times z^{m}$$
$$+\left(\frac{(m+1)m(4m-4)}{2.3}F-\frac{m(3m-3)}{2}G+(2m-2)H+H\right)\times z^{m-1}$$
$$+\left(\frac{-(m+1)m(m-1)(5m-6)}{2.3.4}F+\frac{m(m-1)(4m-5)}{2.3}G\right.$$
$$\left.-\frac{(m-1)(3m-4)}{2}H+(2m-3)I+I\right)z^{m-2}\text{ ecc.}$$
$$=2m(m-1)(z-1)z\,a''-m(m-1)z\,b''+2mz^{2}\alpha'-2mz\beta'.$$

Qui pure eſſendo note le funzioni a'', b'', α', β', colla ſoſtituzione de' loro valori in queſt' ultimo membro, coſtituiremo una formola, in cui il maſſimo eſponente di z arriva a $m+1$; e il confronto de' termini con quelli che lor corriſpondono nella prima parte dell' equazione darà i valori di F, G, H ecc. e renderà nota la formola t, che in C moltiplica n^{m-1}.

69. Al terzo termine del moltiplicatore C, in cui avvi n^{m-2}, corriſponde $r=m+2$; $S=u=Fz^{m+2}+Gz^{m+1}+Hz^{m}+Iz^{m-1}$ ecc., onde $(z-(m-1))\,du+mu$, ovvero

$$((2m+1)F+F)\times z^{m+2}+\left(\frac{-(m+2)(3m-1)}{2}F+2mG+G\right)\times z^{m+1}$$
$$+\frac{(m+2)(m+1)(4m-3)}{2.3}F+\left(\frac{-(m+1)(3m-2)}{2}G+(2m-1)H+H\right)\times z^{m}$$
$$+\left(\frac{-(m+2)(m+1)m(5m-5)}{2.3.4}F+\frac{(m+1)m(4m-4)}{2.3}G\right.$$
$$\left.-\frac{m(3m-3)}{2}H+(2m-2)I+I\right)\times z^{m-1}\text{ ecc.}=$$

$-m(m-1)z(z-1)^2a''+2m(m-1)z(z-1)b$ $-m(m-1)zc''+2mz^2\beta'-2mz\gamma'$. La ſoſtituzione de' valori cogniti delle funzioni a'', b'', c'', β', γ', e il confronto de' termini analoghi ne' due membri dell'equazione faran conoſcere le indeterminate F, G, H ecc., e in conſeguenza il terzo termine del moltiplicatore C.

70. Modificata poi la ſuddetta ſerie al valore che riceve r nel quarto termine di C, ſi dee far l'eguaglianza tra eſſa, e $-m(m-1)z(z-1)^2b''+2m(m-1)z(z-1)c''$ $-m(m-1)ze''+2mz^2\gamma'-2mz\varepsilon'$; e la forma sì di queſto come dell'antecedente omogeneo di comparazione ſarà quella che mantengono tutti i ſuſſeguenti. Perilchè reſta trovata la maniera d'eſibire l'intero quoziente, e per conſeguenza l'intero moltiplicatore C che ſi cercava. Queſto metodo ſerve per tutti quanti i moltiplicatori della ricorrente generale, detratto il primo; e ſolo ſi dee notare, che quando ſi cerca il ſecondo moltiplicatore, diventa $a''=-1$, e gli altri ſimboli b'', c'' ecc. ſon zero.

71. Per la compiuta ſoluzione del Problema, che ci ſiamo propoſti nel §. 30, ci rimangono ancora da conſiderare due eventi di palle bianche nell'urna A, i quali fan claſſe a parte, ed hanno le lor ricorrenti delle combinazioni contrarie fuor della ſerie generale, che s'è trovato appartenere all'evento di bianche $n-z-1$. Uno di queſti è $n-1$, l'altro n; cioè ſi può domandare quante permutazioni mi ſon neceſſarie, perchè, ridotta l'urna A allo ſtato di bianche $n-1$ che ho chiamato primitivo, rieſca probabile, che in qualcuna d'eſſe avrò l'evento di bianche in A eguale a quello dello ſtato primitivo; e quante ve ne vogliono, perchè ſia probabile, che in alcuna d'eſſe io rimetta tutte le palle bianche nella prim'urna.

72. Ho detto, che queſti due caſi eſcon fuori della regola generale degli altri eventi, e lo provo così. Se il generale evento di bianche $n-z-1$ abbracciaſſe

eziandio queſti due caſi, potrebbero aver luogo le ipoteſi di $z=0$, e di $z=-1$, che dà $z+1=0$. Colla prima la formola $n-z-1$ diventerebbe appunto $n-1$, e colla ſeconda ſi ſarebbe $n-z-1=n$. Ma ciaſcuno de' moltiplicatori generali della ſerie contraria all' evento $n-z-1$ avendo i due fattori z, $z+1$, e l'una e l'altra delle due ipoteſi li ridurrebbe tutti a zero; la qual coſa annullerebbe il numero delle combinazioni contrarie ai detti eventi per qualunque corſo di permutazioni. Dunque, o ſiam ſicuri nel permutare di aver ſempre quegli eventi, perchè tutte le combinazioni ci ſon propizie, o eſſi ſi ſottraggono alla legge degli altri. E' paleſe l'aſſurdo, che abbianſi coſtantemente i due ſuddetti eventi, anche pel ſol rifleſſo, che eſſendo tra lor diverſi, uno eſclude l'altro neceſſariamente; e perciò reſta a dirſi, che eſſi domandano altre formole regolatrici, e ci ſomminiſtrano argomento per due novelli Problemi. Sia pertanto

PROBLEMA XIX.

73. *Partendoſi dallo ſtato primitivo di bianche* $n-1$ *nella prim' urna, ſi cerca il numero delle combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta lo ſteſſo ſtato* $n-1$ *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni.*

Forminſi le colonne degli eventi contrarj e delle reſpettive combinazioni nella maniera praticata dal primo inſino al nono Problema; e avremo

per 1 permutazione; $n \;\; 1 \,|\, n\text{-}2 \;\; (n\text{-}1)^2 \,|$: quindi le combinazioni contrarie; $1+(n\text{-}1)^2$:

per 2 perm. $\begin{array}{ll|ll|} n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 & n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 \\ n\text{-}2 & 4(n\text{-}2) & n\text{-}3 & (n\text{-}2)^2 \end{array}$: comb. contr. $(n\text{-}1)^2(n\text{-}2)(n+2)$:

per 3 perm. $\begin{array}{ll|ll|ll} n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 & n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 & n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 \\ n\text{-}2 & 4(n\text{-}2) & n\text{-}2 & 4(n\text{-}2) & n\text{-}3 & (n\text{-}2)^2 \\ n\text{-}2 & 4(n\text{-}2) & n\text{-}3 & (n\text{-}2)^2 & n\text{-}2 & 9 \end{array}$

ecc.	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	comb. contr.
	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$(n-1)^2(n-2)^2(n^2+4n+8)$.
	$n-3$	$6(n-3)$	$n-4$	$(n-3)^2$	ecc.

Colla pazienza di andare avanti nella ricerca de' termini della ricorrente, ſi trova, che eſſi van con queſt' ordine; $(n-1)^2+1$; $(n-1)^2(n-2)(n+2)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^2+4n+8)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^4+4n^3+8n^2-100)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^6+4n^5+8n^4-100n^2--760n+1736)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^8+4n^7+8n^6-100n^4-760n^3-4940n^2+32176n-39520)$ ecc., e l' eſame di queſta ſerie la farà conoſcere una ricorrente di 4°. grado, che ha i moltiplicatori 1.° $(n-2)(-56n^4+528n^3-1152n^2)$; 2.° $79n^4-460n^3+156n^2+2208n-2304$; 3.° $-18n^3-21n^2+516n-796$; 4.° $n^2+18n-58$. Si avverta però, che il primo termine di queſta ſerie non è già $(n-1)^2+1$, come porta il numero delle combinazioni, ma ſolamente $(n-1)^2$. Quell' unità di più deriva dalla poſſibilità dell' evento di bianche n in una ſola permutazione, laddove eſſo non può mai aver luogo in neſſuna delle ſuſſeguenti, perchè, ov' eſſo accada, l' altro $n-1$ gli tien dietro neceſſariamente: e qui ſi cercano i contrarj allo ſteſſo evento $n-1$. Volendoſi perciò ſtabilire il termine generale della noſtra ſerie, che, giuſta la nota regola delle ricorrenti deve aver queſta forma; $ap^v+bq^v+cr^v+ds^v$, ad averſi il vero numero delle combinazioni contrarie per l' ipoteſi di $v=1$, oſſia pel caſo d' una ſola permutazione, aggiungerem l' unità al riſultato eſibito dalla formola; o anche, per aver ſempre preſente la neceſſità di queſt' aggiunta, ſcriveremo il termine generale della ricorrente così: $o^{v-1}+ap^v+bq^v+cr^v+ds^v$. Per tal modo nella ſuppoſizione che ſia il numero v delle permutazioni maggiore dell' unità, col primo termine o^{v-1} non ſi accreſcerà niente al valore de' ſuſſeguenti, e ſol nell' ipoteſi di $v=1$ avrem $o^{v-1}=o^{\circ}=1$.

PROBLEMA ULTIMO.

74. *Partendoſi dallo ſtato primitivo delle due urne, ſi cerca il numero delle combinazioni contrarie a rimettere almeno una volta in* A *tutte le bianche* n *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni,*

Erette le colonne competenti a ciaſcuna permutazione, ſi avrà

per 1. permutazione: $n-1 \;\; 2(n-1) \;|\; n-2 \;\; (n-1)^2 \;|$; onde le combinazioni contrarie; $(n-1)(n+1)$;

per 2. perm.
$$\begin{array}{ll|ll|ll|ll} n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) & n-2 & (n-1)^2 & n-2 & (n-1)^2 \\ n-1 & 2(n-1) & n-2 & (n-1)^2 & n-1 & 4 & n-2 & 4(n-2) \\ n-2 & (n-1)^2 & & & & & & \\ n-3 & (n-2)^2 & & & & & & \end{array}$$
ecc. ; comb. contr. $(n-1)^2(n^2+2n+2)$. ecc.

Non noto altre colonne, perchè nelle ſucceſſive permutazioni creſce di molto il lor numero; e già ſi ſa come ſi debba formarle. La ſerie contraria, che da eſſe dimana, è la ſeguente;

$(n-1)(n+1)$; $(n-1)^2(n^2+2n+2)$; $(n-1)^2(n^4+2n^3+2n^2-8)$; $(n-1)^2(n^6+2n^5+2n^4-8n^2-40n+56)$; $(n-1)^2(n^8+2n^7+2n^6-8n^4-40n^3-188n^2+752n-608)$ ecc., che pure è una ricorrente di 4.° grado generata dai moltiplicatori:

1.° $(n-1)(-6n^4+72n^3-144n^2)$; 2.° $31n^4-142n^3+78n^2+216n-144$; 3.° $-12n^3-3n^2+148n-156$; 4.° $n^2+12n-28$.

75. Orniamo queſt'ultimo Problema di qualche eſempio. Sia il numero di bianche $n=1$. In tale ipoteſi ſi annullano tutti i termini della ricorrente contraria; il che ci dà una certezza di avere almeno una volta bianche 1 qualunque ſia il numero delle permutazioni che domandiamo. In fatti, eſſendo lo ſtato primitivo delle urne, che in *A* ſia ſolo una nera, e in *B* una ſola bianca, colla prima permutazione è manifeſto, che in *A* ſi trasferiſce la bianca, paſſando la nera nella ſe-

conda urna. Ciò avvenendo infallibilmente nella prima permutazione, poi nella terza, indi nella quinta ecc., è chiaro, che qualunque numero di permutazioni ſia chieſto, ſempre in una d' eſſe avrem ſicuro l' evento dell' unica bianca; e quindi ogni combinazione ci ſarà favorevole, e non ne avremo alcuna contraria.

76. Facciam tranſito all' altra ipoteſi di bianche $n=2$: e per le due ſerie, contraria, e favorevole ci naſceran queſti termini; 3, 10, 32, 104 ecc.,
1, 6, 32, 152 ecc.
che ſono i medeſimi con quelli che abbiam trovato al §. 38. per la probabilità dell'evento di bianche $n-2$, cioè di neſſuna bianca nella ſteſſa ſuppoſizione di bianche $n=2$. Dunque, ove tutte le bianche ſian due, egli è lo ſteſſo il cercare, quante ſiano le combinazioni, che menan l'evento di tutte le nere, e quante ſian quelle che favoriſcono il ritorno di tutte le bianche nella prim'urna: la qual coſa non ſembrerà punto ſtrana a chi fa la rifleſſione, che nello ſtato primitivo trovandoſi una nera e una bianca in ciaſcun' urna, debb' eſſere egualmente difficile levar bianca dall' una, nera dall'altra, e condurre l'evento del §. 38., che levar nera dalla prima, bianca dalla ſeconda, e rimetter nella prima tutte le palle bianche.

77. Ma come conciliare nelle due ipoteſi l' identicità del numero delle combinazioni coll' indole delle due ſerie, eſſendo quella del §. 38. ſol di ſecondo grado, ed arrivando al quarto quella del preſente Problema? Ciò ſi fa agevolmente. Imperocchè a tutti è noto che, chiamati p, q, r, s i quattro moltiplicatori di una ricorrente di quarto grado, l' equazione $x^4-sx^3-rx^2-qx-p=0$ comprende le quattro radici che io denomino P, $\mathcal{Q}$, R, S, le quali entrano nella formazione del termine generale $aP^v+b\mathcal{Q}^v+cR^v+dS^v$, che conviene alla ſerie. Ponghiamo ora, che in una data ipoteſi l' equazione ſuddetta di quarto grado ſia diviſi-

bile in due di ſecondo, onde naſca $(x^2+ex+f)\times(x^2+gx+h)=0$; e ſian P, Q le radici del primo trinomio, R, S quelle dell'altro. E' evidente, che tutte e quattro le radici di quadrato-quadratiche, che originalmente erano, diventan quadratiche; e che non hanno alcuna dipendenza dai valori de' coefficienti a, b, c, d, i quali vengono determinati dai confronti del termine generale modificato alle quattro ipoteſi di $v=1$, $v=2$, $v=3$, $v=4$, coi quattro primi termini della ſerie. Se perciò avverrà, che tali confronti facciano ſvanire i due primi coefficienti a, b; poſſiamo conſiderare la formola generale ridotta ai due termini cR^v+dS^v, che di per sè portano ſolo a una ricorrente di ſecondo grado; e poſſiam tener conto ancora de' due termini aP^v+bQ^v, i quali ſi diſtruggono non perchè P, Q ſian zero, ma perchè s' annullano a e b. Quindi appariſce, come debba eſſere indifferente per la formazione della ſerie il ſervirſi de' due moltiplicatori, che ſono ſtati determinati nel §. 38, o far uſo de' quattro, che ci dà il noſtro Problema, e perchè le due ſerie s' identificano tra loro perfettamente.

78. Poſto finalmente $n=3$, le due ſerie contraria e favorevole procedono in queſta maniera:
contr. 8,68,580,4964.42484,363668,3112996,26647556,228105364,
fav. 1,13,149,1597,16565,167773,1699973,16399165,159315125,
contr. 1952603060,16714460740,143077320356,1224754999348 ecc.
fav. 1544181341,14666598869,139352216125,1317110828981 ecc,
nelle quali ſi oſſerva, che ſino al termine duodecimo incluſivamente le combinazioni contrarie ſuperano le favorevoli, cominciando ſolo nel terzodecimo ad eſſer queſte in maggior numero delle prime. Dal che inferiſco, che, eſſendo due bianche e una nera in A, una bianca e due nere in B, per giocare proſſimamente in pari ſulla probabilità dell' evento di tutte le tre bianche nella prim' urna, debbo chiedere o 12, o 13 permutazioni.

NUOVO USO

DELLA CHINACHINA NEL VAJUOLO.

Del Sig. GIOVANNI VERARDO ZEVIANI.

IN un mio Opuſcolo, preſentato ultimamente alla *Regia Accademia di Mantova*, e da eſſa approvato, trattaſi qual uſo debba fare il Medico della Chinachina ne' morbi Purulenti. Ho ivi dimoſtrato che gli effetti buoni o cattivi della Chinachina in queſto genere di malattie ſi debbono aſpettare, più che da altre ſue facoltà, dalla forza ſua ſtitica e corroborante. In queſto frattempo eſſendo qui in Verona inſorta una fiera epidemia di Vajuolo, ho avuto campo, dietro a' fondamenti da me in quell' Opuſcolo propoſti, di ſpiare gli effetti della Chinachina anche in queſto morbo. Ed avendoli trovati corriſpondere eſattamente alla mia aſpettazione, ho riſoluto di pubblicare in queſta Memoria le mie oſſervazioni e rifleſſioni ſu di tal propoſito; la quale quindi ſi dovrà conſiderare come un' appendice di quell' Opuſcolo; e come una prova del modo di filoſofare da me in eſſo tenuto. E quel che più importa ſervirà eſſa moltiſſimo ad eccitare i Medici noſtri ancor dubbioſi e reſtii a tentare la Chinachina anche nel Vajuolo, come in altri paeſi lodevolmente ſi coſtuma di fare.

Due caſi pratici, fra molti che ſe ne potrebbono addurre, ſerviranno di baſe e norma al noſtro ragionare. Un de' quali, in cui non fu uſata la Chinachina, fu mortale; l' altro del tutto a quel ſimile, uſata la Chinachina, ebbe buon fine. Paſſeremo indi a dare un

Catalogo di Scrittori che hanno lodata la Chinachina nel Vajuolo ; ne eſamineremo i motivi per i quali fu da eſſi preſcritta; e faremo vedere che a tutt' altro fine l' hanno ordinata , da quello che noi proponiamo. Conchiuderemo con fiſſare il tempo più opportuno , e la maniera più adattata di ſervirſi di queſt' ottimo medicamento: i di cui ſalutari effetti nel Vajuolo ſe foſſero ſtati noti al *Trillero* , avrebbe avuto maggior ragione di eſaggerare: *omnis in hoc ſolo cortice eſt ſalus , omneque præſidium & ſacra quaſi anchora : ſed ad immenſas hujuſce febrifugi laudes merito decantandas profecto nec dies ſufficit, nec menſis, nec annus, immo vix integrum ſeculum, ſicuti ad deſcribendas innumeras virtutes ipſius non paginæ , non libelli aut libri ; ſed ſpatioſa potius volumina omnino requiruntur.* (a)

ISTORIA PRIMA.

La Signora *Tereſa P.....* maritata , d' anni 20. il dì 16. di Giugno dell' anno 1779. fu preſa dalla febbre, con forti dolori del dorſo , e con inclinazione al vomito . Il terzo dì ſi ſpiegarono nella faccia moltiſſime puſtulette ſomiglianti ai morbilli , con vaniloquio. Il quarto dì le puſtule ſi fecero vedere per tutto il reſtante del corpo; e ſegnarono un Vajuolo chiamato *confluente* . In queſto giorno preſe un purgante , e le fu tratto ſangue . Nel quinto dì le puſtule ſi alzavano , ma aſpre e roſſe fuor dell' uſato: crebbe la febbre nella ſera con notabile affanno di reſpiro di breve durata. Nel ſeſto ſtette il male ſul medeſimo piede. Nel ſettimo d' improvviſo biancheggiarono nella faccia le puſtule , una nell' altra entrando e confondendoſi con poca materia . Nell' ottavo biancheggiarono con poca materia le puſtule del reſto del corpo. Nel nono ſi abbaſſarono, e cominciarono a diſſeccarſi nella faccia e per tutto. Quindi nel decimo inſorſe una nuova febbre, che rialzò le puſtule, e le riempiè di marcia, reſtandone alcune di ſanguigne e livide. Nell' undecimo tornarono nella faccia a diſſeccarſi; ſcorrendo a piccoli laghetti la bianca ſottil materia di ſotto alla cute. Nella ſera di queſto dì ſopravvenne un paroſſiſmo di febbre, per cui di queſta vita paſsò. Uſati in darno in tutto il decorſo del male i più appropriati rimedj diluenti e rinfreſcativi.

(a) Diſp. Pharm. R. Veget. cap. 7.

Istoria Seconda.

La Signora Conteſſa *Bianca G.....* vergine, di anni 21. il dì 4. di Settembre dell' anno 1779. fu preſa da acuta febbre con forti dolori negli arti inferiori, per cui le fu tratto ſangue; ed il giorno dopo fu purgata. Il terzo dì apparvero nella faccia alcuni ſegni, come di morbilli, i quali dimoſtrarono apertamente nel quarto un Vajuolo del genere de' *confluenti*. Sino all' ottavo ſtette il male ſul medeſimo piede: allora d'improvviſo, una nell'altra entrando, biancheggiarono le numeroſiſſime puſtule: molte veggendoſene di livide e ſanguigne. Si aperſero gli occhi da prima chiuſi, e cominciava la pelle a corrugarſi ed appaſſirſi: reſtando viva la febbre e moleſte le veglie. Nel nono giorno preſcriſſi una forte decozione di due once di ſcelta Chinachina, da prenderſi in due giorni, più volte al giorno. Quantunque nella ſera ſi aumentaſſe la febbre, dormì tranquillamente; e la mattina del decimo giorno era alquanto ſollevata. Ma con mio ſtupore la trovai enormemente enfiata nella teſta, e nel reſtante del corpo tutto, come ſe foſſe idropica; con gli occhi nuovamente chiuſi, con le puſtule rialzate, e con laghetti di materia ſcorrente ſotto la cute. Nell' undecimo ſeguitò a migliorare in tutto benchè duraſſe la febbre; e ſi manteneſſe gonfia la pelle. In queſto e ne' ſeguenti giorni preſe ſolamente due dramme di polvere di Chinachina; nel qual tempo ſi andò a poco a poco condenſando e diſſeccando la materia alla cute; caddero dal volto groſſiſſime ſcaglie, e poco dopo tutto il reſtante del corpo ſi mondò con intollerabil fetore, e con un moleſto prurito nel volto, dove furon trovati annidati ſotto alle croſte innumerevoli vermi. Non ſuccedè diarrea, non comparvero tumori, nè urine corrotte nella convaleſcenza; tantochè nei primi di Ottobre potè ſortire di caſa. Usò anche queſta nel decorſo del male rimedj diluenti e rinfreſcativi; e benchè queſta e quella cadeſſero inferme in diverſa ſtagione, era però nel tempo del loro male il caldo a un grado ſteſſo poco maggiore del temperato.

Queſti due caſi, quanto può eſſere morbo a morbo ſimile, erano fra di loro del tutto ſomiglianti, benchè di eſito felice l'uno, e l'altro fatale. Rappreſentavano una ſpecie ſteſſa di Vajuolo maligno e *confluente*, in una ſteſſa *Coſtituzion Epidemica*, in uno ſteſſo grado di calore, in perſone della ſteſſa età, ſeſſo e temperamento; e trattati furono amendue dal principio al progreſſo del male con metodo ſteſſo *antiflogiſtico*, anzi con la ſpecie ſteſſa di governo e medicamenti. Nel fine in ciò ſolo fu differente la cura, che in uno fu uſata la Chinachina, nell'altro non fu uſata. Il malo eſito del primo di queſti due caſi, ſucceduto nel tempo dell'infievolimento delle puſtule, già compiuta la ſuppurazione, ha fatto me ſollecito nel ſecondo del tutto ſimile, a cercare nella Chinachina un pronto ſoccorſo in queſto critico tempo pericoloſo, per cui la materia alla cute generata, o tutta o in parte almeno, foſſe impedita di rientrare a guaſtarne il ſangue e ad offendere le viſcere con la ſua venefica putridità. Quantunque io ſapeſſi che il gonfiamento del viſo e delle mani nel tempo della ſuppurazione del Vajuolo è un ottimo ſegno ſecondo la pratica, e ſecondo l'avviſo degli Scrittori; pure l'effetto della Chinachina immediatamente ſucceduto, di rigonfiare per la ſeconda volta il viſo e le mani ed il corpo tutto enormemente, tennemi per alquanto tempo dubbioſo e ſoſpeſo; ſinchè veggendo ceſſare con eſſo gli altri ſintomi minaccioſi del Vajuolo, ſenza che ſuccedeſſero nuove febbri, o diarrea, o urine marcioſe, o tumori e aſceſſi nelle parti, fui aſſicurato che l' effetto della Chinachina da me tentato corriſpoſe veramente alla mia aſpettazione; e che la materia ritenuta ſempre alla cute, e al di fuori addenſata e *concreta*, fu per la forza ſtringente della Chinachina impedita di rientrare.

Benchè nella volgare pratica di Medicina non ſia introdotto di uſare la Chinachina nel Vajuolo; non è però che da molti Autori non ſia approvato e raccomandato il ſuo uſo.

Riccardo Morton fu il primo a parlare della Chinachina nel Vajuolo. Se nel tempo della declinazione del Vajuolo, dic'egli, la febbre recidiva ſi ſveſte di malignità, e acquiſta periodi di eſacerbazione e remiſſione, per niun'arte meglio ſi cura, quanto coll'uſo della Chinachina. (*b*)

Il *Freind*, ſcrivendo ſull' uſo de' purgativi nella ſeconda febbre del Vajuolo, dice che alcuni Medici in quel tempo pretendevano di prevenir felicemente la ſteſſa febbre con l'uſo della Chinachina; di che egli però grandemente dubitava. (*c*)

Il *Frewin* riferiſce di un Vajuoloſo già mondato dalle croſte, e ancor febbricitante, cui la Chinachina non ſanò; ma guarì coi purgativi. (*d*)

(*b*) Op. tom. 3. cap. 10.
(*c*) De Purg. in ſec. Var. febr. p. 102.
(*d*) In *Freind*, de febr. com. 7.

Il *Bate* dice di aver uſata la Chinachina in una febbre ſecondaria del Vajuolo, ma inutilmente. *(e)*

Queſti quattro Scrittori fiorirono ſul finire del paſſato ſecolo, e nel cominciamento di queſto che corre. Onde errò *Morando Morandi* allorchè ſcriſſe, che il Sig. *Monrò* fu quello che eſteſe *la virtù della Chinachina ſopra il Vajuolo, e primo ne ha ſperimentato il buon eſito* *(f)*: mentre queſto Scrittore di queſto parlò poco prima del 1740. ne' *Saggi d' Edimburgo*, come ora vedremo.

Aleſſandro Monrò fu il primo ad uſare la Chinachina nel Vajuolo per altro fine, che per frenare la ſeconda febbre di eſſo. „ L' effetto della Chinachina, dic' egli, „ in procurare una dolce ſuppurazione, mi ha fatto penſare di poterla uſare ne' Vajuoli di cattivo carattere, tanto allorchè la ſuppurazione delle puſtule non „ dimoſtrava ſtabilirſi, com' è neceſſario; quanto allorchè compariſcono con minaccie di cancrena. Ho avuta la contentezza di vedere in molti malati di Vajuolo l' effetto della Chinachina riuſcire a ſeconda del „ mio propoſito. Le puſtule prima oppreſſe ſi ſono riempiute di materia; la ſania ſeroſa ſi è convertita in „ una marcia ſpeſſa e bianca, e le macchie purpuree „ hanno mutato colore, ſono divenute inſenſibilmente „ più pallide, e finalmente diſparvero. Diedi da principio la Chinachina in decozione, e poi in eſtratto: „ in ſeguito laſciai queſte deboli preparazioni per appigliarmi alla Chinachina polverizzata meſcolata con „ qualche ſiroppo cordiale, e con acqua deſtillata aromatica, e in queſta forma ne ordino dai dieci fino „ ai quaranta giorni, replicandola ogni quattro o cinque ore. Finora non ho data la Chinachina nel Vajuolo ſe non dopo l' eruzione delle puſtule, e ne ho

---

(e) In *Freind*, de Purg. ecc. p. 109.
(f) Della Cura del Vajuolo p. 21.

„ fatto continuare l'uſo ſino a tanto che furono intie-
„ ramente diſſeccate; ma ſono perſuaſo per gli effetti
„ che l'ho veduta produrre per mitigare i ſintomi del-
„ la febbre ſecondaria, che ſe ſi daſſe nel tempo dell'e-
„ ruzione, potrebbe contribuire a rendere il Vajuolo
„ di una ſpecie più ſavorevole. *(g)*

Il Dott. *Flemyng*, in un ſuo progetto, in cui s'impegna di far eſaminare e diſcutere da alcuni altri, tutto quello che i Medici proporranno per l'avanzamento della Medicina, e che ſtimeranno poter eſſer utile, propone di eſaminare gli effetti della Chinachina nel Vajuolo, e ne raccomanda l'uſo, che con ſuo piacere ha veduto praticare dal Sig. *Monrò*. *(h)*

Il Dott. *Wall* è l'unico che abbia ſcritto particolarmente ſu queſta materia, in una Memoria inſerita nelle Tranſazioni Filoſofiche d'Inghilterra *(i)*. Come il ſuo Opuſculo è rariſſimo, e ſcritto in idioma a pochi noto, non ſarà diſutile il dar qui di eſſo una idea alquanto più eſteſa e circoſtanziata. Le aſſerzioni del *Monrò* e le ſue promeſſe moſſero il Dott. *Wall* a far uſo della Chinachina nel Vajuolo, ed in ogni tempo di eſſo, a fine di ottenere una buona e lodevole ſuppurazione. Ma egli è paſſato avanti: e conſiderando gli uſi della Chinachina in altri mali, dove la craſi del ſangue trovaſi rotta e ſcompoſta, ſingolarmente nelle febbri petecchiali e porporate, accompagnate da emoragie ed altri terribili ſintomi, ſperò che doveſſe eſſere molto utile nel Vajuolo, bene ſpeſſo da tali circoſtanze peſſime accompagnato. Veggiam ora a parte a parte i ſucceſſi delle ſue prove in alcuni caſi da eſſo narrati.

Caſo Primo. Un Gentiluomo di anni 24. ſi ammala dopo un violento ballo. Se gli cava ſangue infiammato;

(g) Saggi di Edimb. tom. 5. art. 10.
(h) Saggi d'Edimb. tom. 7. art. 1.
(i) The philoſophical Tranſactions abridged, vol. the tenth. p. 1035.

ſi purga con manna, e beve un decotto nitrato. Vien chiamato il terzo giorno il Dott. *Wall*. Le puſtule erano numeroſiſſime con porpora, ſcorreva il ſangue dal ſeceſſo, ſputava bene, ed il polſo era frequente e debile: e gli dolevano i lombi. Preſcriſſe uno ſcrupolo di Chinachina ogni due o tre ore, e per bevanda ordinaria una tintura di roſe acidulata. In quarantaotto ore diſparve la porpora, ceſsò la emoragia; ſi ſollevò il polſo, e ſi ſe più raro, e le puſtule ſi alzarono. Sino al nono dopo l'eruzione tutto andò bene, in qual tempo ſeguitò ad uſare la Chinachina, e prendeva la ſera lo ſciloppo di Meconio. Dopo ſi ſe ſonnacchioſo, e morì nello ſteſſo giorno.

„ Benchè, ſoggiunge l'Autore, in queſto primo eſem-
„ pio ſia l'infermo miſeramente perito, ciò non oſtan-
„ te io ſon contento del buon effetto prodotto dalla
„ Chinachina.

Caſo ſecondo. Vien chiamato il Dott. *Wall* da un Giovane di anni dodici, da ſei giorni ammalato di Vajuolo. Queſto era del genere de' *confluenti* con bolle ſanguigne, con petecchie e porpora; e con un moleſto prurito nel naſo che minacciava emoragia. Per l'addietro avea delirato, e il ſuo polſo era debile e tremolante. Gli ordinò ogni tre ore uno ſcrupolo di eſtratto di Chinachina, ed una bevanda con olio di vitriolo e ſciloppo di ſambuco. Dopo aver preſe due dramme di Chinachina, diſparvero le petecchie e la porpora; ſicchè continuò dopo ſino al fine della malattia l'uſo della Chinachina. Crebbero le puſtule in grandezza a tal ſegno che ſembrava il Vajuolo del genere de' *diſcreti;* e la pelle molto ſi gonfiò per la quantità della marcia. Guarì felicemente l'infermo.

Caſo Terzo. Ad un Giovane di anni 21. dopo il ſecondo dì comparve un Vajuolo con ſpeſſa porpora, con violenta uſcita di ſangue dal naſo, e con atroce dolore di lombi. Fu medicato dal Dott. *Wall* con lo ſteſſo metodo, col quale medicò l'infermo in ſecondo luogo deſcritto; e guarì com'eſſo felicemente.

Caſo Quarto. Un Giovane d'anni 24. dopo un violento eſercizio ſu preſo da' ſintomi del Vajuolo: dolori di ventre e difficoltà di reſpiro. Il Dott. *Wall* chiamato nel terzo giorno, vide la ſua pelle coperta di porpora, ed avea un polſo piccolo e vibrante. Preſcriſſe un ſalaſſo dal braccio, ed ordinò l'eſtratto di Chinachina, con allume crudo, acqua di cannella, e ſciloppo di cotogni. Il dì dopo migliorò, facendoſi il polſo pieno e regolato, e levandoſi le puſtule del Vajuolo, e ſcomparendo la porpora. Succedè la diarrea con urine roſſiccie; onde laſciato l'allume, gli ordinò la terra Giaponica coll'eſtratto di Chinachina e ſciloppo di Meconio la ſera: continuando i quali rimedj guarì preſtamente.

Caſo Quinto. Un Giovane di anni 21, preſo dal Vajuolo era ridotto nel ſeſto giorno ad un peſſimo ſtato, avendo numeroſe petecchie, e una gamba intaccata di cangrena. In queſto giorno fu chiamato il Dott. *Wall*, e gli ordinò mezz'oncia di eſtratto di Chinachina con due ſcrupoli di allume crudo. Il dì dopo ſcomparvero le petecchie: ſi fermò, e ſeparò la cangrena; e continuando lo ſteſſo metodo di cura con null'altro guarì perſettamente.

Caſo Seſto. Una ſorella di queſto Giovine, di anni 19. fu attaccata dal Vajuolo *confluente* con petecchie e porpora, con emoragia uterina, dolor de' lombi, ed eſtrema debilità. Preſe la Chinachina coll'allume in tutto il decorſo del male, con lo ſteſſo metodo; e ſenz'altro guarì.

„ Uno però dei più rimarcabili eſempj, ſegue l'Au-
„ tore, di quanti mi occorſero, dimoſtrativi della effi-
„ cacia della Chinachina in queſta terribile malattia,
„ ed in tutto il tempo della ſteſſa, ſi è il ſeguente:

Caſo ſettimo. Una Fanteſca preſa da' ſintomi del Vajuolo, fu ſalaſſata. Due giorni dopo l'eruzione chiamato il Dott. *Wall*, trovò le puſtule numeroſiſſime, piccole e rognoſe; con porpora frammeſſa. Gli occhi eran lagrimoſi, con un aſpetto di viſo triſte ed affannato (ſintomo non badato da' Medici, ma pur terribile e pauroſo ne' morbi acuti). Avea mal di gola, delirio, diarrea, emoragia uterina, con un polſo frequente e riſtretto, coſicchè parea vicina a ſpirare. Le fece prendere Chinachina con allume, quanta più ne poteva inghiottire. Dopo dodeci ore inghiottiva più liberamente, e preſe in un giorno mezz'oncia di eſtratto di Chinachina con due ſcrupoli di allume crudo. Continuò a prender la Chinachina ſenza allume per altri tre o quattro giorni: in quel tempo ſcomparvero la porpora e la emoragia, ſi alzarono le puſtule e ſputò aſſaiſſimo. Tutto andò bene ſino al ſediceſimo dopo l'eruzione. Allora ſotto falſi preteſti ingannando la cuſtode, annojata traſcurò di più oltre medicarſi. Fu portentoſo il danno ſeguito da queſta traſcuranza. Il ſuo polſo ſi fe frequente e debile, gli umori acquiſtarono un ſommo grado di corruzione, d'onde ella morì tutta sfracellata nel vigeſimo giorno del male.

„ Da queſti pochi eſempj, conchiude l'Autore, e da „ altri molti che io potrei addurre, ſi poſſono cono- „ ſcere i ſorprendenti effetti della Chinachina nel Va- „ juolo. L'ho preſcritta a molte perſone nei primi „ giorni del male, quando prima del Vajuolo erano da- „ te fuori le petecchie; ed in altre nel tempo primo „ della ſuppurazione, quando la materia era ancor cru- „ da ed acquoſa, e poſſo dire con verità, quaſi ſem- „ pre con buon ſucceſſo. Ora io ſon ſolito a continu- „ are l'uſo per tutto il tempo della malattia, ſinchè „ è ben netta dalle ſcaglie la pelle. In queſto ultimo „ tempo occorrendo nettare le prime ſtrade, frammez- „ zo ai purganti ordino io la Chinachina, ſinchè tro- „ vo che le fibre ſono ſpoſſate, e gli umori tenui ed

,, acrimonioſi. Venendo io chiamato a viſitare infermi con petecchie, porpora, miliare, emoragia, o che trovi in eſſi la craſi del ſangue diſtemperata, o che ſiano in pericolo di vita, immediatamente loro preſcrivo la Chinachina. Non bado che il polſo ſia pieno, credendola neceſſaria tanto nel polſo vigoroſo, che nel debile; per eſſere coſa evidente che in queſti caſi le fibre ſono rilaſſate, e gli umori tiranti ad una putrida acrimonia. In molti di quelli, a' quali io ho ordinata la Chinachina, ho trovato più pronta del ſolito la maturazione delle puſtule, e tutto il corſo del male di molto abbreviato; ch'è una particolarità molto oſſervabile. Io d'ordinario uſo l'eſtratto della Chinachina (compoſto con la bollitura della ſteſſa e qualche ſale alcalino inſieme) e queſto lo ſtimo da preferirſi alla Chinachina in ſoſtanza; perciocchè ſenza diminuire di forza ſi ha in eſſo il vantaggio di aggravar meno lo ſtomaco degl' infermi. Ne' bambini, e nelle dilicate perſone che ſi potrebbono offendere dal ſapore di queſto rimedio, ſi può loro porgere dentro il cioccolatte; che ſe è compoſto con molto zucchero ſerve più d'ogni altra coſa a confondere l'amarezza della Chinachina.

Il Dott. *Huxham* loda la Chinachina come rimedio di preparazione nel primo ingreſſo del Vajuolo; ma ſolo dove debili ſono le fibre, e dov'è tenue ed acquoſa la coſtituzion degli umori. Più volentieri la preſcrive nella declinazion del Vajuolo in certe ſpecie di eſſo. ,, Io uſo, dic'egli, d'ordinario la tintura di Chinachina aleſſifarmaca, reſa acida coll'eliſire di vitriolo, e poi paſſo alla decozione di eſſa, ovvero al ſuo eſtratto. Siami però lecito di avvertire che per neſſun modo ſi preſcriva dove il reſpiro è affannato: e dove il il ventre è ſtitico ed oſtrutto, ſinchè queſti ſintomi non ſiano levati. Credaſi pure che la tintura di Chinachina aleſſifarmaca nel Vajuolo, ſpecialmente lin-

„ fatico, è utiliſſima, purchè ſi dia dopo l' intiera comparſa delle puſtule, a facilitare la maturazione di eſſe: „ com' è pur certo che queſto rimedio procura una lodevole ſuppurazione nelle ulcere di cattivo carattere. (k)

Il Dott. *Mead* loda la Chinachina in una certa ſpecie di Vajuolo, da lui detto *ſanguigno*, all' effetto d' ingroſſare il ſangue, affinchè non poſſa ſcappare da' minimi vaſellini. Così la loda dove la terzana doppia o ſemplice al Vajuolo ſi aggiunge, ricordando che non nuoce eſſa alla maturazion delle puſtule: a cui anzi giova frenando i movimenti febbrili, che la diſturbano. (l)

Il *Roncalli* accorda che ſul finir del Vajuolo la Chinachina poſſa adoperarſi, ma la crede dannoſa nel principio: rimprovera però l' *Elvezio* perchè l' abbia al principio preſcritta nella ſua polvere febbrifuga. Ma l' *Elvezio* non è da numerare fra gli Autori che ricordano l' uſo della Chinachina nel Vajuolo, mentre nella ſua polvere febbrifuga non ha verun luogo queſto medicamento, come crede il *Roncalli*. (m)

Morando Morandi ha ſtampato un libro con lo ſpezioſo titolo: *Della Cura del Vajuolo con la Chinachina e col bagno tiepido*. Poche parole però in tutto il decorſo del libro ſi leggono in propoſito dell' uſo della Chinachina nel Vajuolo. Dic' egli che in una epidemia dell' anno 1737, ed in una dopo del 1741, non ſtette egli guari tempo a conſigliar tutti gli amici, e fino le più abbiette cencioſe madri, che ai loro figliuoli faceſſero giornalmente ingojare uno ſcrupolo di Chinachina entro un po' d' acqua o di vino; ed a quei bambini che nol volevano s' ingegnaſſero di porre un giorno sì e l' altro no un criſteo fatto coll' infuſione della Chinachina al peſo di una dramma bollita nell' acqua pura, e ne continuaſſero giuſta la biſogna il buon uſo. Con che ſoggiunge, e con la cavata anche più volte reiterata di ſangue, e col bagno tiepido, e con eſattiſſima dieta, e con bere ſoventi fiate del latte bollito con entro un po' di zucchero, nel decimo o undecimo giorno, e ben rade volte più tardi, gli venne ſempre veduto cader riſeccate ſenza ſmania d'alcun prurito le croſte de' flemmoni, e nel decimo quarto dì ſenza butteri nel viſo tutti pur anche gli ammalati perfettamente guarire. Paſſando poi il dotto Autore a render ragione de' vantaggi che ſi riportano dalla Chinachina nel Vajuolo così diſcorre. „Nel Vajuolo dal principio acre-ſtimolante „ infiammatorio non tentaſi che d'accoppiar ſoluzioni, „ le quali diminuiſcono il numero de' globetti pian-„ ovali ſventandoli, e poſcia vanno a depoſitarſi tutte „ per mezzo di flemmoni alla pelle. Comechè però „ l'eſſenza di tali depoſiti è in ragione della qualità, „ e della quantità de' globetti ſteſſi, così egli è meſtie-„ ri o mantenerli, o reclutarli. A ciò ottenere non „ avvi rimedio migliore della Chinachina, come ama-„ ricante-ſtiptico, perchè con queſta, al dire del *Boe-„ rhaave* nel ſuo Trattato della forza de' Medicamen-„ ti, ridonaſi la perduta elaſticità ai vaſi, s'accreſco-„ no le velocità ai fluidi, e quindi quel natural calo-„ re, che da' globetti pian-ovali vuolſi tutto dipen-„ dere, e perchè ſecondo l'oſſervazione d'*Ecquet* nella „ ſua Patologia, s'aggiunge momento agli ſteſſi, e ſe „ ne aumenta il numero. (*n*)

(k) Diſſert. de Variol.
(l) De Var. & Morb. cap. 3. & 4.
(m) Europ. Medic. p. 58.

Il *Lieutaud* dice che ove nel Vajuolo ſuccede una febbre doppia terzana, o altra intermittente, biſogna ricorrere alla Chinachina; della cui virtù in ſimiglianti caſi da replicati ſperimenti ſiam fatti baſtantemente ſicuri. (*o*)

(*n*) Della Cura del Vajuolo p. 72.

(*o*) Prax. Med. part. 2. ſect. 4.

Il *Vanſwieten* parla bensì della Chinachina nel Vajuolo; ma non adduce eſperienze proprie nè ragioni: e ſol riportaſi ad altri Autori. (*p*)

Nel Giornale Medico Franceſe vien lodata la Chinachina nel Vajuolo di una maligna natura. (*q*)

Boiſſer de Sauvages dice che ſe dopo l'efficcazion delle puſtule reſti una febbre remittente, ſi debba uſare la Chinachina. (*r*)

Il de *Haen* racconta di una Fanciulla, che avea un Vajuolo *confluente* e maligno, cui fu data la Chinachina nell' undecimo giorno, e morì. Poi parla di un'altra che avea una ſuppurazione al petto, diſſenteria, ſcarlatina, miliare e Vajuolo inſieme, alla quale ha data la Chinachina due giorni dopo la comparſa del Vajuolo, e morì nel quinto. Nel primo di queſti due caſi, ſoggiunge l'Autore, mitigò la Chinachina il male, ma non giunſe a conſervare la vita: forſe per eſſere ſtata troppo tardi preſcritta. Nel ſecondo caſo preſcritta più per tempo, prolungò per poco la vita, che ſtava per eſtinguerſi, moderò i ſintomi del male, e le reſtituì tranquillità e forze. Segue un terzo caſo di una Donna maritata aſſalita dalla febbre, contro cui fu preſcritta la Chinachina: ſotto l'uſo della quale diede fuori un Vajuolo, che fu benigno e *diſcreto* e finì in bene. Dal qual caſo, ad opinione dell' Autore, due coſe s' imparano: la prima, che la febbre contagioſa del Vajuolo può eſſere del genere delle intermittenti. La ſeconda, che la Chinachina preſa nel più feroce corſo contagioſo di Vajuolo con ottimo ſucceſſo produſſe un Vajuolo di benigniſſima indole. (*ſ*)

Il *Torraca* narra di un fantolino preſo da un Vajuo-

(*p*) In Boerh. aph. 1402.

(*q*) V. *Sauvages*. Noſol. tom. 1. p. 226.

(*r*) Noſol. tom. 1. p. 224.

(*ſ*) Rat. Med. part. 2. cap. 6.

lo *confluente*, degenerato in una univerſale cangrena, brevemente e felicemente con ſuo ſtupore da lui curato con la Chinachina. (*t*)

Lo *Storchio* varie maniere di medicamenti preſcrive nel Vajuolo, ne' quali entra la Chinachina, non tanto per ovviare alla febbre, quanto per ravvivare le forze dell' ammalato, per fare oſtacolo alla putrefazion degli umori, e alla loro diſſoluzione: in que' caſi principalmente dove le puſtule ſi mantengono poco elevate, dove il colore di eſſe è roſſoſcuro, e fra eſſe la pelle è floſcia o livida, dove ſe pur elevate ſono hanno baſſa e piana la ſommità, o ben anche l' hanno livida o nera, dove puſtule ſi frammiſchiano livide e nere, dove l' urina puzza oltre l' uſato, o è torbida per miſto ſangue diſciolto, e neraſtra. (*u*)

Il *Tiſſotti* dice in un luogo d' aver provata inutile la Chinachina uſata come rimedio preſervativo nell' Ineſto del Vajuolo, anzi dannoſa. (*x*)

Ma altrove, nelle Lettere, così ne parla. „ Altri „ inſinuano la Chinachina, quale non vorrei che nel „ Vajuolo foſſe defraudata dalle ſue lodi: ma confeſſo „ che nella ſecondaria più grave dopo eſſer anteceduto „ un vero morbo infiammatorio, non ancora l' ho „ uſata, perchè giammai ho veduto poterſi ſicuramente „ te propinare. E nell' urinare cruento vorrei che ſi u- „ ſaſſe con cautela. Al certo ſembra non corriſpondere „ a tutte le indicazioni della febbre ſecondaria, e „ ad alcune è manifeſtamente contraria. Ma giova molto „ ſiccome nelle febbri maligne, così in quel maligno „ Vajuolo, il quale moſtri le fibre laſſe, un ſangue „ diſciolto e putrido, ed una ſomma debolezza,

---

(*t*) Specim. Experim. art. 5.

(*u*) Mediciniſch-practiſcher Unterricht, erſter Theil, von den Pochen, oder Blattern. Seite 267.

(*x*) Dell' Ineſto prat. del Vajuol. cap. 1.

,, e continuamente minaccia cangrena per il ſangue vap-
,, pido e putredinoſo. Allora in tutto il decorſo della
,, malattia preſa ogni giorno alla doſe di tre, quattro
,, o cinque dramme ſelicemente il morbo cura. In un
,, ragazzo di dodici anni dopo una crudeliſſima ma-
,, lattia, eſſendoſene caduta una parte della maſcella in-
,, feriore, egregiamente terminava la cura, propinata
,, a frequenti e minime doſi; e nel tempo medeſimo
,, in luogo di alimento prendendo il latte di vacca, ed
,, a cucchiajate. Giova eziandio contro quella febbre
,, lenta, la quale rimane alle volte dopo qualche Va-
,, juolo, o graviſſimo, o malamente curato, o mali-
,, gno; e così allontana la tabe. In fine ſi preſcrive
,, con grandiſſimo utile, ſe ſiccome ho veduto al Va-
,, juolo vi ſi aggiunge la febbre intermittente: in tutti
,, gli altri caſi, purchè ne apporti qualche poca, è
,, ſempre di minor utilità. (*y*)

L' *Anonimo* Franceſe nel Dizionario Compendioſo di Sanità ricorda: che quando i bottoni cominciano a biancheggiare, ſopraggiunge una ſpezie di febbretta, che ſi chiama ſecondaria. Si uſi allora una decozione di Chinachina. La Chinachina ſi è propriiſſima per promovere la ſuppurazione, e per conſeguenza per maturare le puſtule. (*z*)

Il *Sografi*, parlando del modo di operare della Chinachina in certe malattie paſſa a dire: ,, Non poſſia-
,, mo dubitare, che la Chinachina nel ſiſtema de' lin-
,, fatici con particolare virtù non diffonda i ſuoi prin-
,, cipj ſalubri. E quindi ci ſembra dover intenderſi,
,, perchè nelle febbri peſtilenziali, e maligne, nel Va-
,, juolo, ſiccome porta la ſperienza del *Morton*, l'uſo
,, della

(*y*) Della Cura del Vajuolo. num. 67.
(*z*) Verb. *Vajuolo*.

„ della Chinachina ſia giovevole : eſſendo quelle malattie dipendenti dal diſordinato moto della linfa, e „ dalla viziata qualità di eſſa, ed eſſendo quel rimedio con particolare qualità atto a diffondere per lo „ ſteſſo ſiſtema de' vaſi le forze ſue. (*a*)

Queſti ſono i nomi degli Autori, i paſſi e i luoghi nelle lor opere, i quali mi è riuſcito di trovare e raccogliere nel propoſito della Chinachina nel Vajuolo. Vedeſi qui in un colpo d'occhio uſata la Chinachina prima d'inneſtare il Vajuolo, per farlo naſcere di una benigna indole. Vedeſi uſata a moderare le prime febbri, acciocchè queſte non impediſcano o ritardino la comparſa delle puſtule alla pelle. Vedeſi uſata, comparſe le puſtule, per ſollevarle ſe foſſero troppo baſſe e piccole. Vedeſi uſata per farle preſto paſſare ad una buona e lodevole ſuppurazione. Vedeſi uſata a fare che le croſte preſto cadano, e laſcino minori difformità nel viſo. Ad altri fini ancora ſi vede uſata nel tempo del Vajuolo: a togliere cioè e far ſcomparire le macchie di porpora o le petecchie che s'intrometteſſero alle puſtule; a riunire i globetti del ſangue rotti e ſtemperati dal fervore del morbo infiammatorio; a correggere non ſo quali diſordini nel moto e qualità delle linfe; a rinvigorire le fibre debili e laſſe, a dar corporatura agli umori rotti e diſciolti; a togliere ed impedire la cangrena delle puſtule e delle membra; a togliere in fine o moderare le ſuccedanee febbri o periodiche, o infiammatorie o lente. Vedeſi così adoperata nel principio, aumento, ſtato, e declinazione del Vajuolo; e ben anche nel tempo ad eſſo precedente, e ſuſſeguente: facendo fare ad un rimedio ſolo e ſempliciſſimo le varie e nobili figure di *profilattico*, d'*antiflogiſtico*, di *aleſſi-*

(*a*) Differt. ſopra il Queſito : *Se nel caſo* ecc. num. 27.

farmaco, d' *incraſſante*, di *cardiaco*, di *ſuppurativo*, d' *antiſettico*, di *correttivo*, d' *anticangrenoſo*, d' *antifebbrile*, di *coſmetico*; in un male ſolo e ſempliciſſimo, qual è il Vajuolo.

Io non ſon qui per fare encomio, o critica a veruno di queſti uſi; laſciando la coſa come ſta; e a chiunque libero l' appigliarſi a quella pratica de' nominati Scrittori, a cui più piace appigliarſi. Quel ch' io dico ſi è che io per niuna autorità di Scrittore, nè da perſuaſione di veruna loro opinione moſſo, ſon paſſato ad uſare la Chinachina nel Vajuolo; ma per un fine del tutto nuovo, da veruno di eſſi non preveduto: il quale, ho coraggio di aggiungere, ſi è inſieme il più deſiderabile e utile, ed il più naturale inſieme, e meno ricercato e dubbioſo.

Queſto è di oſtare con la forza ſtitica e coſtrettiva della Chinachina al riconcentramento della materia Vajuoloſa, compiuta la ſuppurazione.

Che una forza ſtitica e coſtrettiva nella Chinachina ſi trovi, non è da metterſi in dubbio; appaleſandoſi queſta al palato, ed all' occhio, nel reſtringere che fa e raſſodare le carni e pelli degli animali. Che con queſta ſua facoltà principalmente operi nel corpo noſtro i portentoſi effetti che ſi vede in varj morbi operare, lo affermano concordemente i Pratici più eſperimentati. Alle autorità dell' *Ettmullero*, del *Baldinger*, del *Carteuſer*, altrove addotte (*b*), baſterà qui aggiungere quella dell' *Offmanno*: *Eſt vero inter hujus corticis elementa primo loco connumerandum adſtrictivum* (*c*). *Notiſſimum autem, corticem Chinæ vel ipſo ſapore teſte plurimas cuſtodire terreas, fixas, cum ſubtili acido nuptas partes, unde ſaporis etiam & virtutis adſtringentis eſt* (*d*). Non

---

(*b*) Diſſert. noſtra ſopra il Queſito: *Se nel caſo* ecc. p. 8. e 12.

(*c*) Diſſert. Select. decad. 2. Diſſert. 4.

(*d*) Obſ. Pract. ſup. tom. 10. p. 238.

vale opporre , che ſe gli ſtupendi effetti che in certi morbi produce la Chinachina proveniſſero dalla ſua facoltà coſtringente, gli ſteſſi effetti e migliori vedremmo ſeguire all' uſo di altri molti noſtrali rimedj, ſpecialmente nelle febbri periodiche e intermittenti ; i quali ſenza dubbio ſono più forti ſtitici e coſtrettivi di eſſa : quel che però in pratica non ſi oſſerva avvenire. Perciocchè, come ſi eſprime il *Redi* (*e*), in Medicina non vale la regola del tre , perchè ſe quattro giova , otto può nuocere. Una moderata forza ſtitica può eſſere talvolta più giovevole che una eccedente ; o perchè più tardi e dentro ſi ſpieghi nelle vene, o perchè non chiuda a sè ſteſſa l' adito di penetrare. Quanto alle febbri poi, che gli ſtitici non giovino come la Chinachina a fermarle; queſto è aſſolutamente falſo, paſſando eſſi pure per febbrifugi , e valendo qualche volta a fermare una febbre, contro cui la Chinachina non valſe. Sentiamo ancora l' *Offmanno*: *Confirmatur hæc ſententia vel ex eo quod alia ſtyptica adſtringentia ex fixa terra & acido compoſita ſimili fere virtute cum cortice Chinæ in debellandis febribus , vel earum paroxiſmis ſuſpendendis ſplendeant, ſicuti id notum eſt de radice pentaphylli, plantaginis, cortice fraxini, viſco quercino , radice & extracto tormentillæ, alumine, liquore martis ſtyptico, tinctura martis Haſſiaca, & hujus generis ſimilia.* (*f*)

Quanto al Vajuolo poi , univerſalmente parlando ſi oſſerva che il tempo di eſſo il più pericoloſo e fatale ſi è quando, compiuta la ſuppurazione, comincian le puſtule a reſtringerſi ed appaſſirſi : quel che avvien d' ordinario fra il ſeſto e l' ottavo giorno, da che ſono alla cute comparſe . Queſto pericolo v' è dunque ragion

---

(*e*) Lett. tom. 4.

(*f*) Obſ. Pract. ſup. tom. 10. p. 238.

di credere che proceda dal riconcentramento della materia delle puſtule : per cui ſi facciano mortali decubiti nelle viſcere, o le cavità s' inondino, o ſi corrompano gli umori, o s' intacchino le parti ferme e l' oſſa. Or in queſto più pericoloſo e fatal tempo del Vajuolo, qual ſarà il più indicato e valevol rimedio, ſe non cercar d' impedire al poſſibile, ed il più preſto che ſi poſſa, il concentramento della materia vajuoloſa? E qual medicamento a ciò può eſſere più pronto e più efficace di uno ſtitico temperato, confacente ad ogni età e temperatura di uomo, tenace della propria indole; che poſſa quindi penetrar nelle vene, e chiudere gli oſculi e i vaſellini d' onde la peſſima materia può ritrocedere dalla cute, e dentro intruderſi, o venir aſſorbita? Queſto deſiderato rimedio e celeſte medicamento ſi è appunto la Chinachina.

Io ſo che qualche Autore ha avuto l' ardimento di negare aſſolutamente queſta ritroceſſione della materia del Vajuolo. *Quando circumferentia, ſive margo palleſcere incipit*, ſcrive il *Violante*, *malum portendit, materia enim quæ ad puſtulas afferri debuerat, ob craſſitiem inertiamque, minime in ipſas importatur (tunc variolas retrocedere aniculæ & indocti clamant, quaſi materia a peripheria ad centrum recedat) eo magis ſi puſtularum elevatio, quando margines jam palleſcunt, parum deprimatur: Sed evolat ac continuo detrahitur aliquid a puſtulis; quibus cum nihil impoſterum addatur, depreſſæ apparent.* (g) Queſta ritroceſſione però, o per meglio dire queſta intruſione della materia vajuoloſa, (giacchè non è probabile che ſian piene le puſtule di ſola materia ad eſſe dal ſangue tramandata, come vuole il *Violante*, ma che più ſian piene di materia ivi alla cute generata, di che dan ſegno l' infiammazion previa, e le ſuſſeguenti cavità che reſtan nella cute) non è frivola credenza e volgare pregiudicata opinione ; ma oltrechè è pienamente dimoſtrata poſſibile dall' ordinario riconcentramento e paleſe della materia di altri tumori alla cute ſuppurati , che ſpeſſo eſce per urina , o altrove traſportaſi , è ben anche creduta ed affermata da quaſi tutti i Pratici più aſſennati e ſperimentati . Che propriamente non trattaſi qui di una materia delle puſtule craſſamentoſa ed inerte , qual ſuppone il *Violante*, ma di eſſa reſa ſottile per la putredine, o della parte ſottile e ſieroſa di eſſa; che quantunque tale può eſſer dotata di ſomma acrimonia e veleноſità. Trattaſi in corto dire di quella ſteſſa materia che il *Violante* vuole che sfumi e ſvapori dalle puſtule quando ſi appaſſiſcono , e non vien loro altra materia dal ſangue tramandata. Che ſe, per opinione di queſto Autore, dalla cuticola trapela e sfuma eſſa materia, la qual cuticola dagli Anatomici è conſiderata , quaſi come un callo della cute , ferma e dura; come non potrà penetrare all' interno in ſito molle e poroſo, e in canaletti per la ſuppurazione aperti e logori ? Che ſe l' impeto degl' interni umori che girano s' oppone; l' aria eſterna , e la naturale elaſticità e contrattilità delle fibre favoriſcono alla intromiſſione delle materie che ſono alla pelle : altrimenti in iſtato di miglior ſanità i fluidi ſi diſperderebbono in pochi momenti sfumati e ſgorgati dovunque dalla ſuperficie del corpo.

(g) De Variol. & Morb. num. 92.

Ma laſciamo da parte queſte teorie per quanto evidenti ſempre però in Medicina periglioſe e ſoſpette, e procedendo nel noſtro intrapreſo diſcorſo , paſſiamo a contemplare , e cogli occhi proprj vedere gl' immediati e paleſi effetti che ſon ſeguiti alla Chinachina da noi nel propoſto caſo adoperata. L' effetto ſuo più viſibile e ſingolare fu quello di gonfiare la ſeconda volta le palpebre e chiudere gli occhi , di rigonfiare tutta la faccia e le mani, e l' altra ſuperficie del corpo, con rialzare e riempiere di nuova materia le puſtule che già cominciavano ad appaſſirſi. Queſto effetto fu tanto rilevante e coſpicuo che mi tenne ſoſpeſo e dubbioſo del ſuo eſito, benchè corriſpondeſſe chiaramente alle mie intenzioni, e benchè ſapeſſi di certo che il gonfiamento della pelle è da riporſi nel Vajuolo fra i ſegni di un ottimo fine, e benchè in fatti ſin d' allora ſcorgeſſi un ſenſibile miglioramento nell' inferma in tutti gli altri ſintomi e circoſtanze del male: viva ſolo rimanendo la febbre, per nulla ceduta al febbrifugo. A queſto così oſſervabile gonfiamento non ſeguì toſto ſecondo il conſueto un preſto appaſſimento, ma ſuſſiſtè per varj giorni, ſinchè a poco a poco ſcemò con rimanere tutta la materia dentro alle puſtule raccolta e condenſata, e la pelle tutta, maſſimamente del volto, bruttamente incroſtata; ſenza rimanerne però contraffatta la faccia, ma ſol difformata la pelle da un buttero ſpeſſo ed eguale. Fu quindi in breviſſimo tempo ſalva l'inferma, ſenzachè una minima porzione di materia ſi moſtraſſe ritroceſſa o dal ſortire per urina, o per ſeceſſo, o per decubiti d'interni aſceſſi, o altri tumori.

Queſto effetto di gonfiare la pelle è ſenza dubbio da attribuirſi alla Chinachina, perchè altro rimedio non fu in tal tempo uſato, e perchè ſucceſſe in un tempo in cui il natural corſo del Vajuolo portava anzi al contrario a far appaſſire le puſtule dopo il gonfiamento primiero. Queſto ſteſſo effetto oſſervato fu dal *Morton* (*h*), dal *Monrò* (*i*), e dal *Wall* (*k*), e per ventura da eſſi notato e ſcritto, benchè ad altro fine, ed uſo dal noſtro diverſo, abbian eſſi la Chinachina nel Vajuolo preſcritta. E credo io bene che altri pure l'avrebbon veduto e notato, ſe aveſſero a queſto badato, e ſe in

---

(*h*) De Feb. infl. cap. 6. hiſt. 23.

(*i*) Saggi d'Edimb. tom. 5. art. 10.

(*k*) The philoſophical Tranſactions Abridged, vol. The tenth. p. 1035.

tempo opportuno aveſſero la Chinachina praticata, e in doſi ſufficienti a queſto fine. Or per qual altro mezzo può la Chinachina quell' effetto operare, ſe non per quello ſteſſo da me cercato nell' uſarla; con fermare cioè e ſtringere le interne parti, perchè la materia nemica ſia coſtretta a reſtarſene alla cute, e venga impedita di riconcentrarſi? Le puſtule oltre l' uſato tempo ſempre piene e diſteſe, la denſità e ſpeſſezza delle croſte ſuſſeguite, con il preſto riaverſi dell' inferma in perfetta e ſtabil ſalute, ſenzachè deſſero le materie ſegno di eſſere in veruna porzione rientrate dalla loro comparſa per urine, per ſeceſſo, per decubiti o tumori, ſon tutte coſe che moſtrano evidentemente come nel caſo da noi narrato da principio e propoſto abbia veramente la Chinachina, con iſtringere le interne parti, impedito il riconcentramento della materia vajuoloſa, ſempre pieno di timore e pericolo, in ogni ſpecie e natura di Vajuolo: e con ciò fare abbia dato al male un eſito felice. Non ſi niega che uſata la Chinachina ſul finir del Vajuolo come rimedio antiſettico ed antifebbrile non poſſa buoni e lodevoli effetti produrre; ma nel caſo noſtro evidentemente appare che non per queſti effetti giovò: mentre anzi per l' una parte la materia per virtù della Chinachina alla cute ritenuta corrompendoſi tanto fetore menò, che accorſer le moſche a deporvi dentro i vermetti, o le uova d' onde queſti provennero; e per l' altra parte la febbre viva allor preſente non ſentì punto la forza della Chinachina, ma perſeverò coſtante per alquanti giorni dappoi.

A queſto noſtro nuovo metodo di uſare la Chinachina ſul declinare del Vajuolo come rimedio ſtitico e corroborante due oppoſizioni ſembrano contraſtare, le quali potrebbono ritirare i Pratici dall' abbracciarlo. L' una ſi è che molti antichi e moderni accreditati Scrittori lodano come utiliſſimo nel Vajuolo l' uſo del bagno, ch' è rimedio ammolliente e rilaſſativo, del tutto contrario ad una forza ſtitica e coſtrettiva che ſi eſalta. L' altra ſi è che appunto ſul finir del Vajuolo dove noi proponiamo un rimedio ſtitico, molti accreditati Scrittori dietro gl' inſegnamenti del *Freind* propongono al contrario i purgativi che un oppoſto effetto producono.

A queſte oppoſizioni in apparenza sì formidabili facilmente riſpondeſi con far oſſervare che queſte pratiche lodate dagli Autori in nulla ſi oppongono al noſtro metodo, che anzi lo ſecondano e confermano. L' intenzion noſtra è quella unicamente di fare che la materia del Vajuolo non entri a contaminare il ſangue. L' uſo del bagno a queſto ſteſſo fine direttamente conduce: la Chinachina con iſtringere le parti interne affinchè la materia non entri: il bagno con ammollire e dilatare la ſuperficie del corpo, affinchè reſti alla cute la materia e non ſi concentri. L' uſo de' purgativi è diretto a nettare il ſangue dalla materia riconcentrata: l' uſo della Chinachina a preſervare il ſangue da eſſa materia onde non ne reſti infettato. Tanto però è più pregevole e deſiderabile l' effetto della Chinachina ſopra quello de' purgativi, quanto è meglio chiuder la caſa affinchè il ladro non entri, che aſpettare a diſcacciarnelo, entrato che ſia.

Bensì opponeſi il noſtro metodo, e ſalutarmente ſi oppone alla temeraria pratica di alcuni Medicanti, che non temono di replicare il ſalaſſo anche ſul declinar del Vajuolo, perchè con eſſo ſi dà adito e luogo alla triſta materia alla cute generata di entrare nel ſangue, con grave pericolo che non tutta nè sì prontamente fuor n' eſca. Il *Diemerbroechio* fra gli altri ha oſſervate le peſſime conſeguenze di queſta pratica, e l' ha riprovata e condannata. (*l*)

Qualora

(*l*) De Variol. & Morb. cap. 8.

Qualora però ſiaſi perſuaſo di uſare la Chinachina per queſto effetto d' impedire alla materia del Vajuolo di riconcentrarſi formata che ſia, non è da preſcriverſi alla cieca in ogni tempo di Vajuolo: ma importa aſſaiſſimo incontrare il vero punto di uſarla. Queſto felice punto propizio non è fiſſo ſempre ad un giorno: ma ſiccome il Vajuolo varia nel ſuo corſo or più breve or più lungo; or più preſto, or più tardi conviene metterla in pratica. Generalmente parlando nel Vajuolo benigno e regolare il ſettimo giorno dal ſuo cominciamento metton materia le puſtule, ed all' undecimo cominciano ad appaſſire. Verſo il nono però ſta il colmo della ſuppurazione: e queſto appunto è il tempo opportuno di uſare la Chinachina. Nel Vajuolo confluente e maligno ſi trova della irregolarità nel ſuo corſo; e quantunque in sè ſteſſo ſia più precipitoſo e celere, pur le puſtule comparſe più tardano a metter materia. E queſta meſſa che ſia, celermente creſce e ſi matura. In queſta ſpecie però di Vajuolo ſarà meglio badare alla prima maturazion delle puſtule, ſpecialmente del corpo, per non tardare più oltre a preſcrivere la Chinachina: mentre le puſtule del volto ſi trovano poco oſſervabili, egualmente diſtendendo la pelle, l' una in l' altra accoppiate e confuſe.

Ma per errare il meno che ſia poſſibile in coſa di tanta importanza, ſarà ſempre meglio nel computo de' giorni del Vajuolo dell' una e dell' altra ſpecie cominciare a numerare dalla prima comparſa delle puſtule, e non dal primo apparir della febbre, che ad eſſe precede. Stantechè or nel ſecondo, or nel terzo, or nel quarto, e più tardi ancora, e talvolta dopo qualche giorno d' intermiſſione, danno fuori le puſtule. E perchè ancora abbracciando la noſtra medicina anche il Vajuolo più benigno e ſicuro, in queſta ſpecie maſſimamente il tempo antecedente alle puſtule è così poco morboſo ed oſſervabile, che sfugge al ſenſo de' fantolini, ed alla viſta degli aſtanti. Laſciando dunque da parte queſto tempo previo alla comparſa delle puſtule, come poco rimarcabile , e come troppo vario nella ſua durabilità, computeremo al noſtro uopo il ſolo tempo della preſenza delle puſtule ; e diremo che circa il ſettimo giorno ſta il tempo opportuno di cominciare a metter in pratica la Chinachina nel Vajuolo , all' effetto deſiderabiliſſimo di chiuder la via alla ſua materia di riconcentrarſi.

L' anticipar queſto tempo è inutile per il fine che ſi deſidera; perchè non è ancor generata la materia che ſi vuol ritenere alla cute . Anzi potrebbe eſſer dannoſo , incontrandoſi ancor viva la infiammazione ; ch' è quanto dire il lavoro della materia purulenta . Nel qual tempo uſata la Chinachina, potrebbe, con frenare i ſalutari moti della natura , impedire queſt' opera , ſenza di cui non ſa eſſa nè può liberarſi dal Vajuolo . Tutte quindi le Scuole de' Medici dietro gl' inſegnamenti del *Sidenamio* (m) fuggono con grande attenzione l' uſo dalla Chinachina nelle febbri ardenti ed infiammatorie: ed il *Boeravio* ſi guardava dall' uſarla nelle febbri ſteſſe periodiche, nelle quali peraltro è ſicuro medicamento, qualora per accidente foſſe ad eſſe congiunto qualche morbo d' infiammazione, o foſſero aſceſe a qualche grado di eſſa. (n)

Io ſo che alcuni Medici della Germania in queſti ultimi tempi non hanno dubitato di tentare la Chinachina ne' morbi infiammatorj febbrili: ſopra di che ſi trovano dati alla luce alcuni libri con i ſuperbi titoli : *De virtute antiphlogiſtica Corticis Peruviani* (o). *De tempeſtivo Corticis Peruviani uſu in febribus inflam-*

(m) Epiſt. Reſp. 1.
(n) Aphor. 767.
(o) *Weichert*.

matoriis (*p*). E noi pure altrove qualche caſo abbiamo addotto che ſembra favorire queſta opinione (*q*). Eccone un altro ancor più rimarcabile e ſignificativo pochi giorni ſono da me oſſervato. Vengo io chiamato a viſitare un Fornajo, che avea una febbre ardente, cagionatagli dall' eſſerſi egli poco prima grandemente affaticato ed infiammato nello ſcaldare un forno nuovo non uſato. Il ſuo polſo era *ſtridulo* (quale io ho deſcritto nel mio libro *de' morbi purulenti*) ed avea gli occhi ſplendenti, le urine roſſe e crude, ſopore e ſete. Due cavate di ſangue, e copioſe bibite nitrate e rinfreſcative, non valſero a frenar l' impeto del morbo: il quale anzi verſo il ſettimo veſtiva caratteri minaccioſi e ſoſpetti. Mi ſon riſoluto di tentare la Chinachina: ſotto il cui uſo è preſto ceduta la febbre; e ſenz'altra ragione o criſi ſi trova in oggi ſalvo e libero l' infermo. Ma perchè pochi caſi e mendicate ragioni non baſtano a combattere una pratica ben fondata ed univerſale, reſteremo noi, ſinchè più convincenti fatti e migliori ragioni ſi adducano, nella volgare credenza, che non ſia da uſarſi la Chinachina nelle infiammazioni: ſe non foſſe una qualche volta in ſul declinare delle medeſime, come ſaggiamente coll' *Offmanno* (*r*) e col *Pringle* (*ſ*) concludono *Franceſco Reyes* (*t*) e *Criſtiano Auguſto Held*. (*u*)

Che ſe tanti riguardi ſi devono avere circa l' uſo della Chinachina ne' morbi ordinarj d' infiammazione, che portano ad una buona e lodevole ſuppurazione, acciocchè queſta non venga fraſtornata; quanto maggiori non dovranſene avere nel Vajuolo, la di cui materia ha per

---

(*p*) *Held.*

(*q*) Diſſert. ſopra il Queſito : *Se nel caſo* ecc. p. 46.

(*r*) Med. Syſt. tom. 4. ſect. 2. cap. 2.

(*ſ*) Oſſerv. part. 3. cap. 4.

(*t*) De Inflammaciones internas, tratado 2. cap. 2.

(*u*) De tempeſtivo Cort. Peruv. uſu in febr. infl. num. 12.

sè ſteſſa ſpeciali caratteri di malizia e velenoſità? Si opporrà che il *Wall*, l'*Huxham*, ed il *Morandi* in ogni tempo di Vajuolo l'hanno preſcritta e lodata. Ma l'*Huxham* ed il *Morandi* oſſervazioni particolari non danno che la comprovino; ed i pochi eſempj del *Wall* di ſopra allegati, o nulla provano, o ben anche provano il contrario. Perciocchè nel caſo primo, e nel ſettimo, dov' egli preſcriſſe la Chinachina nel principio e progreſſo del Vajuolo, morirono gl' infermi: quantunque l' Autore ſi compiaccia d' averla uſata. Nè le ragioni da queſti Autori addotte molto provano, perchè ſi erigono ſu fondamenti dubbioſi e fallaci. Suppongono eſſi che nel Vajuolo il ſangue ſia sfibrato e diſciolto per la povertà dei globetti roſſi che lo compongono. Ma tutto al contrario per le oſſervazioni del *Sidenamio (x)*, del *Baglivio (y)*, del *Boeravio (z)*, dell' *Haen (a)*, e di altri molti ch'è ſuperfluo nominare, il ſangue tratto dalle vene nel Vajuolo, anche ſul finire di eſſo ſi trova denſo e coperto di croſta gelatinoſa, quale trovar ſi ſuole nelle infiammazioni; toltine alcuni pochi caſi, dov'è degenerato il morbo in cangrena.

Il tardar troppo oltre lo ſtabilito tempo a mettere in uſo la Chinachina nel Vajuolo, fa che coi giorni ſia fuggita via l'occaſion di giovare, con aver dato adito e tempo alla materia di riconcentrarſi; la quale ſi dovea con quel rimedio alla cute fermare e ritenere. Entrata che ſia in buona parte queſta materia a contaminare il ſangue, come avvenir ſuole ceſſato l'impeto interno degli umori col ceſſare del fervore infiammatorio, quale utilità ſi dovrà in tal caſo dalla Chinachina aſpettare? Sia pur che in qualche modo a giovar venga come *antiſettico*, non gioverà certo a cacciar dalle vene la triſta materia: a che anzi, rallentando le ſeparazioni, verrà ad eſſere d'oſtacolo. Bensì ſarà utile, cominciato che abbiaſene l'uſo in tempo opportuno, per più giorni ſeguitare ad uſarla dappoi, ſinchè indurita e ſeccata la materia, non ſia più a portata di entrare nel ſangue. Anzi affinchè l'occaſion di giovare, qui più che in altro morbo precipitoſa e fugace, non iſcappi, forti e replicate doſi di Chinachina ne' primi due giorni ſi richieggono al deſiderato effetto, regolate a miſura della pienezza e quantità delle puſtule. Negli adulti che hanno un copioſo Vajuolo due once almeno ſe ne richieggono per ſarne decozione, da prenderſi partitamente ne' due primi dì. Dopo di ciò ſarà ſufficiente una dramma di Chinachina uſata due volte al giorno ſino al totale diſſeccamento delle puſtule. Nei bambini, o dove le puſtule non ſono molto numeroſe e piene baſteranno doſi minori; e ſi potrà in queſti uſar per creſtiere, ſe ad ogni modo rifiutino di prenderla per bocca. Io amo meglio uſare dapprincipio la Chinachina in decozione, perchè credo che con la cottura s' immedeſimi maggiormente con l' acqua; e ſia quindi più atta a penetrar con eſſa dentro le vene: quantunque io ſappia che nelle febbri ed in altri morbi, dov' eſſa operar dee i ſuoi effetti principali nelle prime vie, ſia più forte ed efficace uſata in ſoſtanza.

(x) Obſ. Med. ſect. 2. cap. 2.
(y) Prax. Med. lib. 1. cap. 9.
(z) Aph. 1384.
(a) Rat. Med. part. 2. cap. 6.

Quanti medicamenti efficaciſſimi rieſcono vani in pratica, o ben anche dannoſi, perchè fuor di tempo adoperati! Di qui credo io, più che d'altronde, derivi l'infamia d'incertezza che eſſi, e con eſſi la Medicina tutta ſi ſono acquiſtata. *Neque vero ipſe ullum ſpecioſum medicamentum agnoſco, quin ſolo tempeſtivo uſu tale fiat*, diceva il *Boeravio* nella Prefazione a' ſuoi Aforiſmi.

FINE del Tomo primo.

ERRORI	CORREZIONI
pag. 1. l. 4. Naime	Nairne *e così dipoi*.
l. 17. da	ad
2. l. 26. coricarſi	caricarſi
12. l. 15. manca dopo il *che*	ſono la lunghezza della punta unita all' armatura, e fanno pollici dodici, linee nove, che
15. l. 19. piedi	più di
l. 30. fu	fa
16. l. 2. comparandole	componendole
19. l. 18. $0:4$	$1:6$
22. l. 1. 24. l. 4. prima	piena
36. l. 18. dopo la parola *poſſano* ſi aggiunga	non deſcrivere nello ſteſſo tempo, che ſpazj eguali, e ſe ſono le maſſe ineguali, ſi fa, che intorno allo ſteſſo centro del moto deſcrivano, e non poſſano
44. l. 15. Teor. 10. 6. 4.	Teor. 10. *b. k*
51. l. pen. miſura	miſtura.
62. l. 2. $\frac{1}{2n}2$ ſarà$=7,8534090$	$\frac{1}{2n^2}$ ſarà$=9,544530$
183. l. 12. negativa	poſitiva
733. l. 10. $\sqrt{(\frac{q^3}{4}-\frac{p^3}{27})}$	$\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}$
574. l. ultima nella not. metificità	mefiticità.
578. l. 4. ne' è	n' è
582. nella nota* l. antepen. luo-	luogo
608. l. 24. alle	alla

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

[illegible]
Caumont
[illegible]